終端誤差ノルムを考慮した間接法による 線形系の最短時間制御の数値解法*

西村 行雄**・米澤 洋**

An Indirect Method of Computing Time Optimal Control of Linear Systems Considering the Terminal Error Norm*

Yukio NISHIMURA** and Yoh YONEZAWA**

Eaton (1962) has solved theoretical problems in computing time-optimal control of linear systems. But in the practical point of view, his method has two main drawbacks with respect to both the convergent rate and the accuracy of the solution. In this paper, we discuss a new indirect method for the terminal control problems, taking into account of the fact that such an approximate control is practically required as making the terminal state error norm smaller than some acceptable value. And combining the method with Eaton's method, a new effective algorithm of finding time optimal control is proposed. Also the integrating method to prevent the accumulation of round off error at the evaluation of the cost function is proposed. The accuracy and the efficiency of the method are shown by using several numerical examples.

1. はじめに

速応性を目的とする最短時間制御の実システムへの適用事例は、安定化(レギュレーション)を主目的とするLQ制御に比べて僅少である¹⁾。この主な理由として、閉ループ制御系の構成が困難であること、およびロバスト性の評価が困難であること²⁾などが考えられる。とくに、モデリング誤差を伴う実システムにおいては、状態を有限時間で整定させることは不可能であり、誤差を考慮した最短時間問題の定式化は困難となる。これはLQ制御系がロバスト安定となることと対比すれば、最短時間制御の実用化を阻害している大きな要因の一つと思われる。モデリング誤差は別途に対処するものとして、操作量制限のある実システムにおいて速応性を目ざした制御系の構成法を検討するとき、最も基本的なツールとして最短時間制御の数値求解プログラムが必要となる。たとえば、近似的に構成した最短時間フィードバック制御

系の諸特性を、それらの最適なものと比較検討する場合や³⁾、速応性を考慮したリレー制御系の設計を行う場合⁴⁾などにおいて、制御応答の規範として最短時間制御結果があれば好都合である。また、数値的に求めた最適解を直接フィードフォワード制御の規範として利用することも考えられている⁵⁾。しかしながら、最短時間制御の効率的な数値求解法はあまり周知ではない。これは最短時間制御が、実用化の困難な制御方式であることの一つの反映とも考えることができる。

最適制御の数値解法は古くから研究され、解の収束性等に関する理論的諸問題の多くは解決済みと思われる⁶⁾。解法としては、評価関数を直接操作量に関して最適化を行う直接法^{7)~10)}と、最大原理を適用して補助変数の初期値問題を解く間接法^{11)~14)}がある。特に直接法は、非線形系の場合や、拘束条件が付加した場合のような、より一般的な最適制御問題に適用できるため、数値解法の主流となっている⁶⁾。しかしながら、本質的に無限次元空間での最適化問題(時間関数の最適化)を扱うため、間接法に比べて必要とする計算機の記憶容量が膨大となる。間接法によれば、制御対象が n 次の場合 n 次元空間での最適化問題となる。線形系の最短時間制御の解法に関して、Neustadtは間接法による求解原理を示し¹¹⁾、

* 原稿受付 1992. 7. 1

** 広島大学 工学部 Faculty of Engineering, Hiroshima University ; Kagamiyama, Higashi-Hiroshima 724, JAPAN

Key Words : time optimal control, terminal control, numerical computation, indirect method, linear system.

Eaton は繰り返し計算法を提案した¹²⁾。一般の数値解法においては、初期近似解の選定いかんによっては必ずしも最適解に収束せず、また最適解に収束する初期近似解の設定法も明示されていないが、この方法ではそれが明示されているのが特長の一つである。Eaton の提案によって、線形系の最短時間制御の数値解法に関する理論的な問題点は完全に解消された。しかしながら、筆者の使用経験によれば、求解速度・精度などの点で必ずしも有効な解法とは言い難い。

一般に従来の数値解法の研究では、収束性の証明などの理論面に主眼がおかれ、適当な近似解を効率よく求めるための実際面での検討は等閑にされていたように思われる。本論文では、工学的に要求される近似解は制御偏差(終端状態ノルム)を許容値以下とする場合が多いことを考慮して、終端値制御の数値解法を提案し、この方法と Eaton の方法とを併用する最短時間制御の近似解法を提案する。また、求解精度の向上法を検討する。これらの提案における論点を傍証するため、幾つかの数値例を示す。

2. 最短時間制御の数値解法

2.1 Neustadt-Eaton の方法^{11), 12)} とその問題点

1 入力線形系の最短時間制御問題は、次のように記述される。

$$\text{制御対象} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (1)$$

$$\text{操作量の制限} \quad |u| \leq 1 \quad (2)$$

$$\text{境界条件} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$\text{評価} \quad t_f \rightarrow \text{最小 (最小値を } T^* \text{ と記す)} \quad (4)$$

ただし、 $\mathbf{x}$ は n 次元状態ベクトル、 u はスカラー操作量、 $\mathbf{A}$ および $\mathbf{b}$ はそれぞれ $n \times n$ 定数行列および $n \times 1$ 定数ベクトルであり、平衡点(原点)は可到達、 $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ は可制御とする。(1)式において、 $\mathbf{x}, u$ は時間 t の関数であるが、簡潔さのため変数 t を省略している。以降の諸記号も、自明な場合には適宜略記するものとする。

