AR モデルの多段当てはめによる定常パワスペクトルの高精度・自動推定*

佐々木 公 男**・加 地 裕二郎***

An Automatic Precise Estimation of Stationary Power Spectra
by Multi-Step Fittings of AR Model*

Kimio SASAKI** and Yuhjiro KAJI***

A practical method of power spectral estimation is proposed, that can automatically provide the precise estimates of stationary random signals.

First, by reviewing the conventional automatic estimation by AR model fitting, the necessity of some means for the order determination under the assured whiteness of residue error series is stressed, even when the whiteness, assumed by most of the criterions such as AIC, is violated by the conventional.

Secondly, based on the fact that the residue series include much information about the original series in the above cases, yet, the automatic precise estimation by multi-step fittings of AR model is presented, that iterates the model fitting until the whiteness of residue series is ascertained.

Finally, the fundamental characteristic and effectiveness of the proposed method are made clear through automatic power spectral estimation of time series, generated numerically for both cases with and without fitting to the AR model.

1. はじめに

定常時系列のパワスペクトルの情報は、単に時系列そのものの解析だけでなく、システムの同定、制御など、種々の目的達成のための基本的で有力な情報として広範な分野で利用されている。

定常パワスペクトルの推定法には、古典的でノンパラメトリックな方法と時系列モデルの当てはめによるパラメトリックな方法とがある。前者に属する B-T 法やペリオドグラム平滑化法などの基本的に等価な方法は、定義に基づき、パワスペクトルそのものを推定するものであるが、原理的にスペクトルの滑らかさ、したがって十分な観測データ長を前提とするものであり、この前提

が満たされない場合には、周波数分解能の低下が問題になる^{1)~3)}。また、実践上の問題点として、ラグ窓のラグ長やスペクトル窓の平滑化帯域幅を決定するうまい手段がなく、先験的情報がない場合には経験と勘に頼らざるを得ない^{2), 3)}。

これに対して、自己回帰 (AR)、自己回帰移動平均 (ARMA) などの線形時系列モデルの当てはめによるパラメトリックな方法には、このような欠点はなく、中でも AR モデルの当てはめは最も基本的であり、アルゴリズムが簡単なうえ、短い観測データからでも高分解能、かつ自動的なパワスペクトル推定ができる^{1)~4)}、などの利点をもつ。しかし、これらの方法は、あくまでもある評価規範のもとで、観測データに最も適合するモデルを当てはめ、モデルのパラメータを最適推定するものであり、必ずしもパワスペクトルを最適に推定するものではない。したがって、モデルが不適切な場合やアルゴリズムによっては、良好な推定ができないことが多い^{1), 5)}。そして、このような場合には、予測残差の白色性は十分ではなく、予測残差にはまだ元の時系列の多くの情報が残されている⁶⁾。それゆえ、適当な評価指標を用いて、予測残差が白色化されるまでモデルの当てはめを繰り返

* 原稿受付 1992. 11. 18

** 筑波大学 構造工学系 Institute of Engineering Mechanics, University of Tsukuba ; Tsukuba-city, Ten-Ohdai 1-1-1, Ibaraki 305, JAPAN

*** トヨタ自動車(株) TOYOTA Motor Co. Ltd. ; Toyota-city, Aichi 471, JAPAN

Key Words : automatic precise estimation of stationary power spectra, AR model fitting, model order estimation, evaluation of whiteness, step-number determination in multi-step fittings.

せば、元の時系列の全情報を活用でき、簡単な手法で定常パワスペクトルの高精度自動推定が可能になると考えられる⁶⁾。

このような施策に通ずる研究として、高次の AR モデルの当てはめの利用による、複素 ARMA モデルのパラメータ推定における Burg アルゴリズムの高精度版を狙った MSBA (多段バークアルゴリズム) がある⁷⁾。しかし、この研究では、マイコンなどのデジタルコンピュータ上で、有限語長の数値計算精度の改善を焦点としていることもあり、一定次数の AR モデルを、あらかじめ設定した回数だけ画一的に当てはめている、あるいは予測残差の白色性の検定がなされていない等、最適自動推定の意味からの検討は何もなされていない。

