入出力数が異なるシステムに対する最適追従制御*

池田 雅夫**・榎木 圭一***・藤崎 泰正**

Optimal Tracking Control of Nonsquare Systems*

Masao IKEDA**, Keiichi ENOKI*** and Yasumasa FUJISAKI**

For nonsquare plants, we propose a method for designing optimal tracking and servo systems based on quadratic performance indices. It is assumed that the number of inputs of the plant is greater than that of outputs. In this case, the steady-state input achieving a specified reference signal at the output is not unique. We utilize this freedom to improve the transient behavior of tracking. The optimal control laws are composed of state feedback with an optimal regulator gain, feedforward of the reference signal, and a constant term determined by the initial state of the system. The constant term is not needed if we assume that the change of the reference signal occurs only when the plant is in a steady state.

1. はじめに

本論文では、ステップ関数を参照信号として、最適レギュレータ理論を応用した最適追従系や最適サーボ系の設計を考える[†]。これまで、この問題はほとんど制御対象の入出力数が同じ場合について考えられてきた。入出力数が異なる場合のうち、入力数が出力数より少ない場合は、入力の自由度の方が出力の自由度よりも小さく、一般に参照信号に追従することはできない。したがって、われわれが考えるべきは、入力数が出力数よりも多い場合である。

制御対象の入出力数が同じ場合、参照信号に制御出力が一致するときの状態や入力の定常値は一意に決まり、それらとの偏差系に最適レギュレータ理論を適用することによって、最適制御則が得られる。しかし、入力数が出力数より多い場合、状態や入力の定常値は一意に定まらない。このとき、たとえば、定常値として初期値に近いものを選べば、応答は速く、制御対象の動きは小さくて済むことが期待できるであろう。その自由度は、何らかの意味で、最適な応答を実現するように決めるべきで

ある。

本論文では、このような観点に立って、制御対象の入出力数が異なる場合における最適追従系の設計法を提案し、その拡張として、積分補償を加えた積分型最適サーボ系、2自由度積分型最適サーボ系の設計法を与える。なお、参考文献1)では、入力の定常値を小さく選ぶことが提案されている。それに対して本論文では、偏差系に対して定義された2次形式評価関数が最小になるように状態と入力の定常値を選ぶ。

2. 最適追従系

2.1 最適追従系の構成

対象とするシステムは、状態方程式

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\quad (1)$$

で表わされているとする。ここに、 x は n 次元状態、 u は m 次元操作入力、 y は p 次元制御出力である。そして、入力数が出力数より多い、すなわち、 $m > p$ とする。 A, B, C は適当な大きさの定数行列で、 B と C はそれぞれ列フルランク、行フルランクをもつとし、 (A, B) は可安定対、 (C, A) は可検出対とする。

さらに、 (C, A, B) の組は入力可観測、すなわち、

* 原稿受付 1993. 2. 5.

** 神戸大学 工学部 Faculty of Engineering, Kobe University; Rokkodai-cho 1, Nada-ku, Kobe 657, Japan

*** 神戸大学 工学部 (現在、三菱電機 ㈱)

Faculty of Engineering, Kobe University; ditto

Key Words: nonsquare plant, tracking system, servosystem, optimal regulator theory, step reference signal.

[†] 本論文では、追従制御系のうち、内部モデル原理¹⁾に基づくサーボ補償器を含むものをサーボ系、含まないものを単に追従系と呼ぶ。

$$\text{rank} \begin{bmatrix} CB \\ CAB \\ CA^2B \\ \vdots \\ CA^{n-1}B \end{bmatrix} = m \quad (2)$$

が成り立つとする。この入力可観測性の定義は、参考文献2)における出力可制御性と双対であり、どのような方向のインパルス入力も出力に影響を与えることを意味している。この仮定を設ける理由は、後に与える最適制御入力の一意性を保証するためである。(2)式の形から分かるように、 (C, A) が可観測対ならば、 (C, A, B) の組は入力可観測である。なお、従来考えられてきた入力数と出力数が等しい $m = p$ の場合には、入力可観測性は伝達関数行列 $C(sI - A)^{-1}B$ が正則であることと等価であり、下記の(3)式の条件のもとで自動的に成立するため、陽に仮定される必要はなかった。

(1)式のシステムに対して、ステップ状の p 次元参照信号 r を考える。そして、 r に追従するような制御系が構成できるように、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p \quad (3)$$

とする³⁾。このとき、定常状態において出力 y が定値 r になるような状態と入力の値 x_∞, u_∞ は、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\infty \\ u_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r \quad (4)$$