上記の問題に最大原理を適用すれば、随伴系

$$\dot{\Psi} = -\mathbf{A}^T \Psi \quad (5)$$

$$\Psi(0) = \mathbf{p} \quad (6)$$

の解 Ψ を用いて、

$$u = \text{sgn}(\Psi^T \mathbf{b}) \quad (7)$$

は最適性の必要条件を満足する。ただし、 Ψ は n 次元

随伴ベクトルである。(7)式の u に対する(1)式の解が(3)式を満足するとき、この u は最短時間制御となる。したがって、最適制御の求解問題は、方程式系(1)、(5)、(7)式において、境界条件(3)式を満足する随伴系の初期値 $\mathbf{p} = \mathbf{p}^*$ ($\|\mathbf{p}\| = 1$ とし、記号 $*$ は最適値の意味に使用する)を見いだす問題となる。なお、(7)式から明らかにように条件 $\|\mathbf{p}\| = 1$ の付加によって一般性は失われない。

いま、 $\Psi(0) = \mathbf{p}$ に対して(5)、(7)式で決定される操作量を $u(\mathbf{p}, t)$ とするとき、(1)式の解は遷移行列を $\Phi(t)$ として、

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \left\{ \mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{b} u(\mathbf{p}, \tau) d\tau \right\} \quad (8)$$

したがって、 $u(\mathbf{p}, t)$ によって t 秒後に原点に到達できる初期状態を $\xi(\mathbf{p}, t)$ とすれば、 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ より

$$\xi(\mathbf{p}, t) = - \int_0^t \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{b} u(\mathbf{p}, \tau) d\tau \quad (9)$$

となる。したがって、問題は $\xi(\mathbf{p}, t) = \mathbf{x}_0$ となる $\mathbf{p}$ を見いだすこととなる。いま、 $\mathbf{p}$ が与えられた初期状態 $\mathbf{x}_0$ に対して

$$\mathbf{p}^T \mathbf{x}_0 < 0 \quad (10)$$

に選ばれているとして[†]、関数 $f(\mathbf{p}, t)$ を

$$\eta(\mathbf{p}, t) \triangleq \xi(\mathbf{p}, t) - \mathbf{x}_0 \quad (11)$$

$$f(\mathbf{p}, t) \triangleq \mathbf{p}^T \eta(\mathbf{p}, t) \quad (12)$$

で定義するとき、 $f(\mathbf{p}, t)$ は t の単調減少関数であり、ある時刻 $T(\mathbf{p}) \leq T^*$ で 0 となる¹³⁾。すなわち、

$$\dot{f}(\mathbf{p}, t) \leq 0 \quad (13)$$

$$f(\mathbf{p}, T(\mathbf{p})) = 0, T(\mathbf{p}) \leq T^* \quad (14)$$

したがって評価関数

$$J_1 = T(\mathbf{p}) \quad (15)$$

を $\mathbf{p}$ に関して最大化することによって、 $\mathbf{p}^*$ および T^* を求めることができる。いま、(14)式が成立した時刻 $T(\mathbf{p})$ において、 $\eta(\mathbf{p}) \triangleq \eta(\mathbf{p}, T(\mathbf{p}))$ とする。

このとき、 J_1 の $\mathbf{p}$ に関するグラジエント $\mathbf{g}_1(\mathbf{p})$ は、次式となる。

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{p}) \triangleq \frac{dJ_1}{d\mathbf{p}} = \frac{\eta(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}^T \Phi^{-1}(T(\mathbf{p})) \mathbf{b}|} \quad (16)$$

Neustadt の提案した最適化法は、

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mu \eta(\mathbf{p}) \quad (17)$$

で与えられる¹³⁾。ただし、 μ は正の定数である。実際の数値計算に際しては、(17)式の離散値形

[†] これは、(12)式 $f(\mathbf{p}, 0) > 0$ の条件である。また、 $\mathbf{p}^{*T} \mathbf{x}_0 < 0$ が成立する。

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \mu_k \boldsymbol{\eta}(\mathbf{p}_k) \quad (18)$$

が用いられる。ここに、 $k=0, 1, 2, \dots$ は繰り返し数である。Eaton は $k \rightarrow \infty$ のとき $\mathbf{p}_k \rightarrow \mathbf{p}^*$ となる μ_k の帰納的決定法を示した¹²⁾ (付録 1 参照)。しかしながら筆者の使用経験によれば、下記の点で必ずしも満足すべき方法とは言い難い。

- (I) (18) 式はグラジエント法であるため、収束速度が遅く、最適点以外の点で繰り返し過程がしばしば停滞する。
- (II) 最適化のアルゴリズムを共役勾配法などに変更すれば、比較的少ない繰り返し数 k で $T(\mathbf{p}_k)$ は T^* の近傍へ収束するが、制御偏差の収束は非常に遅い。この傾向は特に高次の系において顕著である。
- (III) $u(\mathbf{p}_k, t)$ による制御偏差 $\|\mathbf{x}(t_m)\|$, $t_m = T(\mathbf{p}_k)$ は k に関して単調には減少しない。したがって、計算打ち切り時（一般に修正過程が停滞した点で打ち切られる）の制御関数は、それまでの計算で得られている制御と比べて、必ずしも有効な制御とはならない。
- (IV) 諸変数の具体的な計算法、たとえば (5), (7), (9), (11), (14) 式により $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{p})$ を評価する場合の計算アルゴリズムなどが明示されていない。一般的に行われているように、時間軸を幅 Δt で刻み数値積分によって評価する場合には、操作量の各切り替え時刻において最大 Δt の誤差を伴うことになり、精度低下の原因となる。

2.2 終端値制御問題の解法

ここでは (7) 式で決定される $u(\mathbf{p}, t)$ によって、 $T(\mathbf{p})$ 時間制御を行った場合の制御偏差

$$J_2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(T(\mathbf{p}))\|^2 \quad (19)$$

