エレベータシステムの待ち行列理論による モデル化と性能評価*

畑 中 隆**・滝 根 哲 哉***・高 橋 豊***・長谷川 利 治***

Modeling and Performance Evaluation of an Elevator System Using Queueing Theory*

Takashi HATANAKA**, Tetsuya TAKINE***, Yutaka TAKAHASHI***
and Toshiharu HASEGAWA***

In this paper, we investigate the stochastic behavior of an elevator system from mathematical point of view. We formulate it as a queueing model and analyse its performance to derive the p.g.f. (probability generating function) of the queue length and to obtain the mean queue length. Based on the analytical results, we calculate the above performance measures under various types of scenarios and find that the mean queue length at each floor depends on its relative position to other floors as well as the arrival rate to the floor and the attainable speed of the elevator.

1. 序 論

近年, 建築物の高層化が進むにつれ, より高度なエレベータ制御が必要となってきた. エレベータを設計する際に, 次のような事項に注意する必要がある.

(1) 乗客の感覚³⁾

乗客は加速や減速をされると不快感を覚える. これには個人差はあるが, 経験的に 1.5 m/s^2 が限界であることが分かっている. また, 不快感は速度の大小にはあまり影響されないが, 加速度の変化の割合である jerk の大小は不快感を大きく左右し, 2.0 m/s^3 が限界であると分かっている. さらに, 乗客は待ち時間が長いと我慢できなくなる. これは非常に複雑であるが, 一般にオフィスビルでは 30 秒, 住居用の建築物では 60 秒が限界であり, また 90 秒以上エレベータに乗っていることに耐えられないといわれている.

(2) トラフィックパターン³⁾

エレベータ・システムの設計に際しては, エレベータが異なるタイプのトラフィックに対応できるように注意

する必要がある. たとえば, 出社時刻, 休憩時刻, 退社時刻等の利用頻度の高い時間帯がはっきりしているオフィスビルでは, 次のようなトラフィックがある.

(a) Up-peak traffic

乗客のすべて, あるいは大部分が建物のメイン・ターミナルでエレベータ・システムに入り, 主要なトラフィックの流れが上方向である時に, up-peak traffic 状態と呼ばれる. 朝の出社時に典型的に見られ, また昼休みの終わりに少し見られる.

(b) Down-peak traffic

乗客のすべて, あるいは大部分が建物のメイン・ターミナルでエレベータ・システムを離れ, 主要なトラフィックの流れが下方向である時に, down-peak traffic 状態と呼ばれる. 退社時に顕著であり, 昼休みの初めにも少し見られる. また, 一般的には朝の出社時の時よりも, 50% 以上激しいものであるとされている.

(c) Two way traffic

メイン・ターミナル以外のある階に, 乗降客の主要な流れがある時に, two way traffic 状態と呼ばれる.

(d) Four way traffic

異なるある二つの階に乗降客が集中する時に, four way traffic 状態と呼ばれる.

(e) Interfloor traffic

呼び(ある階で客がエレベータを呼ぶのを乗り場呼び, エレベータの中から乗客が降りる階を指定するのをかご

* 原稿受付 1992. 10. 27.

** ゴールドマン・サックス証券(株) Goldman Sacks (Japan) Corp.; 1-12-32, Minato-ku Akasaka, Tokyo 107, JAPAN

*** 京都大学 工学部 Kyoto University; Hom-machi, Yoshida, Sakyo-ku, Kyoto 606, JAPAN

Key Words: elevator, queueing model, polling system, busy period, performance evaluation.