そこで、本論文では、広範な観測信号に対してそのパワスペクトルを高精度かつ自動的に推定できる、実際的な手法として、AIC 規範を用いた AR モデルの逐次当てはめと、予測残差の白色性の検定を併用する、AR モデルの多段当てはめによる定常パワスペクトル推定法を提案する。また、その有限データ長のもとでの有効性と特徴の明確化には、AIC が漸近論をベースに導出されていることもあり、数値実験によって明らかにする。

以下では、まず従来の AR モデルの当てはめ、AR モデルの多段当てはめの原理を説明し、次に提案手法の有効性を検討するために行った計算機シミュレーションについて具体的に説明し、最後に数値実験結果により提案手法の特徴と有効性を明らかにする。

2. 定常パワスペクトルの高精度自動推定法

観測時系列 $s(n)$ には、それに固有な統計的性質がある。一方、白色雑音は統計的に偏りのない信号である。線形予測法では、この白色雑音 $e(n)$ を入力とする仮想的な線形系 $H(z)$ の出力として、 $s(n)$ の生成過程を次式で記述する。

$$s(n) = -\sum_{k=1}^p a_k s(n-k) + \sum_{l=0}^q b_l e(n-l) \quad (1)$$

これを Z 変換で表わせば次のようになる。

$$S(z) = H(z)E(z) \quad (2a)$$

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (2b)$$

ただし、

$$A(z) \equiv 1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k} \quad (3a)$$

$$B(z) \equiv \sum_{l=0}^q b_l z^{-l} \quad (3b)$$

である。ここで、 $S(z)$ 、 $E(z)$ は、それぞれ $s(n)$ 、 $e(n)$ の Z 変換であり、 $H(z)$ は線形系のパルス伝達関数で

ある。

(1) 式の生成過程は、出力に関して自己回帰的 (auto regressive) で、入力に関して移動平均的 (moving averaged) であることから、自己回帰移動平均 (ARMA) モデルと呼ばれ、特に $b_l = 0$ 、 $l = 1, 2, \dots, q$ のとき、自己回帰 (AR) モデルと呼ばれる。しかしながら、 $A(z)/B(z)$ を改めて $A(z)$ と考えれば、次数 p は高くなるものの、ARMA モデルは AR モデルで十分に近似できる。この意味において、AR モデルは線形時系列モデルの中で最も基本的である。以下、AR モデルに限定して議論を進める。

2.1 AR モデルの当てはめによる推定法

入力時系列の全パワを正規化して 1 とすれば、AR モデルの入出力関係および系のパルス伝達関数は一意に

$$s(n) = -\sum_{k=1}^p a_k s(n-k) + K \cdot e(n) \quad (4a)$$

$$H(z) = \frac{K}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} \quad (4b)$$

と書ける。ここで、入出力を逆転して考えれば、 $\varepsilon(n) \equiv K \cdot e(n)$ は、 $s(n)$ をその p 時点までの過去の値によって線形に 1 段予測したときの予測残差であり、この意味で a_k および p は、それぞれ (線形) 予測係数および予測次数と呼ばれる。

後述のように、予測器としては、できるだけ低い次数で予測残差が白色化されるように決めるのが合理的である。このように予測次数と予測係数を決めれば、その結果として $\varepsilon(n)$ が定まり、そのパワも定まるので、 $s(n)$ の全生成過程が定まることになる。

$\varepsilon(n)$ のパワスペクトルを $\Phi_\varepsilon(f)$ とすると、 $s(n)$ のパワスペクトル $\Phi_s(f)$ は (4) 式より

$$\Phi_s(f) = \frac{\Phi_\varepsilon(f)}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k} \right|_{z=\exp(j2\pi f \Delta t)}} \quad (5)$$

となる。ただし、 Δt は標本化周期である。ここで、 $\varepsilon(n)$ を分散 E_p の白色雑音と見なすことができれば、そのパワスペクトルは

$$\Phi_\varepsilon(f) = E_p \cdot \Delta t, \quad |f| \leq \frac{1}{2\Delta t} \quad (6)$$

と近似されるので、モデルのパワスペクトル $P_s(f)$ は、次式のようになる。

$$P_s(f) = \frac{E_p \cdot \Delta t}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k} \right|_{z=\exp(j2\pi f \Delta t)}} \quad (7)$$