を満たさなければならない。状態と入力について定常値((4)式を満たすどれであってもよい)からの偏差を

$$\tilde{x} = x - x_\infty, \quad \tilde{u} = u - u_\infty \quad (5)$$

とおくと、それらのふるまいは次の状態方程式に従う。

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ e &= -C\tilde{x} \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、 e は制御誤差

$$e = r - y \quad (7)$$

である。

制御出力 y が参照入力 r に追従するような制御系を設計する場合、制御誤差が速やかに0になり、操作入力も速やかにその定常値となるように構成するのが良いであろう。そこで、制御誤差と入力偏差の2次形式評価関数

$$J = \int_0^\infty (e^T Q e + \tilde{u}^T R \tilde{u}) dt \quad (8)$$

を考える。ここで、 R と Q は正定な行列とする。積分

の下限である初期時刻 $t = 0$ は参照信号 r が変化した時刻とし、参照信号が変化するたびに最適に追従するような制御系を構成することを目指す。

評価関数 J を(6)式について最小とする操作入力偏差 $\tilde{u}$ は、

$$\tilde{u} = F_0 \tilde{x} \quad (9)$$

というフィードバック形式で実現できる⁴⁾。ただし、

$$F_0 = -R^{-1}B^T P \quad (10)$$

である。ここで、 P はリカッチ方程式

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + C^T QC = 0 \quad (11)$$

の半正定解である。そのような解の存在性と一意性は、これまでに述べた仮定によって保証されている⁴⁾。そして、(9)式の制御則を(6)式の偏差系にほどこして得られる閉ループ系は漸近安定で、

$$\tilde{x} \rightarrow 0, \quad e \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

となることが保証されている。

(9)式のフィードバック則を、操作入力 u について書き直すと、

$$u = F_0 x + v_\infty \quad (12)$$

となる。ただし、

$$v_\infty = -F_0 x_\infty + u_\infty \quad (13)$$

である。ところで、(13)式と(4)式より

$$\begin{bmatrix} A + BF_0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\infty \\ v_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r \quad (14)$$

が成立し、したがって、

$$x_\infty = -(A + BF_0)^{-1} B v_\infty \quad (15)$$

$$-C(A + BF_0)^{-1} B v_\infty = r \quad (16)$$

の2式が導ける。ゆえに、 x_∞ と u_∞ が(4)式を満たすことと v_∞ が(16)式を満たすことは等価である。(16)式を満たす v_∞ は、入力数が出力数よりも多い場合、一意に定まらず、任意の $(m - p)$ 次元ベクトル η を用いて、

$$v_\infty = M^{-R} r + \Gamma \eta \quad (17)$$

と表わせる。ただし、

$$M = -C(A + BF_0)^{-1} B \quad (18)$$

であり、 M^{-R} は(3)式の仮定のもとで行フルランク p をもつ M の右逆行列、 Γ は $(I - M^{-R}M)$ の独立な $(m - p)$ 本の列を集めたものである。よって、(17)式を(12)式に代入すると、操作入力 u は

$$u = F_0 x + M^{-R} r + \Gamma \eta \quad (19)$$

となる。この制御則の中の η を任意に設定しても、閉

ループ系が漸近安定であることは保証されており、

$$x \rightarrow x_\infty, \quad u \rightarrow u_\infty \quad (t \rightarrow \infty)$$

したがって

$$y \rightarrow r \quad (t \rightarrow \infty)$$

となる。

それでは、 η をどのような値に設定するのがよいか考えよう。そのために、(19) 式の制御則によって得られる (8) 式の評価関数の最小値

$$\min_{\tilde{x}} J = \tilde{x}_0^T P \tilde{x}_0 \quad (20)$$

を考える。ここに、 $\tilde{x}_0$ は $\tilde{x}$ の初期値であり、 x の初期値を x_0 とすると、

$$\tilde{x}_0 = x_0 - x_\infty \quad (21)$$

である。また、(15) 式に (17) 式に代入すると、

$$x_\infty = \Psi M^{-R} r + \Psi \Gamma \eta \quad (22)$$

を得る。ただし、

$$\Psi = -(A + BF_0)^{-1} B \quad (23)$$

である。したがって、(20) 式は

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{x}} J = & (x_0 - \Psi M^{-R} r - \Psi \Gamma \eta)^T \\ & \times P (x_0 - \Psi M^{-R} r - \Psi \Gamma \eta) \end{aligned} \quad (24)$$

と表わせる。そこで、 η は任意に選ぶことができるので、 $\min_{\tilde{x}} J$ を最小化することを考える。

さて、制御対象の (C, A, B) の組が入力可観測であるという仮定より、 $\Psi^T P \Psi$ は正則であることを示すことができる (付録 1)。したがって、 $\Gamma^T \Psi^T P \Psi \Gamma$ も正則であり、 $\min_{\tilde{x}} J$ を最小にする η は

$$\eta = (\Gamma^T \Psi^T P \Psi \Gamma)^{-1} \Gamma^T \Psi^T P (x_0 - \Psi M^{-R} r) \quad (25)$$