呼びという)に統計的に顕著な特性が見られない時に、ランダムな interfloor traffic があるといわれる。

本稿においては、up-peak traffic 状態と down-peak traffic 状態にあるエレベータ・システムを、待ち行列理論を用いてモデル化し、性能を評価する。すでに平沢¹⁾は、エレベータ・システムの性能評価を待ち行列理論を用いて考察しているが、客数に関する各階の間の確率的従属性を考慮しておらず、また多くの近似が含まれている。

以下ではエレベータ・システムを数学的にモデル化し、それを近似ではなく厳密に解くことに主眼がある。モデル化に当たっては、解析上の数学的厳密さを保ちながら一般のエレベータ・システムが有する重要な要因を可能な限り取り込んだが、数学的制約のため無視した要因あるいは単純化した要因もある。従って本稿に示す解析結果を、直ちに現在運用されている最新のシステムあるいは計画中のシステムに適用するには無理がある。しかしこれらシステムをシミュレーションにより評価する場合には、シミュレーションモデルおよびその実行結果の検証を、本解析で得られる数値結果と比較することにより、高い信頼性のもとに行うことができる。このことは設計段階において実際の運用データがない場合には特に有効であると思われる。さらには一般のエレベータ・システムを対象とした近似手法を開発したときの精度の検証にも使用可能である。

エレベータの性能を評価するものとして、平均待ち時間、平均待ち行列長等がある。ここで待ち時間は次の三つの時間から構成されていると考えられる。

- エレベータの移動時間
- ドアの開閉時間
- 客の乗降時間

2. モデル化

本研究で取り上げるエレベータは、1階で乗せた客を2階から順に降ろして上がってゆき、最上階に着くと残りの客全員を降ろす。さらに、最上階から順に客を乗せて下ってゆき、1階に着くと全員を降ろすものとする (Fig. 1)。つまり、上へ向かう客は1階だけに到着し、下に向かう客は全員1階で降りる場合を考察する。

簡単のため、客の積み残しやドアの開閉時間は無く、エレベータは1階と最上階以外では方向を変えないものとする。さらに、ある階からある階までのエレベータの移動時間は、途中の階に止まっても止まらなくても停止時間を除くと等しいものとする。(つまり、1階から2階までの移動時間を r_1 、2階から3階までの移動時間を r_2 とすると、1階から3階までの移動時間は、2階に b 時

Fig. 1 Model

間停止した場合は $r_1 + r_2 + b$ かかり、停止しなかった場合は $r_1 + r_2$ かかる。)

このときエレベータをサーバに、客の乗降時間をサービス時間に対応づけると、このモデルはポーリングモデルであると考えられる。ここで注意すべき点は、エレベータに乗った客は必ずどこかの階で降りるので、一人の客につき2回サービスをすることである。つまり、1階で乗った客が i 階で降りる確率を α_i とすると、上り側の1階でサービスされた客はもう一度確率 α_i で i 階でのサービスを待ち、下り側の i 階でサービスされた客はもう一度1階でのサービスを待つという事である。

3. 解析

このエレベータシステムをポーリングシステムとみなし、各階へのエレベータの到達時点を隠れマルコフ点として着目し、システムの振舞いを調べる。

3.1 母関数方程式の導出

上へ向かう客は1階だけにパラメータ λ_1 のポアソン到着をするものとする。また、下へ向かう客は i 階にパラメータ λ_i ($i = 2, \dots, N$) のポアソン到着をし、全員1階で降りるものとする。

確率分布関数 $F(x)$ のラプラス・スチルチェス変換 (以下 L.S.T. と呼ぶ) を

$$F^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x)$$

とし、以下の記号を定義する。

N : 建築物の最上階の階数。

$B(x)$: 一人の客が1回エレベータに乗る、あるいはエレベータから降りるのに要するサービス時間の確率分布関数。

$B^*(s)$: $B(x)$ の L.S.T.

$b, b^{(2)}$: サービス時間の平均と2次モーメント。

$R_i(x)$: i 階と $(i+1)$ 階との間の移動時間の確率分布関数。

$R_i^*(s)$: $R_i(x)$ の L.S.T.

$r_i, r_i^{(2)}$: i 階と $i+1$ 階との間のエレベータの移動時間の平均と2次モーメント。

$$r_T = \sum_{i=1}^{N-1} r_i$$

α_i : 1階で乗った客が*i*階で降りる確率.

$$\rho_i = \lambda_i \cdot b$$

$$\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i$$

$L_1^{(u)}(t)$: 時刻 *t* に1階で上りエレベータを待っている客数.