を評価関数として、 J_2 の $\mathbf{p}$ に関する最小化問題を考える。いま、 $u(\mathbf{p}, t)$ の切り替え時刻を $t_s(\mathbf{p}) = (t_1, t_2, \dots, t_m)^T$, $t_m = T(\mathbf{p})$ と記す。このとき、 J_2 の $\mathbf{p}$ に関するグラジエント $g_2(\mathbf{p})$ は次式となる。

$$g_2(\mathbf{p}) \triangleq \frac{dJ_2}{d\mathbf{p}} = \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{x}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{x}(t_m)}{\partial t_i} \cdot \frac{dt_i}{d\mathbf{p}} \quad (20)$$

(7) 式より、 u の切り替え時刻 $t_i (i=1, \dots, m-1)$ において

$$\mathbf{p}^T \Phi^{-1}(t_i) \mathbf{b} = 0 \quad (21)$$

したがって、

$$\frac{dt_i}{d\mathbf{p}} = \frac{-\Phi^{-1}(t_i) \mathbf{b}}{\mathbf{p}^T \dot{\Phi}^{-1}(t_i) \mathbf{b}} \quad (22)$$

また、 t_i の微小変化による最終状態 $\mathbf{x}(t_m)$ の変分を評価することによって、

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t_m)}{\partial t_i} = 2 \Phi(t_m - t_i) \mathbf{b} u_i \quad (23)$$

ただし、 u_i は時間 $t_{i-1} \leq t < t_i$ における操作量 (+1 または -1) を示す。終端時刻 t_m の変分に関しては、(16) 式と同様に

$$\frac{dt_m}{d\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\eta}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}^T \Phi^{-1}(t_m) \mathbf{b}|} \quad (24)$$

また、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}(t_m)}{\partial t_m} &= A \mathbf{x}(t_m) + \mathbf{b} u_m \\ &= \dot{\Phi}(t_m) \Phi^{-1}(t_m) \mathbf{x}(t_m) + \mathbf{b} u_m \end{aligned} \quad (25)$$

となる。また、(8), (9), (11) 式より、

$$\mathbf{x}(t_m) = -\Phi(t_m) \boldsymbol{\eta}(\mathbf{p}) \quad (26)$$

および $\mathbf{p}^T \dot{\Phi}^{-1}(t_i) \mathbf{b} / u_i = -|\mathbf{p}^T \dot{\Phi}^{-1}(t_i) \mathbf{b}|$ を考慮に入れて、(22)~(25) 式を (20) 式に代入することにより、

$$\begin{aligned} g_2(\mathbf{p}) &= -\boldsymbol{\eta}(\mathbf{p})^T \Phi^T(t_m) \left[\sum_{i=1}^{m-1} \frac{2 \Phi(t_m - t_i) \mathbf{b} \Phi^{-1}(t_i) \mathbf{b}}{|\mathbf{p} \dot{\Phi}^{-1}(t_i) \mathbf{b}|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\{-\dot{\Phi}(t_m) \boldsymbol{\eta}(\mathbf{p}) + \mathbf{b} u_m\} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}^T \dot{\Phi}^{-1}(t_m) \mathbf{b}|} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

また、(26) 式を (19) 式に適用して、

$$J_2 = \frac{1}{2} \|\Phi(t_m) \boldsymbol{\eta}(\mathbf{p})\|^2 \quad (28)$$

を得る。(27) 式を利用すれば、随伴系の初期値 $\mathbf{p}$ に関して J_2 を最小化することができる。

2.3 偏差を考慮する最短時間制御の求解

アルゴリズム

2.3.1 求解アルゴリズム

工学的に要求される近似解は、制御偏差を適当な許容限界値 (ε とする) 以下とするものであることが多い。いま、最適性の必要条件を満足する操作量を $u_1(t)$, $0 \leq t \leq t_1$ とし、 u_1 によって到達した状態点を $\mathbf{x}_1$ とする。このとき、 u_1 は状態を $\mathbf{x}_0$ から $\mathbf{x}_1$ へ移す最短時間制御となる。したがって、

$$\|\mathbf{x}_1\| \leq \varepsilon \quad (29)$$

が成立するとき、このときの u_1 を近似解として採用することができる。(29) 式を満足する近似解の求解に、前記の終端値制御問題の解法を適用する。一般に $J_2(\mathbf{p})$ は $\mathbf{p}$ の多峰性関数と考えられ、 $\mathbf{p}$ の初期値の設定いかんによっては目的の誤差規準を達成することはできない。このため、数学的に収束性が保証されている Eaton の

方法を基本的求解法として利用し、Eaton 法による $J_1(\mathbf{p})$ の最大化が数値的に停留した場合、 $J_2(\mathbf{p})$ の最小化法を適用する。一般に評価関数が異なれば停留点が異なるので、評価関数の切り換えによって近似度改良の可能性が発生する。しかしながら、この有効性を論証するものではない。提案する求解法をアルゴリズム (i) としてつぎに掲げる。ただし、記述を最小化に統一するため、記号 $J_A \triangleq -J_1$, $J_B \triangleq J_2$, $\mathbf{g} \triangleq -dJ_C(\mathbf{p}_k)/d\mathbf{p}$ を定義し、添え字 C を A または B を代表するものとし、 $k(k=0, 1, 2, \dots)$ を繰り返し数を表わすものとして用いている。また共役勾配を $\mathbf{q}$ とし、任意のベクトル $\mathbf{r}$ の単位ベクトルを $\mathbf{r}^U$ と表記している。