この $P_s(f)$ を似て観測時系列 $s(n)$ のパワスペクトル $\Phi_s(f)$ の推定値とするのが、AR モデルの当てはめによ

るパワスペクトル推定の基本原理である。それゆえ、一度観測時系列が与えられれば、次に述べる予測係数と次数の決定法により、そのパワスペクトルを自動的に推定することができる。

2.1.1 予測係数の決定

予測係数 a_k は、予測残差系列の分散を最小化することにより求めることができる。観測時系列 $s(n)$ を平均値零、自己相関関数 $\phi_s(m)$ をもつ定常時系列とすると、予測残差 $\varepsilon(n)$ の分散 E_p は

$$E_p = E \left[\left\{ s(n) + \sum_{k=1}^p a_k s(n-k) \right\}^2 \right] \quad (8)$$

で与えられる。ここで、 $E[\cdot]$ は集合平均を表わす。これを a_j について最小化すれば、次の Y-W (Yule-Walker) 方程式を得る。

$$\phi_s(j) + \sum_{k=1}^p a_k \phi_s(j-k) = 0, \quad 1 \leq j \leq p \quad (9a)$$

あるいはベクトル、行列を用いて

$$\mathbf{R}\mathbf{a} = -\mathbf{r} \quad (9b)$$

となる。ここで、 $\mathbf{R}$ は (i, j) 要素が $\phi_s(|i-j|)$ である $p \times p$ の共分散行列、 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p)^T$ は予測係数列ベクトル、 $\mathbf{r} = (\phi_s(1), \phi_s(2), \dots, \phi_s(p))^T$ である。

共分散行列 $\mathbf{R}$ は非負定であるので、これが正則である場合には、(9) 式を解けば予測係数 a_k が求まる。実際には、与えられた観測 N 点系列 $\{s(n) | n = 0, 1, \dots, N-1\}$ から、その自己相関関数 $\phi_s(m)$ を次式で推定し、 $\mathbf{R}$ の要素として用いることになる。

$$R_s(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} s(n)s(n+m), \quad 0 \leq m \leq p \quad (10)$$

このようにして求めた予測係数の推定値 $\hat{a}_k$ を用いて、予測残差の分散は次式で推定される。

$$\hat{E}_p = R_s(0) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k R_s(k) \quad (11)$$

2.1.2 予測次数の決定

AR モデルの当てはめにおいて、次数 p の決定は重要な問題である。次数 p の増加と共に、予測残差の分散 $\hat{E}_p$ は単調に減少し、その見本データに関する限り、モデルの当てはめ精度は向上する。しかし、利用可能なデータ数 N は有限であるから、統計的な変動の影響が少なくない。したがって、見本データに対して不必要に当てはめ精度を上げたところで、その母集団の特性を正確に反映するとは限らない。また、次数が低すぎても信号の特性が十分に反映されない。

従来より次数 p の決定法として幾つかの指標が提案さ

れているが⁹⁾、その中でも最も広く利用されているものに AIC 基準がある。AIC 基準は、統計的モデルの適切さの基準としてそのモデルと真の分布の間の Kullback の情報量を取り、その漸近的推定値として導入されたもので、次式で定義される⁹⁾。

$$\text{AIC}(p) = -2 \cdot \ln(\text{最大尤度}) + 2(\text{パラメータ数}) \quad (12a)$$

予測残差系列が白色であるとする、(12a) 式は定数項を除いて次のように表わされる。

$$\text{AIC}(p) = (N-p) \ln(\hat{E}_p) + 2p \quad (12b)$$

この $\text{AIC}(p)$ は、モデルの不適切さを表わす尺度で、この値が小さいほど良いモデルとして選択される。

次数 p_1 と p_2 の二つの AR モデルが同程度に適合しているとすると、その予測残差の分散 $\hat{E}_{p_1}$ 、 $\hat{E}_{p_2}$ は等しくなるから、第 2 項のパラメータ数の少ない方が、AIC 値は小さくなり、良いモデルとして選択される。このことは、同じ当てはめ精度ならば、最もパラメータの少ないモデルが最良であることを意味している。