$L_i^{(u)}(t) (i \neq 1)$: 時刻 *t* において目的地が *i* 階である上りエレベータ内の客数.

$L_1^{(d)}(t)$: 時刻 *t* において目的地が1階である下りエレベータ内の客数.

$L_i^{(d)}(t) (i \neq 1)$: 時刻 *t* に *i* 階で下りエレベータを待っている客数.

$\tau_i^{(u)}(m)$: 上りエレベータの *i* 階への *m* 回目の到着時刻.

$\tau_i^{(d)}(m)$: 下りエレベータの *i* 階への *m* 回目の到着時刻.

$U_i[z, \omega]$: 上りエレベータの *i* 階への到着時点での待ち客数の結合 p.g.f. (確率母関数).

$D_i[z, \omega]$: 下りエレベータの *i* 階への到着時点での待ち客数の結合 p.g.f..

$$z = (z_1, \dots, z_N)$$

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$$

$$U_i[z, \omega]$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_N=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_N=0}^{\infty} \text{Prob}[L_1^{(u)}(\tau_i^{(u)}(m)) = n_1, \dots, L_N^{(u)}(\tau_i^{(u)}(m)) = n_N, L_1^{(d)}(\tau_i^{(u)}(m)) = m_1, \dots, L_N^{(d)}(\tau_i^{(u)}(m)) = m_N] z_1^{n_1} \dots z_N^{n_N} \omega_1^{m_1} \dots \omega_N^{m_N}$$

$$D_i[z, \omega]$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_N=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_N=0}^{\infty} \text{Prob}[L_1^{(d)}(\tau_i^{(d)}(m)) = n_1, \dots, L_N^{(d)}(\tau_i^{(d)}(m)) = n_N, L_1^{(u)}(\tau_i^{(d)}(m)) = m_1, \dots, L_N^{(u)}(\tau_i^{(d)}(m)) = m_N] z_1^{n_1} \dots z_N^{n_N} \omega_1^{m_1} \dots \omega_N^{m_N}$$

つぎに, *i* 階における全稼働期間(*i* 階の待ち行列に一人の乗客がいるときにエレベータが到着した時点から始まり, その乗客, さらには停止中に到着する新たな乗客の全てが乗り終え, エレベータが離床するまでの時間)の長さ θ , その間にサービスされる客数 *l* の結合母関数を次式で定義する.

$$\Theta_i(s, z) = E[e^{-s\theta} z^l]$$

この母関数を

x : 一人の客の1回のサービスに要する時間.

k : 一人目のサービス中に来る客数.

θ_i : 一人目のサービス中, *i* 番目に到着した客が作る全稼働期間.

l_i : θ_i の間にサービスされる客数.

により条件付けると次式が得られる.

$$\begin{aligned} E[e^{-s\theta} z^l | x, k] &= E[e^{-s(x+\theta_1+\dots+\theta_k)} z^{l+l_1+\dots+l_k} | x, k] \\ &= e^{-sx} z E[e^{-s\theta_1} z^{l_1}] \dots E[e^{-s\theta_k} z^{l_k}] \\ &= e^{-sx} z \Theta_i(s, z)^k \end{aligned}$$

パラメータ λ_i のポアソン到着をする場合には

$$\begin{aligned} \Theta_i(s, z) &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty E[e^{-s\theta} z^l | x, k] e^{-\lambda_i x} \frac{(\lambda_i x)^k}{k!} dB(x) \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty e^{-sx} z \Theta_i(s, z)^k e^{-\lambda_i x} \frac{(\lambda_i x)^k}{k!} dB(x) \\ &= z \int_0^\infty e^{s+\lambda_i-\lambda_i \Theta_i(s, z)} dB(x) \\ &= z B^*[s+\lambda_i-\lambda_i \Theta_i(s, z)] \end{aligned}$$

と導ける. さらに, 長さの分布が $F^*(s)$ である時間区間にパラメータ λ でポアソン到着する客数の p.g.f. は, $F^*(\lambda-\lambda z)$ と表わせることを用いると, 次のような母関数方程式が得られる.

