ファジィ数結合強度を持つファジィニューラルネットの学習アルゴリズム*

石 渕 久 生**・権 奇 澤**・田 中 英 夫**

A Learning Algorithm of Fuzzy Neural Networks with Fuzzy Weights*

Hisao ISHIBUCHI**, Kitaek KWON** and Hideo TANAKA**

1. はじめに

前報¹⁾では、実数入力ベクトルをファジィ数に写像する非線形関数の近似を行うため、ファジィ数結合強度とファジィ数しきい値を持つ多入力-出力ファジィニューラルネットの構造を提案し、その学習アルゴリズムを導出した。本研究では、入力ベクトルがファジィ数ベクトルの場合に対し、より一般的な多入力多出力ファジィニューラルネットの学習アルゴリズムを導出する。ファジィニューラルネットの学習アルゴリズムは Hayashi ら²⁾においても提案されているが、実数値関数として定義されたコスト関数からクリスプな学習アルゴリズムを導出するという本研究の手法は、ファジィ数を用いて学習規則をファジィ化した Hayashi らの手法とは本質的に異なるものである。

2. ニューラルネットの構造

入力層に n_1 個、中間層に n_2 個、出力層に n_3 個のユニットを持つ3層階層型ファジィニューラルネットに、 n_1 次元ファジィ数ベクトル $X_p = (X_{p1}, X_{p2}, \dots, X_{pn_1})$ が入力されたときの入出力関係を、前報¹⁾および Hayashi ら²⁾と同様に、拡張原理を用いて次のように定義する。

入力層：

$$O_{pi} = X_{pi}, \quad i = 1, 2, \dots, n_1 \quad (1)$$

中間層：

$$O_{pj} = f(\text{Net}_{pj}), \quad j = 1, 2, \dots, n_2 \quad (2)$$

$$\text{Net}_{pj} = \sum_{i=1}^{n_1} O_{pi} W_{ji} + \Theta_j, \quad j = 1, 2, \dots, n_2 \quad (3)$$

出力層：

$$O_{pk} = f(\text{Net}_{pk}), \quad k = 1, 2, \dots, n_3 \quad (4)$$

$$\text{Net}_{pk} = \sum_{j=1}^{n_2} O_{pj} W_{kj} + \Theta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n_3 \quad (5)$$

ここで、 W_{ji} , W_{kj} はファジィ数結合強度、 Θ_j , Θ_k はファジィ数しきい値である。また、 $f(x) = 1/[1 + \exp(-x)]$ である。なお、本研究では、ファジィ数結合強度とファジィ数しきい値は、対称三角型ファジィ数として与えられているものとする。

ファジィ数の h -レベル集合は閉区間になるので、たとえば、 $[A]_h = [[A]_h^L, [A]_h^U]$ と表示することにする。このとき、(1)~(5)式の入出力関係より、 h -レベル集合に対する次のような関係が得られる。

入力層：

$$[O_{pi}]_h = [[O_{pi}]_h^L, [O_{pi}]_h^U] = [[X_{pi}]_h^L, [X_{pi}]_h^U] \quad (6)$$

中間層：

$$[O_{pj}]_h = [[O_{pj}]_h^L, [O_{pj}]_h^U] = [f([Net_{pj}]_h^L), f([Net_{pj}]_h^U)] \quad (7)$$

$$[Net_{pj}]_h^L = \sum_{i=1}^{n_1} [W_{ji}]_h^L [O_{pi}]_h^L \quad [W_{ji}]_h^L \geq 0$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_1} [W_{ji}]_h^L [O_{pi}]_h^U + [\Theta_j]_h^L \quad [W_{ji}]_h^L < 0 \quad (8)$$

$$[Net_{pj}]_h^U = \sum_{i=1}^{n_1} [W_{ji}]_h^U [O_{pi}]_h^U \quad [W_{ji}]_h^U \geq 0$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_1} [W_{ji}]_h^U [O_{pi}]_h^L + [\Theta_j]_h^U \quad [W_{ji}]_h^U < 0 \quad (9)$$

* 原稿受付 1993. 8. 19.