ところで、Y-W 方程式 (9) 式の共分散行列 $\mathbf{R}$ は、対称 Toeplitz 型であるので、相関関数の推定値 $\{R_s(m) | 0 \leq m \leq L\}$ からこれをモデルの次数方向に漸次的に解く、極めて計算効率の高い Levinson-Durbin のアルゴリズム⁹⁾ が利用できる。したがって、先にも触れたように、AIC 基準とこのアルゴリズムとを併用すれば、自動的かつ高速なパワスペクトル推定が可能である。

しかし、(12b) 式の AIC 基準が有効であるのは、予測残差系列が正規性白色雑音のときであり、観測時系列に AR モデルが適合していない場合には、その白色性の前提が崩れてしまい、推定値の情報理論的最適性の根拠も失われてしまう。このような場合には、その白色性を保証し得る、何らかの手段が必要になる。

2.2 AR モデルの多段当てはめによる推定法

予測残差の白色性が十分でない場合、予測残差には元の時系列の多くの情報が残されている。しかし、そのスペクトルは準白色化逆フィルタリングによって、観測時系列に比べてより平坦化されている。そこで、予測残差に残された情報を B-T 法により抽出し、(5) 式に基づいてパワスペクトルを推定すれば、ラグ窓のラグ長選定の問題も緩和され、高精度な推定が期待できる。この AR モデルの当てはめと B-T 法の併用は、非常に合理的ではあるが、経験的操作を必要とする点で、パワスペクトルの自動推定には不向きである。

そこで、予測残差に再度 AR モデルを当てはめ、以後予測残差が白色化されるまでこれを繰り返せば、AR モデルの当てはめだけで観測時系列に含まれる全情報を十

Fig. 1 Schematic diagram of the automatic precise estimation of stationary power spectra by multi-step fittings of an AR model

分に活用できる。そして各ステップごとに得られる AR モデルのパワースペクトルの合成により観測時系列のパワースペクトルを推定するのが、Fig. 1 にその概念図を示す AR モデルの多段当てはめによるパワースペクトル推定である。

この方法は、AR モデルの当てはめだけを用いるため、自動的なパワースペクトル推定ができ、かつ観測時系列の全情報を極力有効に活用しているため、高精度な推定も期待できる。

2.2.1 予測次数の決定

AR モデルの多段当てはめでは、予測次数とステップ数の決定が重要である。適当に低めの次数を選んで、予測残差が白色になるまで一定の次数でモデルの当てはめを機械的に繰り返す単純な方法も考えられる⁷⁾。しかし、これでは一定の構造の AR モデルだけを考慮することになり、好ましくない。情報理論的により最適なモデルを当てはめる意味で、本論文では各ステップごとに独立に AIC 基準を用いることにした。

2.2.2 繰り返しステップ数の決定

ステップ数の決定には、次の 2 方法を採用した。一つは、第 i 段での最適予測次数が 0 になる場合で、このときにはこれ以上当てはめを繰り返しても AIC 値が減少しないということであるから、 $(i-1)$ 段目でモデルの当てはめの繰り返しを打ち切るものである。

もう一つは、予測残差が白色と判定されたところでモデルの当てはめの繰り返しを打ち切るもので、AR モデルの多段当てはめの当初の目的に適うものである。ただし、予測残差の白色性の検定は次のように行う。

(10) 式より、分散 1 の正規性白色雑音の自己相関関数推定値の標準偏差が

$$\sigma(m) = \left\{ \frac{1}{N} \left(1 - \frac{|m|}{N} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

となることを考慮し、予測残差の自己相関関数推定値の規格値 $\rho(m) \equiv R_e(m)/R_e(0)$ が 95% の信頼区間 $[-1.96\sigma(m), 1.96\sigma(m)]$ に入る割合が、95% 以上であるか否かによってその白色性を検定するものである。ただし、 N は予測残差系列のデータ長であり、各ステップごとに可変である。

以上の 2.2.1, 2.2.2 の予測次数と繰り返しステップ数の決定により、予測残差の白色性の保証のもとに、より最適な AR モデルの当てはめができ、一本の観測見本時系列からその定常パワースペクトルを、簡単な手法で高精度かつ自動的に推定することが可能である。

3. 数値実験および結果

3.1 数値実験方法

提案手法の有効性を客観的に評価するため、計算機を用いた数値実験を行った。

所定のパワースペクトル特性をもつ見本時系列を生成し、そのパワースペクトルを各種の手法で推定すると共に、推定誤差、予測残差の白色性、予測次数などの観点から、従来手法との比較検討を行った。以下、見本時系列の生成、使用統計量の計算法とアルゴリズム、推定誤差の評価法、パワースペクトル推定法の比較の順にその概要を記す。