$$U_2[z, \omega]$$

$$= U_1 \left[\Theta_1 \left[\sum_{j=2}^N (\lambda_j - \lambda_j \omega_j), \sum_{k=2}^N \alpha_k z_k \right], z_2, \dots, z_N, \omega \right] \cdot R_1^* \left[\lambda_1 - \lambda_1 z_1 + \sum_{j=2}^N (\lambda_j - \lambda_j \omega_j) \right] \quad (1)$$

$$U_{i+1}[z, \omega]$$

$$= U_i \left[z_1, \dots, z_{i-1}, B^* \left[\lambda_1 - \lambda_1 z_1 + \sum_{j=2}^N (\lambda_j - \lambda_j \omega_j) \right], z_{i+1}, \dots, z_N, \omega \right] \cdot R_i^* \left[\lambda_i - \lambda_i z_i + \sum_{j=2}^N (\lambda_j - \lambda_j \omega_j) \right] \quad (i=2, \dots, N-1) \quad (2)$$

$$D_N[z, \omega]$$

$$= U_N \left[z_1, \dots, z_{N-1}, B^* \left[\lambda_1 - \lambda_1 z_1 + \sum_{j=2}^N (\lambda_j - \lambda_j \omega_j) \right], \omega \right] \quad (3)$$

$$D_i[z, \omega]$$

$$\begin{aligned} &= D_{i+1} \left[z, \omega_1, \dots, \omega_i, \Theta_{i+1} \left[\lambda_1 - \lambda_1 z_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=2, j \neq i+1}^N (\lambda_j - \lambda_j \omega_j), \omega_1 \right], \omega_{i+2}, \dots, \omega_N \right] \\ &\quad \cdot R_i^* \left[\lambda_i - \lambda_i z_i + \sum_{j=2}^N (\lambda_j - \lambda_j \omega_j) \right] \quad (i=1, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (4)$$

$U_1[z, \omega]$

$$= D_1 \left[z, B^* \left[\lambda_1 - \lambda_1 z_1 + \sum_{j=2}^N (\lambda_j - \lambda_j \omega_j) \right], \omega_2, \dots, \omega_N \right] \quad (5)$$

3.2 平均待ち行列長の導出

(1)～(5) 式を用いて、エレベータが到着した時点における各階の平均待ち行列長、および任意時点における各階の平均待ち行列長を導出する。

3.2.1 エレベータ到着時点の平均待ち行列長

エレベータ到着時点の平均待ち行列長を求めるには、前述の母関数を 1 階偏微分して変数に 1 を代入すればよい。

まず、以下の式を定義する。

$$\begin{aligned} u_i(j; *) &= \frac{\partial}{\partial z_j} U_i |_{z=\omega=1} \\ u_i(*; j) &= \frac{\partial}{\partial \omega_j} U_i |_{z=\omega=1} \\ u_i(j, k; *) &= \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial z_k} U_i |_{z=\omega=1} \\ u_i(*; j, k) &= \frac{\partial^2}{\partial \omega_j \partial \omega_k} U_i |_{z=\omega=1} \\ u_i(j; k) &= \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \omega_k} U_i |_{z=\omega=1} \\ d_i(j; *) &= \frac{\partial}{\partial z_j} D_i |_{z=\omega=1} \\ d_i(*; j) &= \frac{\partial}{\partial \omega_j} D_i |_{z=\omega=1} \\ d_i(j, k; *) &= \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial z_k} D_i |_{z=\omega=1} \\ d_i(*; j, k) &= \frac{\partial^2}{\partial \omega_j \partial \omega_k} D_i |_{z=\omega=1} \\ d_i(j; k) &= \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \omega_k} D_i |_{z=\omega=1} \\ \theta_i^{(1,0)} &= - \frac{\partial \theta_i}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{b}{1-\rho_i} \\ \theta_i^{(0,1)} &= \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{1}{1-\rho_i} \\ \theta_i^{(1,1)} &= - \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial s \partial z} \Big|_{s=0, z=1} = \frac{b(1-\rho_i) + \lambda_i b^{(2)}}{(1-\rho_i)^3} \\ \theta_i^{(2,0)} &= \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial s^2} \Big|_{s=0} = \frac{b^{(2)}}{(1-\rho_i)^3} \\ \theta_i^{(0,2)} &= \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial z^2} \Big|_{z=1} + \theta_i^{(0,1)} = \frac{1-\rho_i^2 + \lambda_i^2 b^{(2)}}{(1-\rho_i)^3} \end{aligned}$$