であることを示すことができる (付録 2)。そして、その最小値は

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{x}} \min_{\eta} J = & (x_0 - \Psi M^{-R} r)^T \\ & \times [P - P \Psi \Gamma (\Gamma^T \Psi^T P \Psi \Gamma)^{-1} \Gamma^T \Psi^T P] \\ & \times (x_0 - \Psi M^{-R} r) \end{aligned} \quad (26)$$

である。こうして決められた (25) 式の η を (19) 式に代入して、最適制御則として、

$$u = F_0 x + H_0 r + K_0 x_0 \quad (27)$$

を得る。ただし、

$$H_0 = M^{-R} - K_0 \Psi M^{-R} \quad (28)$$

$$K_0 = \Gamma (\Gamma^T \Psi^T P \Psi \Gamma)^{-1} \Gamma^T \Psi^T P \quad (29)$$

である。これらは M の右逆行列 M^{-R} 、 $(I - M^{-R} M)$ の独立な列の選び方に依存せず一意に決まる (付録 3)。

Fig. 1 Optimal tracking system

(27) 式の制御則を (1) 式の制御対象にほどこすと、その制御系は Fig. 1 のようになる。最適追従系は、状態フィードバックと参照信号からのフィードフォワードに加え、初期状態によって決まる定数項から構成される。この制御則をほどこすことによって、実際、状態の定常値 x_∞ は (22) 式に (25) 式を代入したものになる。

2.2 最適追従系の特徴

入出力数が同じ場合、フィードフォワードゲイン H_0 は、状態フィードバック系の部分の定常ゲインの逆行列となっており、参照信号から制御出力までの定常ゲインが単位行列 I になる⁵⁾。これは追従系がもつべき基本的性質である。本論文で設計された制御系においても参照信号 r から制御出力 y までの定常ゲインは、

$$-C(A + BF_0)^{-1} B H_0 = I \quad (30)$$

である。これは (28) 式と、 $M \Gamma = 0$ であることより明らかである。つまり、フィードフォワードゲイン H_0 は状態フィードバック系部の定常ゲインの右逆行列 (の一つ) になっている。

また、同様に初期状態の項 x_0 から制御出力への定常ゲインは、

$$-C(A + BF_0)^{-1} B K_0 = 0 \quad (31)$$

である。(30) 式と (31) 式を合わせて考えると、(27) 式の最適制御則における定値入力 $K_0 x_0$ は、追従の過渡状態のときのみ効果が現れ、制御系の定常状態においては、制御出力に影響を与えていないことがわかる。定値入力 $K_0 x_0$ は最適性の追求の結果現れた項なので、追従の過渡状態でのみ効果があるものであり、過渡応答を良くするためにあると解釈できる。

なお、参照信号が変化した場合、一般の状況を考えて定値入力も変えなければならないが、参照信号の変化が、システムが定常状態に落ちついている状況のみで起こると仮定すれば、定値入力は必要はない。つまり、

$$u = F_0 x + H_0 r \quad (32)$$

が最適制御則となる。これは以下のように示すことができる。

(32) 式の制御則をほどこしたとき、定常状態では

$$u_{\infty} = F_0 x_{\infty} + H_0 r \quad (33)$$

である。これは、

$$v_{\infty} = H_0 r \quad (34)$$

であることを意味し、したがって、(15) 式より

$$x_{\infty} = \Psi H_0 r \quad (35)$$

である。(29) 式より $K_0 \Psi K_0 \Psi = K_0 \Psi$ が成立することをを使うと、(28) 式より

$$K_0 \Psi H_0 = 0 \quad (36)$$

であることがいえるから

$$K_0 x_{\infty} = 0 \quad (37)$$

が成立する。参照信号が変化するとき、新たな制御において、これは

$$K_0 x_0 = 0 \quad (38)$$

を意味する。したがって、最適入力に定値入力は必要ない。

3. 積分型最適サーボ系

モデル化誤差や制御対象のあいまいさ、定値外乱に対処するためには、内部モデル原理により、追従誤差 e の積分補償が必要である³⁾。通常、それは Fig. 2 の拡大系の形で導入される。これを状態方程式で表わすと、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

と書ける。(4) 式より状態と操作入力の定常値 x_{∞}, u_{∞} が

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\infty} \\ w_{\infty} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_{\infty} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r = 0 \quad (40)$$