【アルゴリズム (i)】

- ① 許容制御偏差 ε_0 、時間軸の刻み幅 H および評価関数の変更判定用、および繰り返し過程の停滞判定用の閾値として、それぞれ $\varepsilon_1(>\varepsilon_0)$ および $\varepsilon_2(<H)$ を設定し、 $\mathbf{p}_1 \leftarrow -\mathbf{x}_0^U$, $t_{s,0} = 0$, $C = A$ とおく。 $\mathbf{p}_1$ に対して $\eta \triangleq \eta(\mathbf{p}_1)$, $t_{s,1} \triangleq t_s(\mathbf{p}_1)$ を計算する。
- ② $k=1$, $\|\mathbf{g}_{k-1}\|=1$, $\mathbf{q}_{k-1} = \mathbf{0}$ とおく。
- ③ (16) 式または (27) 式を利用して、 $\mathbf{g}_k$ を計算する。 $\mathbf{p}$ の探索方向 $\mathbf{q}_k$ を共役勾配法 (F-R 法¹⁵⁾) で次式のように決定する。

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{g}_k + \frac{\|\mathbf{g}_k\|^2}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2} \mathbf{q}_{k-1} \quad (30)$$

- ④ 1 次元探索によって

$$\lambda^* = \text{Min}_{\lambda} J_C((\mathbf{p}_k + \lambda \mathbf{q}_k)^U) \quad (31)$$

を求め、

$$\mathbf{p}_{k+1} = (\mathbf{p}_k + \lambda^* \mathbf{q}_k^U)^U \quad (32)$$

とおく。 λ^* の探索時に $\mathbf{p}_{k+1}$ に対する η , $t_{s,k+1}$, u_m および $J_B(\mathbf{p}_{k+1})$ を計算し、 $k \leftarrow k+1$ とする。

- ⑤ 収束条件 $J_B \leq \varepsilon_0$ の正否を判定する。正ならば、 $u(\mathbf{p}_k, t)$ を最適制御の近似値として計算を終了する。否ならば、ステップ ⑥ へ行く。
- ⑥ 停滞条件 $\|t_{s,k} - t_{s,k-1}\| < \varepsilon_2$ の正否を判定する。正ならば、ステップ ⑦ へ行く。否ならばステップ ③ へ戻る。
- ⑦ 評価関数変更条件を判定する。

- (a): $C = A$ のとき、 $J_B \leq \varepsilon_1$ ならば、 $C = B$ と変更し、 $\mathbf{p}_1 \leftarrow \mathbf{p}_k$ としてステップ ② へ戻る。 $J_B > \varepsilon_1$ ならば、刻み幅および停留判定規準を、 $H \leftarrow H/2$, $\varepsilon_2 \leftarrow \varepsilon_2/2$ と縮小してステップ ③ へ戻る。

- (b): $C = B$ ならば、 $C = A$ と変更、 $\mathbf{p}_1 \leftarrow \mathbf{p}_k$, $H \leftarrow H/2$, $\varepsilon_2 \leftarrow \varepsilon_2/2$ としてステップ ② へ戻る。

上記において、ステップ ③~⑥ は共役勾配法による J_C の最小化ループである。フローチャートの概要を Fig. 1 に示す。最適化過程の停滞の判定は、切り換え時刻の変化量に基づいて行っている。前述のように $\mathbf{p}$ の初期値が $\mathbf{p}^*$ の近傍にとられていない場合には、 $J_2(=J_B)$ の最小化によっては必ずしも近似解を得ることができない。したがって閾値 ε_1 を設けることによって、 $J_1(=-J_A)$ の最大化が停滞した場合、ただちに評価が J_2 に切り替わることを防止している。逆に、 J_2 の最小化が停滞した場合には、ただちに評価は J_1 に切り替えられる。本方法では、評価関数を J_2 から J_1 に切り換えた場合の随伴系の初期値 $\mathbf{p}_1$ として、 J_2 に対して求められた最終値 $\mathbf{p}_k$ を用いている。これは、この方が収束速度が早いという経験則によって行っている[†]。しかしながら前回の J_1 の最適化における最終値 $\mathbf{p}_k$ を用いることとすれば、収束性が保証された Eaton の方法を包含させることができる。

Fig. 1 Flowchart of the algorithm (i)

2.3.2 諸変量の具体的計算法

前記のアルゴリズムの適用において必要となる最も基本的な変量は $\eta(\mathbf{p})$ であり、評価関数値 $J_2(\mathbf{p})$ および勾配 $\mathbf{g}_1(\mathbf{p})$, $\mathbf{g}_2(\mathbf{p})$ は、 $\eta(\mathbf{p})$ および $\eta(\mathbf{p})$ の算出過程で計算される $t_s(\mathbf{p})$ を用いて計算することができる。ここでは $\eta(\mathbf{p})$ を高精度で計算するための方法を示し、パラメータ $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, H$ の設定において考慮すべき事項を述べる。

随伴系 (5) 式の数値積分によって $\eta(\mathbf{p})$ および $t_s(\mathbf{p})$

[†] 前回の J_1 の最適化における最終値 $\mathbf{p}_k$ は J_1 の尾根状点であると考えられ、この点を避けることによって収束特性が改善されるものと思われる。

を評価する場合には、 $u(p, t)$ の各切り替え時刻 $t_s(p)$ に最大 H の計算誤差が発生する。したがって、許容制御偏差 ε_0 を達成させるために刻み幅 H を非常に小さく選定する必要が生じるが、これによって所要計算時間の長大化や、丸め誤差の累積問題が発生する。これを避けるため、 $\Phi(t)$, $\Phi_s(t) \triangleq \int \Phi(t) dt$, $\Phi_d(t) \triangleq d\Phi(t)/dt$ などの行列をあらかじめ時間 t の関数として表現したものを利用した[†]。次にこれを説明する。