** 大阪府立大学 工学部 University of Osaka Prefecture ; Gakuen-cho, Sakai, Osaka 593, JAPAN

Key Words : fuzzy neural networks, fuzzy weights, fuzzy data.

出力層:

$$\begin{aligned} [O_{pk}]_h &= \left[[O_{pk}]_h^L, [O_{pk}]_h^U \right] \\ &= \left[f([\text{Net}_{pk}]_h^L), f([\text{Net}_{pk}]_h^U) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} [\text{Net}_{pk}]_h^L &= \sum_{j=1}^{n_2} [W_{kj}]_h^L [O_{pj}]_h^L \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n_2} [W_{kj}]_h^L [O_{pj}]_h^U + [\Theta_k]_h^L \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} [\text{Net}_{pk}]_h^U &= \sum_{j=1}^{n_2} [W_{kj}]_h^U [O_{pj}]_h^U \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n_2} [W_{kj}]_h^U [O_{pj}]_h^L + [\Theta_k]_h^U \end{aligned} \quad (12)$$

3. 学習アルゴリズムの導出

3.1 コスト関数の定義

ファジニューラルネットからのファジ数出力ベクトル $O_p = (O_{p1}, O_{p2}, \dots, O_{pn_3})$ に対応したファジ数教師信号を $T_p = (T_{p1}, T_{p2}, \dots, T_{pn_3})$ とする。このとき、 h -レベル集合に対するコスト関数を次のように定義する。

$$e_{ph} = \frac{\sum_{k=1}^{n_3} ([T_{pk}]_h^L - [O_{pk}]_h^L)^2}{2} + \frac{\sum_{k=1}^{n_3} ([T_{pk}]_h^U - [O_{pk}]_h^U)^2}{2} \quad (13)$$

3.2 学習アルゴリズム

まず、中間層と出力層との間のファジ数結合強度 $W_{kj} = (w_{kj}^L, w_{kj}^C, w_{kj}^U)$ の学習規則を導出することにする。なお、 $w_{kj}^L, w_{kj}^C, w_{kj}^U$ は、それぞれ、対称三角型ファジ数 W_{kj} の左端、中心、右端であり、次の関係が成り立つ。

$$w_{kj}^C = \frac{w_{kj}^L + w_{kj}^U}{2} \quad (14)$$

また、対称三角型ファジ数 W_{kj} の左端 w_{kj}^L と右端 w_{kj}^U および h -レベル集合 $[W_{kj}]_h = [[W_{kj}]_h^L, [W_{kj}]_h^U]$ との間には、次のような関係が成り立つ。

$$[W_{kj}]_h^L = w_{kj}^L \left(1 - \frac{h}{2}\right) + \frac{w_{kj}^U h}{2} \quad (15)$$

$$[W_{kj}]_h^U = \frac{w_{kj}^L h}{2} + w_{kj}^U \left(1 - \frac{h}{2}\right) \quad (16)$$

(13) 式で定義されたレベル集合に対するコスト関数 e_{ph} を減少させるため、前報¹⁾と同様に、ファジ数結合強度 W_{kj} のサポート集合 (w_{kj}^L, w_{kj}^U) の修正を行うことにする。すなわち、ファジ数結合強度 W_{kj} の左端

w_{kj}^L と右端 w_{kj}^U の修正量を次のように設定する。

$$\Delta w_{kj}^L(t+1) = -\eta h \frac{\partial e_{ph}}{\partial w_{kj}^L} + \alpha \Delta w_{kj}^L(t) \quad (17)$$

$$\Delta w_{kj}^U(t+1) = -\eta h \frac{\partial e_{ph}}{\partial w_{kj}^U} + \alpha \Delta w_{kj}^U(t) \quad (18)$$

ここで、 t は結合強度の修正回数、 η は学習率、 α は慣性項係数である。なお、(17)、(18) 式の微係数は、(6)~(12) 式および (15)、(16) 式を用いて (13) 式のコスト関数から次のように導出される。