を満たすことを使って、偏差 $\tilde{x}, \tilde{w}$ について書くと

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{w}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u} \\ e &= \begin{bmatrix} -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$

Fig. 2 Augmented system

を得る。ここに、 w_{∞} は w の定常値、 $\tilde{w}$ は偏差

$$\tilde{w} = w - w_{\infty} \quad (42)$$

である。この偏差系を安定化することによってサーボ系が得られる。

ここで注意すべきことは、状態と入力の定常値 x_{∞}, u_{∞} は一意ではなく、また w の定常値 w_{∞} はまだ決まっていないことである。制御出力 y が参照信号 r に一致したとき、制御誤差 e は 0 であるから、その積分である w の定常値 w_{∞} が存在することは確かである。以下では、ある評価関数を最小にする $x_{\infty}, u_{\infty}, w_{\infty}$ の値を求め、それらを実現する制御則を提案する。

その評価関数として、(8) 式の J に w の偏差 $\tilde{w}$ の 2 次形式を加えた

$$J_a = \int_0^{\infty} (e^T Q_{a1} e + \tilde{w}^T Q_{a2} \tilde{w} + \tilde{u}^T R_a \tilde{u}) dt \quad (43)$$

を考える。ここに、 Q_{a1}, Q_{a2}, R はすべて正定な行列とする。 Q_{a2} を正定として $\tilde{w}^T Q_{a2} \tilde{w}$ の項を組み入れたのは、そうしなければ積分補償の効果を制御に反映することができないからである。この評価関数を (41) 式に関して最小とする入力偏差 $\tilde{u}$ は、

$$\tilde{u} = -R_a^{-1} \begin{bmatrix} B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} \quad (44)$$

というフィードバック形式で実現できる。ここに、

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}$$

はリカッチ方程式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A^T & -C^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} R_a^{-1} \begin{bmatrix} B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} C^T Q_{a1} C & 0 \\ 0 & Q_{a2} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

の半正定解である。そのような解の存在性と一意性は、これまでに述べた仮定によって保証されている。そして、 P_{22} は正則である⁶⁾。得られた (44) 式の制御則を (41) 式の偏差系にほどして得られる閉ループ系は漸近安定で、

$$\tilde{x} \rightarrow 0, \tilde{w} \rightarrow 0, e \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (46)$$

となることも保証されている。

(44) 式のフィードバック則を入力 u について書こう。

$$u = F_a x + G_a w - G_a w_{\infty} + v_{a\infty} \quad (47)$$

ただし,

$$F_a = -R_a^{-1} B^T P_{11}, \quad G_a = -R_a^{-1} B^T P_{12} \quad (48)$$

$$v_{a\infty} = -F_a x_{\infty} + u_{\infty} \quad (49)$$

とおいた。ここで, (15) 式より (16) 式が導かれたように

$$-C(A + BF_a)^{-1} B v_{a\infty} = r \quad (50)$$

が成立することを用いると,

$$M_a = -C(A + BF_a)^{-1} B \quad (51)$$

の任意の右逆行列 M_a^{-R} を用いて

$$v_{a\infty} = M_a^{-R} r + \Gamma_a \eta_a \quad (52)$$

と表わすことができる。ただし, M_a は (3) 式の仮定のもとでフルランク p をもち, Γ_a は $(I - M_a^{-R} M_a)$ の独立な $(m-p)$ 本の列を集めたものである。また, η_a は $(m-p)$ 次元のベクトルで, $v_{a\infty}$ がもつ自由度を表わしている。以上より, (47) 式の制御則は

$$u = F_a x + G_a w - G_a w_{\infty} + M_a^{-R} r + \Gamma_a \eta_a \quad (53)$$

と書き直すことができる。

それでは, η_a と w_{∞} をどのような値に設定するのが良いか考えよう。そのために, (53) 式によって得られる (43) 式の評価関数の最小値

$$\min_u J_a = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0^T & \tilde{w}_0^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{w}_0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

を考える。ここに, $\tilde{w}_0$ は $\tilde{w}$ の初期値である。つまり, w の初期値を w_0 とすると,

$$\tilde{w}_0 = w_0 - w_{\infty} \quad (55)$$

である。参考文献 6) にあるように, まず最初に w_{∞} について (54) 式を最小化する。その結果,

$$w_{\infty} = w_0 + P_{22}^{-1} P_{12}^T (x_0 - x_{\infty}) \quad (56)$$

のとき, 最小値

$$\min_{w_{\infty}} \min_u J_a = \tilde{x}_0^T \hat{P} \tilde{x}_0 \quad (57)$$

を得る。ただし,

$$\hat{P} = P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{12}^T \quad (58)$$