(7) 式より

$$u(p, t) = \text{sgn}(p^T \Phi(-t)b) \quad (33)$$

は区分的に一定値をとるが、 i 番目の切り換え時刻を t_i (ただし $t_0 = 0$) として、 u_i を次式で定義する。

$$u_i \triangleq u(p, \tau), \quad t_{i-1} \leq \tau < t_i \quad (34)$$

このとき、 $\eta(p, t)$ は (11), (9) 式より

$$\begin{aligned} \eta(p, t) = & - \sum_{i=1}^{j-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi^{-1}(\tau) b u_i d\tau \\ & - \int_{t_{j-1}}^t \Phi^{-1}(\tau) b u_j d\tau - x_0 \end{aligned} \quad (35)$$

ただし、 $t_{j-1} \leq t < t_{j+1}$ とする。(35) 式において、

$$\begin{aligned} & \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi^{-1}(\tau) b u_i d\tau \\ & = \int_0^{t_i} \Phi^{-1}(\tau) b u_i d\tau - \int_0^{t_{i-1}} \Phi^{-1}(\tau) b u_i d\tau \\ & = \int_0^{t_i} \Phi^{-1}(\tau) b u_i d\tau + \int_0^{t_{i-1}} \Phi^{-1}(\tau) b u_{i-1} d\tau \\ & = -\Phi_s(-t_i) b u_i - \Phi_s(-t_{i-1}) b u_{i-1} \end{aligned} \quad (36)$$

を考慮すれば、(35) 式は

$$\eta(p, t) = \eta(p, t_{j-1}) + \xi(u_j, t) \quad (37)$$

と表現できる。ここに、

$$\eta(p, t_{j-1}) \triangleq 2 \sum_{i=1}^{j-1} \Phi_s(-t_i) b u_i - x_0 \quad (38)$$

$$\xi(u_j, t) \triangleq - \int_0^t \Phi^{-1}(\tau) b u_j d\tau = \Phi_s(-t) b u_j \quad (39)$$

である。(37) 式に従えば、 $\eta(p, t)$ を高精度に求めるためには、切り換え時刻 t_i を高精度に求めればよい。このため、(33) 式右辺を刻み幅 H ごとに評価し、符号に変化が生じた場合にはその時刻 $(p^T \Phi(-t)b = 0$ となる時刻) をニュートン法および2分法を適用して、あらかじめ定めた許容誤差 $\varepsilon_h (\ll H)$ で求める。これによって、 $u(p, t)$ が H 以下の切り替え時間をもつ場合を除いて、

ε_h の精度で $t_s(p)$ を求めることができる。つぎに諸変量の算出手順をアルゴリズム(ii)として要約する。

【アルゴリズム(ii)】

① $t = 0$, $\eta \triangleq \eta(p, t) = -x_0$, $m = 1$ とし、初期操作量 $u_1 = \text{sgn}(p^T \Phi(-\varepsilon_h)b)$ を計算する。

② $t \leftarrow t + H$, $u_o = (-u_1)^m$ とおき、

$$u_N = \text{sgn}(p^T \Phi(-t)b)$$

$$s_U = u_o \cdot u_N$$

を求める。 $s_U > 0$ なら操作量の変化なしとしてステップ④へ飛ぶ。 $s_U < 0$ の時はステップ③へ行く。

③ $p^T \Phi(-t)b = 0$ を満足する時刻 t (m 番目の操作量の変化時刻) を精密計算し、 $t_m = t$, $m \leftarrow m + 1$ とおく。

④ $\xi = \Phi_s(-t)b u_o$ を計算し、 $\eta \leftarrow \eta + \xi$ とおく。

⑤ $f \triangleq f(p, t) = p^T \eta$ を計算し、

(a) : $f > 0$ の時は、 $\eta \leftarrow \eta - s_U \xi$ としてステップ②へ戻る。

(b) : $f < 0$ の時はステップ⑥へ行く。

⑥ $f(p, t) = 0$ を満足する時刻 $t (= T(p))$ と η を精密計算し、 $s_U < 0$ の場合には m を $m - m - 1$ と変更する。 $t_m = t$ とおく。この時点において基本的な変量 $\eta(p) = \eta$, $t_s(p) = (t_1, t_2, \dots, t_m)$, および u_m が求められる。

⑦ $\eta(p)$, $t_s(p)$, u_m を (28), (16), (27) 式に適用して、評価関数値 $J_2(p)$ および勾配 $g_1(p)$, $g_2(p)$ を得る。

上記のアルゴリズムにおいて時刻 t の増加に伴う $\eta(p, t)$ は、概ねステップ②～⑤ (a) の繰り返しで計算される。ステップ④の η の計算において、 ξ ((37) 式右辺第2項に対応する) は時間の増分に対してではなく、常に時間 t に対して計算され、操作量の符号変化が無いときには ($s_U > 0$ のとき)、ステップ⑤ (a) においてただちに η から削減される。また、操作量の符号変化が生じた場合には ($s_U < 0$)、(36) 式右辺第2項に対応する量としてステップ⑤ (a) において加算される。これが丸め誤差の累積を防止するための工夫である。なお、行列 $\Phi_d(t)$ はステップ③および⑥において、ニュートン法により時刻 t を精密計算する場合と、(27) 式の $g_2(p)$ を計算する場合に利用している。さらに、刻み幅 H の設定においては、システム行列 A の固有値を考慮に入れることは当然であるが、あらかじめ指定される許容制御偏差 ε_0 を達成させるため、初期状態 x_0 および遷移行列 $\Phi(t)$ と制御時間 (未知) が関連する (付録2参照)。しかしながら、刻み幅 H はアルゴリズム(i)のステッ

[†] 行列 $\Phi(t)$, $\Phi_s(t)$ および $\Phi_d(t)$ の関数表現は、システム行列 A の固有値計算およびジョルダン標準形への変換を介して得ることができる。