3.1.1 見本時系列の生成

指定したパワースペクトル特性を有する、独立性の良い見本時系列を得るため、物理的に発生された定常準白色雑音を aliasing 除去用ローパスフィルタに通した後、A/D 変換して計算機に取り込み、それに所定のパワースペクトル特性をもつ数値形成フィルタを掛けて、種々のパワースペクトル特性を有する見本時系列を生成した。このアルゴリズムを Fig. 2 に示す。

標本化周期は $\Delta t = 0.55$ [msec]、量子化ビット数は 12、見本時系列のデータ数は $N = 128 \sim 1024$ で、各推定誤差の評価には 100 本の見本時系列を用いた。準白色雑音の見本波形とペリオドグラムの一例、および 100 本の見本時系列より求めたペリオドグラムの平均を Fig. 3 に示す。0~300 [Hz] の範囲でほぼ白色雑音と見なせることがわかる。

Fig. 2 Algorithm for generating a sample time series for the computer simulation

Fig. 3 Typical sample waveform of a quasi-white noise and its power spectral characteristics

数値形成フィルタには、AR モデルに適合する4次のAR フィルタ型のものと、これに適合しないガウス関数型のものを用いた。いずれも、中心周波数 $F_1 = 70$ [Hz] と $F_2 = 200$ [Hz] で二つのピークをもち、高周波ピークの半値幅を $B_2 = 50$ [Hz] に固定し、低周波ピークの半値幅を $B_1 = 2 \sim 32$ [Hz] と変化させた。そのパワースペクトル特性の一例を Fig. 4 に示す。

3.1.2 使用統計量の計算法とアルゴリズム

AR モデルの当てはめには、Levinson-Durbin のアルゴリズムを用いた。AR モデルの1段当てはめの具体的なアルゴリズムの流れ図を Fig. 5 に示す。

- (1) まず、与えられたデータ長 N に対して、最大次数 $3 \times \sqrt{N}$ までの観測時系列の自己相関関数を推定し、その白色性を検定する。白色と判定された場合には、その分散値よりパワースペクトルを計算して全当てはめを終了する。
- (2) 白色性が否定された場合には、Levinson-Durbin のアルゴリズムを用いて、数学的に予測係数と等価な偏自己相関係数、ならびに予測残差の分散を最大次数まで逐次計算しては AIC 値を求める。
- (3) AIC の最小値よりそのステップでの最適次数が決まると、先に求めた偏自己相関係数よりその次数での最適予測係数を再計算すると共に、そのステップでのモデルのパワースペクトルを計算してそれ以前のパワースペクトルと合成する。
- (4) 当該当てはめ後の予測残差系列を算出して、1段の当てはめを終了する。ただし、最適次数が0の場合には、以後の計算を行わないで全当てはめを終了する。

以下、ステップ数を $L = L+1$ と増しては、(1)~(4) の手順を繰り返す。すなわち、そのステップでの最適予測次数が0になるか、あるいは予測残差が白色と判定されるまで AR モデルの当てはめを繰り返すことにより、観測時系列のパワースペクトルを自動推定するものである。

3.1.3 推定誤差の評価法

推定誤差の評価は、各見本時系列ごとの評価と同じ特性を有する多数の見本時系列によるものとの2種類について検討した。前者については、準白色雑音のパワースペクトルが平坦な $0 \sim 300$ [Hz] の範囲で、数値形成フィルタのパワースペクトル特性を理論値として、推定値の相対誤差を全周波数にわたる RMS 値の形で平均的に求めた。後者については、このように算出した各見本時系列ごとの推定値の相対誤差を、更に100本の見本時系列にわたって平均することにより RMS 値を算出した。

3.1.4 パワースペクトル推定法の比較

提案した AR モデルの多段当てはめの特徴と有効性

Fig. 4 Examples of power spectral characteristics of shaping filters used for numerical experiments, where $F_1 = 70$ (Hz), $F_2 = 200$ (Hz), $B_2 = 50$ (Hz)