ここで、例えば $u_1(1; *)$ は 1 階において客が乗り始める時点におけるその階の平均待ち行列長を、 $d_i(*; i)$ ($i = 2, \dots, N$) は下りエレベータが i 階に到着した時点

のその階の平均待ち行列長を表わしている。さらに、 $u_i(i; *)$ ($i = 2, \dots, N$) は上りエレベータが i 階に到着した時点にその階に降りようとしている平均乗客数を、 $d_1(*; 1)$ はエレベータが 1 階に到着した時点にその階に降りようとしている平均乗客数を表わしている。

(1)～(5) 式を 1 階偏微分して得られた式より、次のような解が得られる（詳細は付録 A を参照）。

$$\begin{aligned} u_1(1; *) &= \frac{2r_T \lambda_1 (1-\rho_1)}{1-2\rho} \\ u_1(j; *) &= 0 \quad (j \neq 1) \\ u_1(*; 1) &= 0 \\ u_1(*; j) &= \lambda_j \left(\sum_{k=1}^{j-1} r_k + \frac{2r_T \left(\rho - \rho_1 + \sum_{k=2}^{j-1} \rho_k \right)}{1-2\rho} \right) \quad (j \neq 1) \\ u_2(1; *) &= r_1 \lambda_1 \\ u_2(j; *) &= \frac{2r_T \lambda_1 \alpha_j}{1-2\rho} \quad (j \neq 1) \\ u_2(*; 1) &= 0 \\ u_2(*; j) &= \lambda_j \left(r_1 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k + \frac{2r_T \left(\rho + \sum_{k=2}^{j-1} \rho_k \right)}{1-2\rho} \right) \quad (j \neq 1) \\ u_{i+1}(1; *) &= \lambda_1 \left(\sum_{k=1}^i r_k + \frac{2r_T \sum_{k=2}^i \rho_1 \alpha_k}{1-2\rho} \right) \quad (i = 2, \dots, N-1) \\ u_{i+1}(j; *) &= 0 \quad (i = 2, \dots, N-1, j = 2, \dots, i) \\ u_{i+1}(j; *) &= \frac{2r_T \lambda_1 \alpha_j}{1-2\rho} \quad (i = 2, \dots, N-1, j = i+1, \dots, N) \\ u_{i+1}(*; 1) &= 0 \quad (i = 2, \dots, N-1) \\ u_{i+1}(*; j) &= \lambda_j \left(\sum_{k=1}^i r_k + \sum_{k=1}^{j-1} r_k + \frac{2r_T \left(\rho + \sum_{k=2}^{j-1} \rho_k + \sum_{k=2}^i \rho_1 \alpha_k \right)}{1-2\rho} \right) \quad (i = 2, \dots, N-1, j \neq 1) \\ d_i(1; *) &= \lambda_1 \left(r_T + \sum_{k=i}^{N-1} r_k + \frac{2r_T \left(\rho_1 + \sum_{k=i+1}^N \rho_k \right)}{1-2\rho} \right) \quad (i = 1, \dots, N-1) \\ d_i(j; *) &= 0 \quad (i = 1, \dots, N-1, j \neq 1) \\ d_i(*; 1) &= \sum_{k=i+1}^N \frac{2r_T \lambda_k}{1-2\rho} \quad (i = 1, \dots, N-1) \\ d_i(*; i+1) &= r_i \lambda_{i+1} \quad (i = 1, \dots, N-1) \end{aligned}$$

$$d_i(*; j) = \lambda_j \left(r_T + \sum_{k=1}^{j-1} r_k + \sum_{k=i}^{N-1} r_k + \frac{2r_T \left(\rho + \sum_{k=1}^{j-1} \rho_k + \sum_{k=i+1}^N \rho_k \right)}{1-2\rho} \right) \\ (i=1, \dots, N-1, j=2, \dots, i)$$