ブ⑦において逐次適正化されるので、その決定にさほどの厳密性は要しない。また、最適化の停留および評価関数の変更を判定する閾値 ε_2 および ε_1 は、それぞれ $\varepsilon_h < \varepsilon_2 < H$ および $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \|x_0\|$ の範囲で選定すべきと考えられる。この値の選定いかんによって、最適化の収束特性は変化する。たとえば ε_1 を ε_0 に近づけた場合には、 J_1 のみの最適化法に近似するものとなる。

3. 数値例による検討

次の3方法の適用結果を検討する。

Eatonの方法 (方法A) : アルゴリズムについては、付録1を参照

修正 Eaton法 (方法B) : 本論文のアルゴリズム(i)において $J_1(p)$ のみの最適化を行う方法

提案する方法 (方法C) : 本論文で提案する $J_1(p)$ と $J_2(p)$ の最適化を併用する方法
また、各方法の適用に際して必要となる $\eta(p)$ などの計算には、すべてアルゴリズム(ii)を利用している。なお、すべての計算例において、許容制御偏差は $\varepsilon_0 = 0.01$ とし、時間の刻み幅の初期設定値は $H = 0.1$ としている。その他のパラメータは、 $\varepsilon_1 = \alpha\varepsilon_0$, $\varepsilon_h = H/\beta$, $\varepsilon_2 = \gamma\varepsilon_h$ ($\alpha = 100$, $\beta = 1000$, $\gamma = 2$) とした。

Table 1 は、伝達関数 $G(s)$ が $1/s^n$ ($n = 2, \dots, 5$) で示される制御対象において、各方法の平均的な収束特性を比較したものである。特性値としては、収束するまでに要した諸変量の等価的な計算回数 N (以降単に関数評価回数と呼ぶ)、すなわちアルゴリズム(ii)の適用回数を時間の刻み幅で基準化したものを採用した。たとえば、刻み幅 H_i ($< H$) を用いてアルゴリズム(ii)を n_i 回適用した場合、 $n_i \times H/H_i$ 回とみなして N を算定し

Table 1 Comparison of average number of function evaluation $\bar{N}$ for three methods ($\|x(0)\| = 1$, $\|x(t_f)\| < 0.01$)

object $G(s)$		$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{1}{s^5}$
final time $\bar{t}_f$		2.135	3.220	5.091	7.874
$\bar{N}$	A	23	366	—	—
	B	17	68	315	1448*
	C	17	68	246	1064*

† 打ち切り基準を $\|p_{k+1} - p_k\| < \varepsilon_3$, $\varepsilon_3 = 10^{-12}$ と設定している。

Table 2 Typical examples and the results

object $G(s)$		$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{1}{s^5}$	$\frac{1}{(s+1)^6}$
initial state	$\mathbf{x}(0)$	0.0964	−0.4821	−0.3845	0.3116	$103.35 \cdot 10^2$
		0.9953	−0.7701	0.3428	−0.3251	$−89.32 \cdot 10^2$
		—	0.4178	0.2582	−0.3542	$61.62 \cdot 10^2$
		—	—	0.8173	0.7755	$−31.80 \cdot 10^2$
		—	—	—	0.2652	$10.91 \cdot 10^2$
		—	—	—	—	$−1.86 \cdot 10^2$
	$\ \mathbf{x}(0)\ $	1	1	1	1	$1.54 \cdot 10^4$
$u(0)$ and switching time t_s obtained by method C $(\ \mathbf{x}(t_f)\ < 0.01)$	$u(0)$	−1	+1	−1	−1	−1
	t_s	1.762	0.787	2.126	1.477	0.994
		2.534	2.760	4.773	3.770	1.986
		—	3.529	6.932	5.713	3.000
		—	—	7.753	7.064	4.001
		—	—	—	7.548	5.002
		—	—	—	—	6.000
method and resultant figure	A	Fig. 2 a	Fig. 3 a	Fig. 4 a	—	—
	B	Fig. 2 b	Fig. 3 b	Fig. 4 b	Fig. 5 a	Fig. 6 a
	C	Fig. 2 b	Fig. 3 b	Fig. 4 c	Fig. 5 b	Fig. 6 b

ている。 $\bar{t}_f$, $\bar{N}$ はそれぞれ終端時刻および関数評価回数の平均値であり、乱数を用いて単位球面上に設定した10点の初期状態に対する結果を平均したものである。ただし、方法Bを5次系へ適用した場合、10点中2点の初期状態からは近似解を求める前に計算が打ち切られたので†、5次系に対してはこの2点を除いた8点に対する結果の平均値である。Table 1 より、低次の系 ($n = 2$) においては、各方法に差異は認められない。次元の増加に伴って、関数評価回数は方法C, B, Aの順に少なくなっていることがわかる。方法Aの4次以上の系への適用結果は極度に悪かったので、比較の対象外とした(一例をFig. 4(a)に示す)。方法Cの2次および3次系への適用結果は方法Bと同一である。これは、すべての初期点から J_1 の最大化のみによって収束したためである。4次および5次の系に対して方法Cの関数評価回数は、方法Bより約20%少ない。ただし、5次系に対しては、前記のように方法Bでは収束しない場合が2点あったが、方法Cはすべての初期状態に対して収束した。なお、5次系の8点の初期値に対する方法Bによる最適化において、刻み幅の縮小回数の総計は13回であった。方法Cでは5回であり、5点の初期値に対しては刻み幅を縮小することなく近似解が求められた。