Fig. 5 Algorithm for an AR model fitting at each step

を明らかにするためには、まず従来の AR モデルの当てはめと比較する必要がある。その際には、推定精度と

予測残差の白色性の向上とが比較の基準になる。

しかし、多段当てはめの総予測次数は、従来のただ一回の当てはめに比べてずっと高くなるので、単純な比較では十分とは言えない。そこで、AIC 基準を無視して多段当てはめの総次数と等しい予測次数で AR モデルの当てはめを行った場合も併せて比較検討することにした。

3.2 実験結果と考察

3.2.1 多段当てはめと従来の当てはめとの推定結果の比較

AR モデルの多段当てはめと従来の AR モデルの当てはめによるパワスペクトル推定結果の比較の例を、Fig. 6~11 に示す。Fig. 6, 7 および 8~11 は、それぞれ AR モデルに不適な場合と適な場合の例である。これらの図で Fig. 6, 8, 10 の (a) と (b) は、それぞれ見本時系列のペリオドグラムと自己相関関数の推定値であり、統計的変動の影響を受けていることが分かる。

また、Fig. 7, 9, 11 の (a-1) と (b-1), (a-2) と (b-2), (a-3) と (b-3) は、それぞれ最終的に推定されたパワスペクトル、予測残差のペリオドグラム自己相関関数の推定値であり、(a-1)~(a-3) が従来の当てはめ結果で、(b-1)~(b-3) が多段当てはめによるものである。なお、(a-1) と (b-1) では、推定値を実線で、また理論値を破線で示した。

観測時系列が AR モデルに不適合な Fig. 7 の場合、従来の当てはめによるパワースペクトル推定結果 (a-1) では、低周波ピークの周りでモデルの不適合による誤差が非常に大きくなっている。これに対し、(b-1) の多段当てはめ結果では、それが改善され、ピーク形状の推定がより正確になっている。これらに対応して、予測残差のペリオドグラムも、(a-2) ではフィルタの特性がまだ残っているのに対し、多段当てはめによる (b-2) ではほとんど平坦で、パワーもずっと小さくなっている。また、その自己相関関数の推定値も、(a-3) の従来の当てはめでは、まだ主要なスペクトル成分による振動が見られる。それに対し、(b-3) の多段当てはめでは十分に白色化されていることがわかる。

一方、観測時系列が AR モデルに適合する Fig. 9 の場合、(a-1) の従来の当てはめ結果でも、全体的には良好な推定がなされているものの、低周波ならびに高周波領域で推定精度が悪化している。これは、観測データ長だけを長くした場合

の結果 Fig. 11 との比較からわかるように、観測データ長が短く、自己相関関数の推定精度が悪いためである。これに対し、(b-1) の多段当てはめ結果では非常に良い推定がなされており、予測残差も (b-2)、(b-3) より、十分に白色化されていることがわかる。

以上の結果を総合すると、AR モデルの多段当てはめ

Fig. 6 2nd order characteristics of sample data No. 1

(a-1, b-1) Estimated power spectra

(a-2, b-2) Sample periodograms of residue error series

(a-3, b-3) Sample auto-correlation functions of residue error series

(a) Convention fitting (b) Multi-step fitting

Fig. 7 Comparison between power spectral estimations by the multi-step fittings of an AR model and the conventional fitting (No. 1), where a Gaussian type filter of half power bandwidth $B_1 = 8$ (Hz) of the lower peak is used under the data length $N = 256$

は、パワースペクトルの高精度自動推定のための有効な方法であるということかできる。とくに、観測時系列が AR モデルに不適合な場合や、観測データ長が短く自己相関関数の推定精度が悪い場合に、従来の AR モデルの当てはめに比べて推定精度を大幅に向上できるという特長がある。

3.2.2 多段当てはめと 等予測次数下で の1段当てはめ との推定結果の 比較

前項と同じ例について、多段当てはめの総次数と等しい予測次数で1段当てはめを行った結果との比較を Fig. 12～15 に示す。

観測時系列が AR モデルに不適合な Fig. 13 の場合、(a-1) の推定パワスペクトルの低周波ピークの周りでの推定精度が、Fig. 7 に示した従来の当てはめ結果と比べて多少向上し、(a-3) のように予測残差のパワレベルも全体的には下がっているものの、(a-2) に見られるように予測残差には、やはり形成フィルタの特性が顕著に残っている。