$$d_i(*; j) = \lambda_j \left(\sum_{k=i}^{j-1} r_k + \frac{2r_T \sum_{k=i+1}^N \rho_k}{1-2\rho} \right) \\ (i=1, \dots, N-1, j=i+2, \dots, N)$$

$$d_N(1; *) = \lambda_1 \left(\sum_{k=1}^{N-1} r_k + \frac{2r_T \rho_1}{1-2\rho} \right)$$

$$d_N(j; *) = 0 \quad (j=2, \dots, N)$$

$$d_N(*; 1) = 0$$

$$d_N(*; j) = \lambda_j \left(r_T + \sum_{k=1}^{j-1} r_k + \frac{2r_T \left(\rho + \sum_{k=1}^{j-1} \rho_k \right)}{1-2\rho} \right) \\ (j=2, \dots, N)$$

3.2.2 任意時点の平均待ち行列長

1階での上り方向の客、および*i*階 (*i* = 2, ..., *N*) での下り方向の客の任意時点における平均待ち行列長 $E(L_i)$ (*i* = 1, ..., *N*) は、平均空走1周時間が $2r_T$ 、また利用率が 2ρ であることに注意して、参考文献2) より

$$E(L_1) = \rho_1 + \frac{\lambda_1^2 b^{(2)}}{2(1-\rho_1)} + \frac{(1-2\rho)u_1(1, 1; *)}{2\lambda_1(1-\rho_1)2r_T}$$

$$E(L_i) = \rho_i + \frac{\lambda_i^2 b^{(2)}}{2(1-\rho_i)} + \frac{(1-2\rho)d_i(*; i, i)}{2\lambda_i(1-\rho_i)2r_T} \\ (i=2, \dots, N)$$

と導けるが、 $u_1(1, 1; *)$ と $d_i(*; i, i)$ は付録Bの連立方程式より求められる。

4. 数値結果とその考察

各階の客の平均待ち行列長に関する解析結果を以下の場合に具体的に適用し、平均待ち行列長の変化を図に示す。以下の例では建築物の最上階の階数 *N* を4、サービス時間は一定分布に従うものとし、参考文献3) より $b = 0.6$, $b^{(2)} = 0.36$ とした。さらにエレベータの*i*階と*i*+1階との間の移動時間は一定分布に従うものとして計算を行った。

4.1 客の到着率が変化する場合

1階でエレベータに乗った客が*i*階 (*i* = 2, 3, 4) で降りる確率 α_i はすべて等しく $1/3$ であるとした。このため下りエレベータに乗る客の到着率 λ_i (*i* = 2, 3, 4) を $\lambda_1/3$ とした。またエレベータの各階の間の移動時間はすべて等しく $r_i = 4.0$ (*i* = 1, 2, 3) とした。このとき1

階への客の到着率 λ_1 に対する各階での平均待ち行列長の変化を図に示した。ただし、利用率 2ρ が $2.4\lambda_1$ であることに注意して、 λ_1 を0から0.4まで変化させた。

Fig. 2 (a) は縦軸を任意時点の平均待ち行列長、横軸を1階への客の到着率 λ_1 にとり各階について示した。これより1階での待ち行列長が一番大きく、次に2階、3階、4階の順になっており、またそれらは到着率の増加にともなって増加し、 λ_1 が0.4付近になると急激に増大していることが分かる。

到着率が同じである2階、3階、4階での平均待ち行列長が違うのは、1階での待ち行列長が大きいのでその影響であると考えられる。つまり客が下りエレベータに乗ろうとして*i*階 (*i* = 2, 3, 4) に到着したとき、エレベータが1階で停止している確率が大きくなるために、そこから一番遠い下り方向の2階での待ち行列長が一番大きくなり、次に3階、4階の順になるものと考えられる。