Table 2 は特定の数値例として、初期状態、近似解の

計算値（初期操作量と操作量の切り換え時刻），および収束特性を示す図番を表示したものである。伝達関数 $G(s)$ が $1/s^n$ ($n=2, \dots, 5$) で示される制御対象の初期状態は，前記の例の乱数を用いて設定した 10 点中の 1 点である。 $1/(s+1)^6$ は理論解が既知の場合である。この初期状態は， $u(0) = -1$ で 1 秒ごとに切り換わる操作量を最適制御と設定し，その制御を用いた場合の状態軌道の逆時間解より算定した。収束状況を示したすべての図面において，横軸 N は関数評価回数であるが，スケールは異なっている。縦軸は評価関数 J_2 および J_1 に対応した $\|x(t_m)\|$ および $(t_f - t_m)$ である。ただし t_f としては t_m の最終値を用いている。各方法の収束特性は，巨視的には Table 1 における場合と同様であり，所期のとおり方法 C が最も優れている。方法 A は本質的にグラジエント法であるため，あまり良好な収束特性は望めないが，Fig. 2～Fig. 4 の結果はこれを裏付けている。特に Fig. 4 において，方法 A の 4 次系における収束速度は非常に遅く， $N \approx 24000$ 回において $\|x(t_m)\| \approx 2.9$ および $(t_f - t_m) \approx 0.026$ である。方法 C は $N \approx 430$ で収束しており，方法 B の 1/2 以下である。方法 B によれば，制御偏差 $\|x(t_m)\|$ は N に関して必ずしも単調には減少せず，特に高次系に対する結果 Fig. 4～Fig. 6 にお

(a) Method A

(b) Method B or C

Fig. 3 Results on $G(s) = 1/s^3$

(a) Method A

(b) Method B or C

Fig. 2 Results on $G(s) = 1/s^2$

いては大幅に変動している。これは $J_1 = T(p)$ の最大化のみによって制御偏差に関する終了規準を達成することは困難であることを示唆している。Fig. 6 より，方法 C の関数評価回数は方法 B の約 1/4 であり，Table 2 に示す近似制御の t_s はその理論値 $t_s^* = (1, 2, 3, 4, 5, 6)^T$ にほぼ一致していることがわかる。また，大きな初期状態ノルム $\|x(0)\| \approx 1.5 \times 10^4$ に対して許容誤差基準 $\varepsilon_0 = 0.01$ が達成されており，精度の良い計算が行われていることも明らかである。なお Fig. 6 の例において，方法 B では $N_1 \approx 1,700$ および $N_2 \approx 2,660$ において刻み幅の縮小が行われ， $N_3 \approx 22,630$ において近似解が求められた。方法 C では $N_1 \approx 1,700$ において評価関数が J_2 に変更され， $N_2' \approx 1,890$ において評価関数が J_1 に戻されると共に刻み幅の縮小が行われ，以降 J_1 の最適化によって $N_3' \approx 5,570$ において近似解が求められた。この場合方法 C による改善理由は，2.3.1 で述べたように，評価関数の変更により $J_1(p)$ の尾根状点から脱出できたためであると考えられる。Fig. 7 は方法 B により収束しなかった場合の一例である。初期状態は $x(0) = (-0.5659, 0.5507, 0.3440, 0.1867, 0.4726)^T$ である。図中には (9) 式 ξ のノルム $\|\xi(t_m)\|$ ($t_m < t_f = 9.895$) も示されている。 $\xi(t_m)$ は，上記の初期状態に対する等時

(a) Method A

(a) Method B

(b) Method B

(b) Method C

Fig. 5 Results on $G(s) = 1/s^5$

(c) Method C

(a) Method B

Fig. 4 Results on $G(s) = 1/s^4$

面（制御時間 $t_f = 9.895$ で原点に到達出来る初期状態の集合で、凸超曲面となる）の内点であるが、Fig. 7 より $\|\xi(t_m)\| \approx 200$ が存在することはこの等時面が極度に偏平であることを意味する。Eaton の方法は、 p^* が等時面の点 $x(0)$ における法線ベクトルに符号を付けたものであることを利用しているので¹²⁾、等時面が極度に偏平であれば Eaton の $J_1(p)$ の最大化によって p^* の近似値を求めることは困難となる。このことも方法 B で近似解が得られなかった一因と考えられる。なお、方法 C をこの例へ適用したが、 $N \approx 1780$ までは方法 B と同一であり、この点で評価関数が J_2 に変更され、 $N \approx 1,840$

(b) Method C

Fig. 6 Results on $G(s) = 1/s^6$

Fig. 7 Results on $G(s) = 1/s^5$ by method B (not converged case)

で近似解 $u(0) = -1$, $t_s = (1.639, 4.290, 7.080, 9.140, 9.895)^T$ を得た。

以上を総括すれば、本論文で提案した方法により、さきに 2.1 で指摘した Eaton 法の問題点 (I)~(III) が改善されていること、およびアルゴリズム (ii) によって問題点 (IV) が解消されていることは明らかである。

4. あとがき

典型的な線形系の最短時間制御問題の数値解法として、制御偏差を許容誤差基準以下とする準最適操作量を求める方法を提案した。本方法は Eaton の方法と、本論文で提案した終端値制御問題の解法を併用するものである。また、数値積分において発生する丸め誤差の累積防止法を提案したが、これは操作量が区分的に一定値をとるという問題の特殊性を利用したものである。なお、本方法は間接法であり有限次元空間での最適化を行うので、従来の直接法に比べて計算量および必要とする記憶容量の点でも有利である。