一方、観測時系列が AR モデルに適合する Fig. 15 の場合、Fig. 9 の従来の当てはめ結果に比べて予測次数を高くしたので、(a-2) のように予測残差スペクトルの平坦化傾向が多少促進されてはいるものの、(a-1) の推定パワスペクトルには、逆に標本変動の影響が相当現れている。

以上の結果から、1段で高い次数の当てはめを行うと予測残差の白色化は促進されるが、推定パワスペクトルは標本変動の影響を直接的に受け易くなり、良好な推定が期待できないことがわかる。このことは AIC 基準の情報理論的根拠の妥当性を示す結果とも考えられる。それゆえ、実質的に等しい予測次数であっても、1段で高い次数の当てはめを行うよりも、多段に分けて当てはめの方が良い結果が期待できると結論される。

Fig. 8 2nd order characteristics of sample data No. 2

(a-1, b-1) Estimated power spectra

(a-2, b-2) Sample periodograms of residue error series

(a-3, b-3) Sample auto-correlation functions of residue error series

(a) Conventional fitting

(b) Multi-step fitting

Fig. 9 Comparison between power spectral estimations by the multi-step fittings of an AR model and the conventional fitting (No. 2), where an AR type filter of $B_1 = 4$ (Hz) is used under the data length $N = 256$

3.2.3 推定誤差による各種推定法の比較

3.2.2 で示した 3 種類の各手法について、100 本の見本時系列から推定誤差を評価し、低周波ピークの半値幅 B_1 に対してプロットした結果を Fig. 16, 17 に示す。Fig. 16, 17 は、それぞれ観測時系列に AR モデルが不適合な場合と適合する場合の結果である。これらの図で、○、△と●、☆印は、それぞれ従来の当てはめ、2 ステップと 3 ステップの多段当てはめ、および等予測次数での 1

段当てはめ結果を示す。

AR モデルに不適合な Fig. 16 の場合、すべてのデータ長 N で、多段当てはめの方が従来の当てはめと比べて誤差が小さく、特にデータ長が短く、 B_1 が狭いほどその傾向が強く、当該領域での多段当てはめの有効性が明確にわかる。等予測次数での従来の当てはめでは、 B_1 が狭い領域での推定精度は従来の当てはめとほぼ同程度で、多段当てはめに比べるべくもないが、 B_1 と共に推定精度が向上し、 $B_1 \geq 16$ [Hz] では多段当てはめと同等以上の推定精度にある。これは、スペクトルの平坦化と共に信号の相関長が短縮し、実効データ長の増加により相関関数の推定精度が向上したため、一度でも高い次数の当てはめができたものと考えられる。

一方、AR モデルに適合する Fig. 17 の場合、 B_1 の狭い所では多段当てはめの方が、逆に広い所では従来の当てはめの方が誤差が小さい。また、等次数での1段当てはめでは、 B_1 の狭いごく一部のところで従来の当てはめと同程度である点を

除き、誤差が大きい。これは、信号が AR モデルに適合し、かつその相関長に対して実効データ長が十分な場合には従来の当てはめでも高精度な推定ができるが、不十分な場合には単に予測次数を上げても見本時系列の統計的変動の影響が大きく、良好な推定が期待できない。しかし、多段当てはめでは常に高精度な推定ができることを意味している。

Fig. 10 2nd order characteristics of sample data No. 3

(a-1, b-1) Estimated power spectra

(a-2, b-2) Sample periodograms of residue error series

(a-3, b-3) Sample auto-correlation functions of residue error series

(a) Conventional fitting

(b) Multi-step fitting

Fig. 11 Comparison between spectral estimations by the multi-step fittings of an AR model and the conventional fitting (No. 3), where the same AR filter as in Fig. 9 is used except under the long data length $N = 1024$

4. おわりに

定常信号の一見本時系列からそのパワースペクトルを自動的にかつ高精度に推定できる実際的な手法として、AR モデルの多段当てはめを提案し、その特徴と有効性を明らかにするために、AR モデルに適合する場合とそうでない場合についてパワースペクトル特性が既知の定常時系列を生成し、従来手法を含む種々のパワースペクトル推定