Fig. 2 (b) は縦軸をエレベータの到着時点の平均待ち行列長、横軸を1階への客の到着率にとり各階について示した。これより Fig. 2 (a) と似た曲線であるが、全体的に待ち行列長が大きいことが分かる。また2階と3階、4階での平均待ち行列長が同じである点も Fig. 2 (a) とは異なる点である。

このエレベータの到着時点の平均待ち行列長は、エレ

(a) Arbitrary epoch

(b) Arrival epoch

Fig. 2 Mean queue length vs. arrival rate

ベータの容量を決定するのに利用できる。

4.2 エレベータの移動時間が変化する場合

4.2.1 エレベータの各階の間の移動時間が等しく変化する場合

1階への客の到着率 λ_1 が0.35であり、またエレベータの各階の間の移動時間 r_i ($i=1, 2, 3$) はすべて等しいとして、 r_i に対する平均待ち行列長の変化を図に示した。

Fig. 3 (a) は縦軸を任意時点の客の平均待ち行列長、横軸をエレベータの各階の間の移動時間にとり、各階について示した。ここでは1階でエレベータに乗った客が i 階 ($i=2, 3, 4$) で降りる確率 α_i はすべて等しく $1/3$ であるとした。このため下りエレベータに乗る客の到着率 λ_i ($i=2, 3, 4$) を $\lambda_1/3$ とした。

これよりこの例ではエレベータの移動時間と平均待ち行列長とはほぼ比例していると考えられる。さらに1階での待ち行列長が一番大きく、次に2階、3階、4階の順になっていることが分かる。

Fig. 3 (b) は Fig. 3 (a) と同様に縦軸を任意時点の客の平均待ち行列長、横軸をエレベータの各階の間の移動時間にとり各階について示した。ここで $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ を、それぞれ0.1, 0.4, 0.5とし、それより $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ をそれぞれ $\alpha_2\lambda_1, \alpha_3\lambda_1, \alpha_4\lambda_1$ とした。

(a) Symmetric case

(b) Asymmetric case

Fig. 3 Mean queue length vs. interfloor time

各階の待ち行列長の大きさは到着率の大きさの順になっているが、到着率の違いほどではない。これは Fig. 3 (b) を見れば分かるように1階での待ち行列長が相対的に大きいので、その影響を受けたためであると考えられる。

4.2.2 エレベータの各階の間の移動時間が非対称である場合

Fig. 4 では1階への客の到着率 λ_1 を0.35とし、その客が i 階 ($i=2, 3, 4$) で降りる確率 α_i はすべて等しく $1/3$ であるとした。このため下りエレベータに乗る客の到着率 λ_i ($i=2, 3, 4$) を $\lambda_1/3$ とした。また2階と3階との間の平均移動時間 r_2 を基準の4とし、1階と2階との間の平均移動時間 r_1 を $4+x$ 、3階と4階との間の平均移動時間 r_3 を $4-x$ とした。ここで x の値を-4から4まで変化させたときの各階の任意時点の平均待ち行列長を図に示した。

Fig. 4 Mean queue length vs. bias of interfloor intervals

これより x が大きくなると2階、3階、4階での待ち行列長はほぼ変わらないが、1階の待ち行列長は大きくなることが分かる。

1階での待ち行列長が大きくなる理由は次のように考えることができる。 x が大きくなってもエレベータの空走1周時間は変わらないが、下りエレベータの3階から1階への、さらに2階から1階への移動時間が増加する。このためエレベータが停止している確率の高い2階と3階から1階への移動時間が増加する。よって1階での待ち行列長が増加する。

4.3 1階で乗った客の各階で降りる確率が非対称である場合

Fig. 5 では1階への客の到着率 λ_1 を0.35とし、その客が i 階 ($i=2, 3, 4$) で降りる確率 α_i は α_3 を基準の $1/3$ とし、 α_2 を $1/3+x/3$ 、 α_4 を $1/3-x/3$ とした。これより λ_i ($i=2, 3, 4$) を $\alpha_i\lambda_1$ とした。ここで x を-1から1まで変化させたときの各階の任意時点の平均待ち行列長を図に示した。