① $0 \leq [W_{kj}]_h^L \leq [W_{kj}]_h^U$ のとき

$$\frac{\partial e_{ph}}{\partial w_{kj}^L} = -\delta_{pkh}^L [O_{pj}]_h^L \left(1 - \frac{h}{2}\right) - \delta_{pkh}^U [O_{pj}]_h^U \frac{h}{2} \quad (19)$$

$$\frac{\partial e_{ph}}{\partial w_{kj}^U} = -\delta_{pkh}^L [O_{pj}]_h^L \frac{h}{2} - \delta_{pkh}^U [O_{pj}]_h^U \left(1 - \frac{h}{2}\right) \quad (20)$$

ここで、

$$\delta_{pkh}^L = ([T_{pk}]_h^L - [O_{pk}]_h^L) [O_{pk}]_h^L (1 - [O_{pk}]_h^L) \quad (21)$$

$$\delta_{pkh}^U = ([T_{pk}]_h^U - [O_{pk}]_h^U) [O_{pk}]_h^U (1 - [O_{pk}]_h^U) \quad (22)$$

である。

② $[W_{kj}]_h^L \leq [W_{kj}]_h^U < 0$ のとき

$$\frac{\partial e_{ph}}{\partial w_{kj}^L} = -\delta_{pkh}^L [O_{pj}]_h^U \left(1 - \frac{h}{2}\right) - \delta_{pkh}^U [O_{pj}]_h^L \frac{h}{2} \quad (23)$$

$$\frac{\partial e_{ph}}{\partial w_{kj}^U} = -\delta_{pkh}^L [O_{pj}]_h^L \frac{h}{2} - \delta_{pkh}^U [O_{pj}]_h^U \left(1 - \frac{h}{2}\right) \quad (24)$$

③ $[W_{kj}]_h^L < 0 \leq [W_{kj}]_h^U$ のとき

$$\frac{\partial e_{ph}}{\partial w_{kj}^L} = -\delta_{pkh}^L [O_{pj}]_h^U \left(1 - \frac{h}{2}\right) - \delta_{pkh}^U [O_{pj}]_h^U \frac{h}{2} \quad (25)$$

$$\frac{\partial e_{ph}}{\partial w_{kj}^U} = -\delta_{pkh}^L [O_{pj}]_h^L \frac{h}{2} - \delta_{pkh}^U [O_{pj}]_h^U \left(1 - \frac{h}{2}\right) \quad (26)$$

このような場合分けは、(11)、(12) 式の区間演算における場合分けに対応している。また、微係数が不連続となる $[W_{kj}]_h^L = 0$ および $[W_{kj}]_h^U = 0$ となるところでは、場合分けから明らかなように、それぞれ、 $[W_{kj}]_h^L > 0$ および $[W_{kj}]_h^U > 0$ での値を用いている。

ファジ数結合強度 W_{kj} の左端 w_{kj}^L と右端 w_{kj}^U は、(17)、(18) 式を用いて次のように修正される。

$$w_{kj}^L(t+1) = w_{kj}^L(t) + \Delta w_{kj}^L(t+1) \quad (27)$$

$$w_{kj}^U(t+1) = w_{kj}^U(t) + \Delta w_{kj}^U(t+1) \quad (28)$$

このような修正により、ファジィ数結合強度 W_{kj} の左端 w_{kj}^L と右端 w_{kj}^U の逆転が生じることも考慮し、修正後のファジィ数結合強度を次のように定義する。

$$w_{kj}^L = \min\{w_{kj}^L(t+1), w_{kj}^U(t+1)\} \quad (29)$$

$$w_{kj}^U = \max\{w_{kj}^L(t+1), w_{kj}^U(t+1)\} \quad (30)$$

入力層と中間層との間のファジィ数結合強度 W_{ji} やファジィ数しきい値 θ_j, θ_k の修正も同様に行われる。なお、ファジィ数結合強度 W_{ji} の修正量の計算に必要な微係数 $\partial e_{ph}/\partial w_{ji}^L, \partial e_{ph}/\partial w_{ji}^U$ は次のように導出される。