実験により、以下の主要な結果を得た。

- (1) 観測時系列の生成構造が AR モデルに適合し、かつその実効相関長に対して、観測データ長が十分に長く自己相関関数の推定精度が良好な場合には、従来の当てはめでも良好な推定ができる。

- (2) これらの条件のいずれかが満たされない場合には、従来の当てはめでは良好な推定が期待できない。しかし、このような場合でも AR モデルの多段当てはめによれば良好な推定ができる。また、この特長は、観測時系列が AR モデルに不適合で、実効観測データ長が短いときに、特に顕著である。

- (3) 観測時系列が AR モデルに不適合で、かつ実効観測データ長が十分な場合には、AIC 基準を無視し、高い予測次数で 1 段の当てはめを行った方が良好な推定が期待

できる。その際、予測残差の白色性が予測次数決定の有力な指標となり得る。しかし、観測時系列が AR モデルに適合する場合には、一度で高い予測次数の当てはめを行うと、見本時系列の標本変動の影響を直接的に受けるので注意する必要がある。

以上のように、AR モデルの多段当てはめによれば、

Fig. 12 2nd order characteristics of sample data No. 4

(a-1, b-1) Estimated power spectra

(a-2, b-2) Sample periodograms of residue error series

(a-3, b-3) Sample auto-correlation functions of residue error series

(a) Conventional fitting with equi-prediction order

(b) Multi-step fitting

Fig. 13 Comparison between power spectral estimations by the multi-step fittings of an AR model and the single step fitting with equi-prediction order (No. 4), where the other conditions except the prediction order are the same as those in Fig. 7

簡単な手法で予測残差の白色性の保証のもとに定常パワースペクトルの高精度自動推定ができるので、種々の分野における情報抽出への応用が期待される。

Fig. 14 2nd order characteristics of sample data No. 5

(a) Conventional fitting with equi-prediction order

(b) Multi-step fitting

Fig. 15 Comparison between power spectral estimations by the multi-step fittings of an AR model and the single step fitting with equi-prediction order (No. 5), where the other conditions except the prediction order are the same as those in Fig. 9

参考文献

- 1) S. M. Kay and S. L. Marple : Spectral Analysis-A Modern Perspective ; Proc. IEEE, Vol. 69, No. 11, pp. 1380~1419 (1981)
- 2) 佐々木 : パワースペクトル推定における平滑化帯域幅の自動決定法 ; システム制御情報学会論文誌, Vol. 2, No. 3, pp. 97~107 (1989)
- 3) 磯部 (編) : 相関関数およびスペクトル—その測定と応用, 東京大学出版会 (1968)
- 4) H. Akaike : Power Spectral Estimation Through Auto-Regressive Model Fitting ; Ann. Inst. Statist. Math., Vol. 21, No. 3, pp. 407~419 (1969)
- 5) 川嶋, 酒井 : 現代スペクトル解析, 森北出版 (1989)
- 6) 佐々木, 加地 : AR デルの多段当てはめによる定常パワースペクトルの高精度自動推定の一試み ; 第24回確率システムシンポジウム講演論文集, システム制御情報学会, B2, pp. 117~122 (1992)
- 7) 島村, 高橋, 眞野 : 正周波数を推定域とする複素係数ARMA パラメータ推定 ; 計測自動制御学会論文集, Vol.

Fig. 16 Comparison of power spectral estimation methods from the viewpoint of estimation error (No. 1), where shaping filters of Gaussian type are used, under $B_1 = 2 \sim 32$ (Hz)

Multi steps : ○—○—step 1, △—△—step 2, ●—●—step 3
Single steps : ☆—☆—

Fig. 17 Comparison of power spectral estimation methods from the viewpoint of estimation error (No. 2), where shaping filters of AR type are used, where $B_1 = 2 \sim 32$ (Hz)

Multi steps : ○—○—step 1, △—△—step 2, ●—●—step 3
Single step : ☆—☆—

26, No. 10, pp. 1155~1162 (1990)

- 8) 野村, 川嶋: 次数決定規範の比較; 第18回確率システムシンポジウム講演論文集; 日本自動制御協会, P.S. 4, pp. 171~174 (1986)
- 9) H. Akaike: A New Look at the Statistical Model Identification; IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-19, No. 6, pp. 716~723 (1974)