である。

つぎに,

$$\Psi_a = -(A + BF_a)^{-1} B \quad (59)$$

とおき, x_{∞} が (22) 式と同様に

$$\begin{aligned} x_{\infty} &= \Psi_a v_{a\infty} \\ &= \Psi_a M_a^{-R} r + \Psi_a \Gamma_a \eta_a \end{aligned} \quad (60)$$

と表わせることを用いて, (57) 式の評価関数値

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0^T \hat{P} \tilde{x}_0 &= (x_0 - \Psi_a M_a^{-R} r - \Psi_a \Gamma_a \eta_a)^T \\ &\quad \times \hat{P} (x_0 - \Psi_a M_a^{-R} r - \Psi_a \Gamma_a \eta_a) \end{aligned} \quad (61)$$

をさらに小さくする。制御対象の (C, A, B) の組が入力可観測であるという仮定から, $\Psi_a^T \hat{P} \Psi_a$ の正則性を示すことができる (付録 4)。したがって, $\Gamma_a^T \Psi_a^T \hat{P} \Psi_a \Gamma_a$ も正則であるから, (24) 式を最小化したように,

$$\eta_a = (\Gamma_a^T \Psi_a^T \hat{P} \Psi_a \Gamma_a)^{-1} \Gamma_a^T \Psi_a^T \hat{P} (x_0 - \Psi_a M_a^{-R} r) \quad (62)$$

と選ぶと,

$$\begin{aligned} \min_{\eta_a} \min_{w_{\infty}} \min_u J_a &= (x_0 - \Psi_a M_a^{-R} r)^T \\ &\quad \times [\hat{P} - \hat{P} \Psi_a \Gamma_a (\Gamma_a^T \Psi_a^T \hat{P} \Psi_a \Gamma_a)^{-1} \Gamma_a^T \Psi_a^T \hat{P}] \\ &\quad \times (x_0 - \Psi_a M_a^{-R} r) \end{aligned} \quad (63)$$

を得る。

以上より, (60) 式の x_{∞} を用いながら w_{∞} を (56) 式のように, η_a を (62) 式のように設定すると, 評価関数 J_a を最小にできることがわかった。これらを (53) 式に代入し整理すると, 最適制御則として,

$$u = F_a x + G_a w + H_a r - G_a w_0 + K_a x_0 \quad (64)$$

を得る。ただし,

$$H_a = M_a^{-R} - K_a \Psi_a M_a^{-R} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} K_a &= \Gamma_a (\Gamma_a^T \Psi_a^T \hat{P} \Psi_a \Gamma_a)^{-1} \Gamma_a^T \Psi_a^T \hat{P} - G_a P_{22}^{-1} P_{12}^T \\ &\quad \times [I - \Psi_a \Gamma_a (\Gamma_a^T \Psi_a^T \hat{P} \Psi_a \Gamma_a)^{-1} \Gamma_a^T \Psi_a^T \hat{P}] \end{aligned} \quad (66)$$

である。これらが, M_a の右逆行列 M_a^{-R} や $(I - M_a^{-R} M_a)$ の独立な列の選び方に依存しないことは, (28), (29) 式の H_0, K_0 の一意性と同様に示すことができる。

(64) 式の制御則を (39) 式の拡大系にほどこすことによって Fig. 3 の最適サーボ系を得る。この制御系においても, 最適追従系の場合と同様, 参照信号の変化はシステムが定常状態に落ちついている状況のみで起こると仮定すれば, 定値入力は必要はない。つまり,

$$u = F_a x + G_a w + H_a r \quad (67)$$

Fig. 3 Optimal servosystem

が最適制御則となる（付録5）。

4. 2自由度積分型最適サーボ系

入出力数が同じシステムに対する積分型最適サーボ系には、前節で述べたような拡大偏差系に最適レギュレータ理論を適用して得られるもののほかに、2自由度構造のものが提案されている⁷⁾。これは、制御対象のモデル化誤差や外乱が存在しない場合には、積分補償は必要ないとの考えに基づくものである。その構成法としては、まず参照信号への追従特性を積分補償なしの最適追従系として設計し、つぎに制御対象のモデル化誤差や外乱に対処するために、積分補償を導入する。

Fig. 4 Two-degree-of-freedom optimal servosystem

この設計法は入力数が出力数よりも多い制御対象にも、2.1で導いた最適追従系を用いてまったく同じように適用できる。その結果、得られる2自由度最適サーボ系はFig. 4の構造をしている。ここに、 F_0, H_0, K_0 は(10)、(28)、(29)式で定義されたもの、 F_1 は

$$F_1 = C(A + BF_0)^{-1} \quad (68)$$

である。 G はこの制御系が安定となるように、 F_1BG すなわち $-MG$ が安定行列になるように選ばれる⁸⁾。単なる安定化だけでなく、ある評価関数に対する最適性をも望む場合は、参考文献7)と同様に

$$G = R^{-1}M^TW \quad (69)$$

と選ばばよい。ただし、 W は任意の正定行列である。

なお、この2自由度最適サーボ系の場合も、参照信号が定常状態でのみ変化する場合には、初期状態に依存する定値項 $K_0x_0, F_1x_0 + w_0$ は必要ない。これは2.2の議論と参考文献7)の結果より自明であろう。