① $0 \leq [W_{ji}]_h^L \leq [W_{ji}]_h^U$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{ph}}{\partial w_{ji}^L} &= -\delta_{ph}^A [O_{pj}]_h^L (1 - [O_{pj}]_h^L) [O_{pi}]_h^L \left(1 - \frac{h}{2}\right) \\ &\quad - \delta_{ph}^B [O_{pj}]_h^U (1 - [O_{pj}]_h^U) [O_{pi}]_h^U \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{ph}}{\partial w_{ji}^U} &= -\delta_{ph}^A [O_{pj}]_h^L (1 - [O_{pj}]_h^L) [O_{pi}]_h^L \frac{h}{2} \\ &\quad - \delta_{ph}^B [O_{pj}]_h^U (1 - [O_{pj}]_h^U) [O_{pi}]_h^U \left(1 - \frac{h}{2}\right) \end{aligned} \quad (32)$$

ここで、

$$\delta_{ph}^A = \sum_{k=1}^{n_3} \delta_{pkh}^L [W_{kj}]_h^L + \sum_{k=1}^{n_3} \delta_{pkh}^U [W_{kj}]_h^U \quad (33)$$

$$\delta_{ph}^B = \sum_{k=1}^{n_3} \delta_{pkh}^L [W_{kj}]_h^L + \sum_{k=1}^{n_3} \delta_{pkh}^U [W_{kj}]_h^U \quad (34)$$

である。

② $[W_{ji}]_h^L \leq [W_{ji}]_h^U < 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{ph}}{\partial w_{ji}^L} &= -\delta_{ph}^A [O_{pj}]_h^L (1 - [O_{pj}]_h^L) [O_{pi}]_h^L \left(1 - \frac{h}{2}\right) \\ &\quad - \delta_{ph}^B [O_{pj}]_h^U (1 - [O_{pj}]_h^U) [O_{pi}]_h^L \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{ph}}{\partial w_{ji}^U} &= -\delta_{ph}^A [O_{pj}]_h^L (1 - [O_{pj}]_h^L) [O_{pi}]_h^U \frac{h}{2} \\ &\quad - \delta_{ph}^B [O_{pj}]_h^U (1 - [O_{pj}]_h^U) [O_{pi}]_h^U \left(1 - \frac{h}{2}\right) \end{aligned} \quad (36)$$

③ $[W_{ji}]_h^L < 0 \leq [W_{ji}]_h^U$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{ph}}{\partial w_{ji}^L} &= -\delta_{ph}^A [O_{pj}]_h^L (1 - [O_{pj}]_h^L) [O_{pi}]_h^U \left(1 - \frac{h}{2}\right) \\ &\quad - \delta_{ph}^B [O_{pj}]_h^U (1 - [O_{pj}]_h^U) [O_{pi}]_h^L \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{ph}}{\partial w_{ji}^U} &= -\delta_{ph}^A [O_{pj}]_h^L (1 - [O_{pj}]_h^L) [O_{pi}]_h^L \frac{h}{2} \\ &\quad - \delta_{ph}^B [O_{pj}]_h^U (1 - [O_{pj}]_h^U) [O_{pi}]_h^U \left(1 - \frac{h}{2}\right) \end{aligned} \quad (38)$$

4. おわりに

本研究では、入力ベクトルと教師信号が共にファジィ数ベクトルである場合に対し、ファジィ数結合強度を持つ多入力多出力ニューラルネットの学習アルゴリズムを導出した。本研究で導出した学習アルゴリズムにおいて、種々のレベル h の値を用いることにより、ファジィ数出力ベクトルがファジィ数教師信号に一致することを目指すとした学習を行うことができる。

参 考 文 献

- 1) 石淵, 岡田, 田中: ファジィ数結合強度を持つニューラルネット; システム制御情報学会論文誌, Vol. 6, No. 3, pp. 137~148 (1993)
- 2) Y. Hayashi, J. J. Buckley and E. Czogala: Fuzzy Neural Network with Fuzzy Signals and Weights; International J. of Intelligent Systems, Vol. 8, pp. 527~537 (1993)