参 考 文 献

- 藤井 (編) : 最近の現代制御理論応用特集号 ; システム/制御/情報, Vol. 34, No. 1, pp. 1~62 (1990)
- E. P. Ryan : On the Sensitivity of a Time-Optimal Switching Function ; IEEE, Trans. Automatic Control, Vol. AC-25, No. 2, pp. 275~277 (1980)
- 西村, 米澤 : 切換超曲面を用いる最短時間フィードバック制御 ; 計測自動制御学会論文集, Vol. 17, No. 3, pp. 323~329 (1981)
- 吉田, 西村, 米澤 : スライディングモードに着目したリレー制御系の設計 ; 計測自動制御学会論文集, Vol. 23, No. 7, pp. 707~711 (1987)
- Y. Sakawa and Y. Shindo : Optimal Control of Container Cranes ; Automatica, Vol. 18, No. 3, pp. 257~266 (1982)
- E. Polak : An Historical Survey of Computational Methods in Optimal Control ; SIAM Review, Vol. 15, No. 2, pp. 553~583 (1973)
- L. S. Lasdon, S. K. Mitter and A. D. Waren : The Conjugate Gradient Method for Optimal Control Problem ; IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-12, No. 2, pp. 132~138 (1967)
- A. V. Balakrishnan : On a New Computing Technique in Optimal Control ; SIAM J. Control, Vol. 6, No. 2, pp. 149~173 (1968)
- D. H. Jacobson : Differential Dynamic Programming Methods for Solving Bang-Bang Control Problems ; IEEE, Trans. Automatic Control, Vol. AC-13, No. 6, pp. 661~675 (1968)
- 市川 : SUMT による最短時間制御問題の数値解法 ; 計測自動制御学会論文集, Vol. 10, No. 2, pp. 174~178 (1974)
- L. W. Neustadt : Synthesizing Time Optimal Control Systems ; J. of Mathe. Anal. and Appl., Vol. 1, pp. 484~493 (1960)
- J. H. Eaton : An Iterative Solution to Time-Optimal Control ; J. of Mathe. Anal. and Appl., Vol. 5, pp. 329~344 (1962)
- H. K. Knudsen : An Iterative Procedure for Computing Time-Optimal Controls ; IEEE, Trans. Automatic Control, Vol. AC-9, No. 1, pp. 23~30 (1964)
- 坂和, 国方 : 最大原理による最適制御問題の数値解法 ; 制御工学, Vol. 10, No. 2, pp. 75~82 (1966)
- R. Fletcher and C. M. Reeves : Function Minimization by Conjugate Gradients ; Computer Journal, Vol. 7, pp. 149~154 (1964)
- ボルチャンスキー (坂本 (訳)) : 最適制御の数学的方法, 総合図書, pp. 152~169 (1968)

付 録

付録 1 Eaton の方法

Eaton の方法は次の 4 ステップで記述することができる。

- (10) 式を満足する p を初期値 p_1 とし, $k=1$ とおく。
- p_k に対して, (14) 式を満足する η を ($= \eta(p_k, T(p_k))$) を求める。このとき $\|\eta(p_k, T(p_k))\|$ が許容値より小さければ終了する。

$$r_i = (p_k + 2^{-i} \eta^U(p_k, T(p_k)))^U \quad (A1)$$

として

$$f(r_i, T(p_k)) > 2^{-(i+1)} \|\eta(p_k, T(p_k))\|^2 \quad (A2)$$

となる最小の正の整数 i を求める。

- $p_{k+1} = r_i$, $k \leftarrow k+1$ として ② へ戻る。

なお, Eaton の論文では (A2) 式右辺は 0 となっているが, ボルチャンスキーによって (A2) 式のように改良されている¹⁶⁾。

付録 2 刻み幅 H の一決定法

初期状態ノルムに対する最終状態ノルムの比 $\|x(t_f)\|/\|x(0)\|$ が極端に小さい場合には, 制御対象の時定数に対応した刻み幅 τ_1 と, u^* に対する終端制御偏差を許容値以下とする刻み幅の概算値 τ_2 との, 小さい方を採用することが考えられる。以下にこれを説明する。まず, 制御対象の時定数の概略値を T_0 として刻み時間 τ_1 を,

$$\tau_1 = \left\lceil \frac{T_0}{10} \right\rceil \quad (\text{A3})$$

とする。ただし、ここでは記号 $[a]$ は a を有効数字1桁で丸めたものを示す。つぎに制御時間の概略値を得るため、刻み時間 τ_1 を用いて $\mathbf{p} = -\mathbf{x}_0^U$ に対して $t_s(\mathbf{p})$ を求める。切り替え時刻の計算誤差 ε_h に対する終端制御偏差 $\|\delta \mathbf{x}\|$ は (23), (25) 式より評価できるが、概略値として $t_i = 0$ または $t_i = t_m$ の大きい方を採用すれば、

$$\|\delta \mathbf{x}\| \approx C \varepsilon_h \quad (\text{A4})$$

ただし、

$$C = \text{Max}\{\|2\Phi(t_m)\mathbf{b}\|, \|\mathbf{A}\mathbf{x}(t_m) + \mathbf{b}u_m\|\} \quad (\text{A5})$$

となる。したがって、 $\|\delta \mathbf{x}\| \leq \varepsilon_0$ を達成するためには $\varepsilon_h < \varepsilon_0/C$ が必要となる。また、切り換え時間の計算誤差 ε_h が刻み時間 τ_2 の $1/\beta$ 以下となるようにプログラムするものとすれば、 $\|\delta \mathbf{x}\| \leq \varepsilon_0$ を達成するため刻み時間の概略値 τ_2 は

$$\tau_2 = \lceil \beta \varepsilon_h \rceil = \left\lceil \frac{\beta \varepsilon_0}{C} \right\rceil \quad (\text{A6})$$

となる。以上より、刻み時間 H の初期値を、

$$H = \text{Min}\{\tau_1, \tau_2\} \quad (\text{A7})$$

とする。