5. 数値例

数値例により、2.で提案した最適追従系の有効性を確認しよう。対象システム(1)式はつぎの行列で表わさ

れるものとする。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

また、(8)式の評価関数の重みは、

$$Q = 1, \quad R = I \quad (71)$$

とする。このとき、最適制御則(27)式の F_0, H_0, K_0 はつぎのように計算される。

$$F_0 = \begin{bmatrix} -2.5006 & -3.0605 & -0.7218 \\ -0.7218 & -1.1314 & -0.2775 \end{bmatrix}$$

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1.1416 \\ -2.7053 \end{bmatrix}$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} 1.3590 & 2.0605 & 0.5024 \\ -0.5729 & -0.8686 & -0.2118 \end{bmatrix} \quad (72)$$

まず、定値項 K_0x_0 が過渡応答をよくすることを確かめるために、最適制御則(27)式とそれから K_0x_0 を除いた場合を比較しよう。参照信号 r を

$$r = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (73)$$

初期状態を

$$x_0 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}^T \quad (74)$$

としてシミュレーションした結果をFig. 5に示す。この結果より、 K_0x_0 が、参照信号へのすばやい追従に効果があることがわかる。

つぎに、この最適追従系と、参考文献1)の方法で設計した追従系を比較しよう。参考文献1)では、状態フィードバックゲイン F_0 は本論文のものと等しく、参照信号からのフィードフォワードゲイン H_0 は入力の変常値が小さくなるように決めることを提案している。この方法によれば、 H_0 は

Fig. 5 Step responses of optimal tracking systems (nonzero initial condition)

$$H_0 = \begin{bmatrix} -0.7961 \\ -1.8884 \end{bmatrix} \quad (75)$$

と計算できる。 K_0 は考えられていない。そこで、初期状態を $x_0 = 0$ とし、上の最適追従系と参考文献1)の追従系を比較した結果を Fig. 6, Fig. 7 に与える。Fig. 6 は (73) 式の参照信号に対する出力の応答, Fig. 7 はそのときの入力値のふるまいである。この結果によると、参考文献1)の制御則では、入力の定常値は小さいものの、出力に逆応答を生じている。それに対し2.で提案した制御則では、(8)式の評価関数の最小化を達成しているため、良い追従特性を実現している。

Fig. 6 Step responses of optimal tracking systems (zero initial condition)

Fig. 7 Input behaviors of optimal tracking systems (zero initial condition)

同様に、3.の積分型最適サーボ系、4.の2自由度積分型最適サーボ系の有効性を示すことができ、本論文で提案した状態と入力の定常値を設定する方法が効果的であることが確認できる。

6. おわりに

本論文では、入力数が出力数よりも多い制御対象に対して、最適レギュレータ理論を応用した追従系、積分型サーボ系、2自由度積分型サーボ系の設計法を提案した。このような制御対象の場合、参照信号の値を出力に実現する状態と入力の定常値は一意ではない。そのなかで、2次形式評価関数の意味で応答を良くするものを選ぼうというのが、基本方針である。本論文では参照信号としてステップ信号のみを考えたが、ランプ信号、正弦波信号、指数関数状信号の場合も同様の考え方を適用して制

御系を設計することができる。

参考文献

- 1) 朴, 鈴木, 藤井: 多変数線形最適サーボ系の設計; 計測自動制御学会論文集, Vol. 8, No. 5, pp. 568~575 (1972)
- 2) E. Kreindler and P. E. Sarachik: On the Concept of Controllability and Observability of Linear Systems; IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-9, No. 4, pp. 129~136 (1964)
- 3) 古田, 原: サーボ技術と現代制御論; 計測と制御, Vol. 19, No. 10, pp. 953~961 (1980)
- 4) 木村: 多変数制御系の理論と応用-I; システムと制御, Vol. 22, No. 5, pp. 293~301 (1978)
- 5) 池田: SICE セミナー現代制御理論(初級)テキスト, 計測自動制御学会, p. 72 (1992)
- 6) 池田, 須田: 積分型最適サーボ系の構成; 計測自動制御学会論文集, Vol. 24, No. 1, pp. 40~46 (1988)
- 7) 藤崎, 池田: 2自由度積分型最適サーボ系の構成; 計測自動制御学会論文集, Vol. 27, No. 8, pp. 907~914 (1991)
- 8) 萩原, 大谷, 荒木: 2自由度LQIサーボ系の設計法; システム制御情報学会論文誌, Vol. 4, No. 12, pp. 501~510 (1991)
- 9) 近藤, 原, 古田: 安定余裕を考慮した1型サーボ系の一設計法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 22, No. 11, pp. 1142~1148 (1986)
- 10) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会 (1978)
- 11) B. A. Francis and W. M. Wonham: The Internal Model Principle for Linear Multivariable Regulators; J. Appl. Math. Opt., Vol. 2, pp. 170~194 (1975)

付 録

付録1 $\Psi^T P \Psi$ の正則性の証明

リカッチ方程式 (11) 式を変形すると、リアプノフ方程式

$$(A + BF_0)^T P + P(A + BF_0) + F_0^T R F_0 + C^T Q C = 0 \quad (A1)$$

が得られ、これより P は

$$P = \int_0^\infty \left\{ e^{(A+BF_0)\tau} \right\}^T (F_0^T R F_0 + C^T Q C) e^{(A+BF_0)\tau} d\tau \quad (A2)$$

と表現できる。よって、

$$\begin{aligned} \Psi^T P \Psi &= \int_0^\infty \left\{ \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} C \\ R^{\frac{1}{2}} F_0 \end{bmatrix} e^{(A+BF_0)\tau} \Psi \right\}^T \\ &\quad \times \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} C \\ R^{\frac{1}{2}} F_0 \end{bmatrix} e^{(A+BF_0)\tau} \Psi d\tau \end{aligned} \quad (A3)$$

である。これが正定行列であることと

$$\left(\begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} C \\ R^{\frac{1}{2}} F_0 \end{bmatrix}, A + BF_0, \Psi \right) \quad (A4)$$

の組が入力可観測であることは等価である²⁾。さて、行の付加や基本行変換¹⁰⁾を適当に行い、ケーリー・ハミルトンの定理を用いれば、

$$\begin{aligned}
\text{rank} \begin{bmatrix} CB \\ CAB \\ CA^2B \\ \vdots \\ CA^{n-1}B \end{bmatrix} &\leq \text{rank} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}C \\ R^{\frac{1}{2}}F_0 \end{bmatrix} B \\ \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}C \\ R^{\frac{1}{2}}F_0 \end{bmatrix} AB \\ \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}C \\ R^{\frac{1}{2}}F_0 \end{bmatrix} A^2B \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}C \\ R^{\frac{1}{2}}F_0 \end{bmatrix} A^{n-1}B \end{bmatrix} \\
&= \text{rank} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}C \\ R^{\frac{1}{2}}F_0 \end{bmatrix} B \\ \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}C \\ R^{\frac{1}{2}}F_0 \end{bmatrix} (A+BF_0)B \\ \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}C \\ R^{\frac{1}{2}}F_0 \end{bmatrix} (A+BF_0)^2B \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}C \\ R^{\frac{1}{2}}F_0 \end{bmatrix} (A+BF_0)^{n-1}B \end{bmatrix} \\
&= \text{rank} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}C \\ R^{\frac{1}{2}}F_0 \end{bmatrix} (A+BF_0)^{-1}B \\ \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}C \\ R^{\frac{1}{2}}F_0 \end{bmatrix} B \\ \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}C \\ R^{\frac{1}{2}}F_0 \end{bmatrix} (A+BF_0)B \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}C \\ R^{\frac{1}{2}}F_0 \end{bmatrix} (A+BF_0)^{n-2}B \end{bmatrix} \\
&= \text{rank} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}C \\ R^{\frac{1}{2}}F_0 \end{bmatrix} \psi \\ \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}C \\ R^{\frac{1}{2}}F_0 \end{bmatrix} (A+BF_0)\psi \\ \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}C \\ R^{\frac{1}{2}}F_0 \end{bmatrix} (A+BF_0)^2\psi \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}C \\ R^{\frac{1}{2}}F_0 \end{bmatrix} (A+BF_0)^{n-1}\psi \end{bmatrix} \quad (A5)
\end{aligned}$$

となる。これは、対象システムの \$(A, B, C)\$ の組が入力可観測であれば、(A4) 式の組も入力可観測であることを示している。以上より、\$\Psi^T P \Psi\$ が正則であることがいえた。□

付録2 (25) 式および (26) 式の導出

(20) 式に (21) 式, (22) 式を代入して整理すると,

$$\begin{aligned}
\min_{\eta} J &= \left\{ \eta - (\Gamma^T \Psi^T P \Psi \Gamma)^{-1} \Gamma^T \Psi^T P (x_0 - \Psi M^{-R} r) \right\}^T \\
&\quad \times (\Gamma^T \Psi^T P \Psi \Gamma) \\
&\quad \times \left\{ \eta - (\Gamma^T \Psi^T P \Psi \Gamma)^{-1} \Gamma^T \Psi^T P (x_0 - \Psi M^{-R} r) \right\} \\
&\quad + J_0 \quad (A6)
\end{aligned}$$

と書ける。ただし,

$$\begin{aligned}
J_0 &= (x_0 - \Psi M^{-R} r)^T \\
&\quad \times \left\{ P - P \Psi \Gamma (\Gamma^T \Psi^T P \Psi \Gamma)^{-1} \Gamma^T \Psi^T P \right\} \\
&\quad \times (x_0 - \Psi M^{-R} r) \quad (A7)
\end{aligned}$$

である。よって、\$\min_{\eta} J\$ を最小にするような \$\eta\$ は (25) 式, その最小値は (26) 式で与えられる。□

付録3 ゲイン \$H, K\$ の一意性

\$M\$ の任意の二つの右逆行列 \$M_1^{-R}, M_2^{-R}\$ の間には,

$$M_2^{-R} = M_1^{-R} + (I - M_1^{-R} M) V \quad (A8)$$

$$I - M_2^{-R} M = (I - M_1^{-R} M) W \quad (A9)$$

の関係がある。ここに、\$V \in R^{m \times p}\$ は適当な行列、\$W \in R^{m \times m}\$ は適当な正則行列である。したがって、それらから導かれる \$\Gamma\$ を \$\Gamma_1, \Gamma_2\$ と表わすと、適当な \$Y \in R^{(m-p) \times p}\$ と正則な \$T \in R^{(m-p) \times (m-p)}\$ を用いて,

$$M_2^{-R} = M_1^{-R} + \Gamma_1 Y, \quad \Gamma_2 = \Gamma_1 T \quad (A10)$$

と表わせる。これらより,

$$\begin{aligned}
&\left\{ I - \Gamma_2 (\Gamma_2^T \Psi^T P \Psi \Gamma_2)^{-1} \Gamma_2^T \Psi^T P \Psi \right\} M_2^{-R} \\
&= \left\{ I - \Gamma_1 (\Gamma_1^T \Psi^T P \Psi \Gamma_1)^{-1} \Gamma_1^T \Psi^T P \Psi \right\} M_1^{-R} \Gamma_2 \\
&\quad \times (\Gamma_2^T \Psi^T P \Psi \Gamma_2)^{-1} \Gamma_2^T \Psi^T P \\
&= \Gamma_1 (\Gamma_1^T \Psi^T P \Psi \Gamma_1)^{-1} \Gamma_1^T \Psi^T P \quad (A11)
\end{aligned}$$

が成立する。よって、\$H, K\$ は、\$\Gamma, \Psi\$ の選び方に依存しない。□

付録4 \$\Psi_a^T \hat{P} \Psi_a\$ の正則性の証明

リカッチ方程式 (45) 式より,

$$(A + BF_a)^T \hat{P} + \hat{P} (A + BF_a) + F_a^T R F_a + C^T Q_a C = 0 \quad (A12)$$

が成立する⁹⁾。したがって、付録1とまったく同様に示して、\$\Psi_a^T \hat{P} \Psi_a\$ が正則であることがいえる。□

付録5 (67) 式の制御則の最適性

(67) 式の制御則をほどこしたとき, 定常状態では

$$u_{\infty} = F_a x_{\infty} + G_a w_{\infty} + H_a r \quad (\text{A13})$$

が成立している. つまり,

$$-v_{a\infty} + G_a w_{\infty} + H_a r = 0 \quad (\text{A14})$$

である. 一方, (52) 式と (60) 式より

$$\begin{aligned} H_a r &= M_a^{-R} r - K_a \Psi_a M_a^{-R} r \\ &= v_{a\infty} - \Gamma_a \eta_a - K_a x_{\infty} + K_a \Psi_a \Gamma_a \eta_a \\ &= v_{a\infty} - K_a x_{\infty} \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

がいえるから, 結局,

$$G_a w_{\infty} - K_a x_{\infty} = 0 \quad (\text{A16})$$

が成立する. なお, (A15) 式の最後の等号は, (66) 式より $K_a \Psi_a \Gamma_a = \Gamma_a$ がいえることによる. (A16) 式は, 参照信号が変化したとき, 新たな制御において,

$$G_a w_0 - K_a x_0 = 0 \quad (\text{A17})$$

を意味する. したがって, (67) 式に定値入力 of 項は必要ない. $\square$