Fig. 5 Mean queue length vs. bias of the probabilities

これより x が増加すると 1 階と 3 階での待ち行列長は少し小さくなり、2 階での待ち行列長は増加し、4 階での待ち行列長は減少することが分かる。

1 階での待ち行列長がやや減少するのは x が増加しても待ち行列長は全体ではほぼ変わらないが、1 階のすぐ前の 2 階での待ち行列長が大きくなるためであると考えられる。また 3 階での待ち行列長がやや減少するのは x が増加しても待ち行列長は全体ではほぼ変わらないが、4 階での待ち行列長が減少するので最も長い待ち行列のある 1 階からの到着時間が短くなるためであると考えられる。

5. 結 論

本研究においては、エレベータシステムを待ち行列理論を用いてモデル化し解析した。解析を容易にするため、客の積み残しやドアの開閉時間は無く、エレベータは 1 階と最上階以外では方向を変えないものとする、このシステムはポーリングモデルによりモデル化が可能である。このことより、エレベータが到着した時点での平均待ち行列長、および任意時点の平均待ち行列長を導出した。客の到着率が変化する場合とエレベータの移動時間が変化する場合、および 1 階で乗った客の各階で降りる確率が非対称である場合に関して考察を行った。得られた数値結果から次のことがいえる。

- (1) 各階での客の平均待ち行列長は到着率の増加にもなって増加し、建築物全体での利用率が 1 に近づくにつれ急激に増大する。
- (2) エレベータの各階の間の移動時間が等しく変化する場合、各階での客の平均待ち行列長とエレベータの移動時間とはほぼ比例する。
- (3) 他の階での待ち行列長とそれらの位置関係による影響は次のようにまとめることができる。
 - (a) 1 階での客の平均待ち行列長は、下り側の各階での待ち行列長が減少するか、あるいはそれらが下の階に偏ると減少する。逆に下り側

の各階での待ち行列長が増加するか、あるいはそれらが上の階に偏ると増加する。

- (b) 下り側の各階での客の平均待ち行列長は、1 階での待ち行列の影響を多大に受け、下の階ほど待ち行列長が大きくなる。また上の階の待ち行列長が減少すると下の階の待ち行列長も減少する。

参 考 文 献

- 1) 平沢, 岩坂: エレベータ群の待ち合せ問題; 日立評論, Vol. 54, No. 12, pp. 79~84 (1972)
- 2) H. Takagi: Analysis of Polling Systems, The MIT Press (1986)
- 3) G. C. Barney and S. M. dos Santos: Elevator Traffic Analysis Design and Control-Revised Second Edition, Peter Peregrinus Ltd. (1985)

付 録

付録 A 待ち客数確率母関数の 1 階偏微分

(1)~(5) 式を 1 階偏微分すると、次のような連立方程式が得られる。

$$u_2(1; *) = r_1 \lambda_1$$

$$u_2(j; *) = u_1(j; *) + \frac{u_1(1; *) \alpha_j}{1 - \rho_1} \quad (j \neq 1)$$

$$u_2(*; 1) = u_1(*; 1)$$

$$u_2(*; j) = r_1 \lambda_j + u_1(*; j) + \frac{u_1(1; *) \rho_j}{1 - \rho_1} \quad (j \neq 1)$$

$$u_{i+1}(1; *) = r_i \lambda_1 + u_i(1; *) + u_i(i; *) \rho_1 \quad (i = 2, \dots, N-1)$$

$$u_{i+1}(i; *) = 0 \quad (i = 2, \dots, N-1)$$

$$u_{i+1}(j; *) = u_i(j; *) \quad (i = 2, \dots, N-1, j \neq 1, i)$$

$$u_{i+1}(*; 1) = u_i(*; 1) \quad (i = 2, \dots, N-1)$$

$$u_{i+1}(*; j) = r_i \lambda_j + u_i(*; j) + u_i(i; *) \rho_j \quad (i = 2, \dots, N-1, j \neq 1)$$

$$d_N(1; *) = u_N(1; *) + u_N(N; *) \rho_1$$

$$d_N(N; *) = 0$$

$$d_N(j; *) = u_N(j; *) \quad (j \neq 1, N)$$

$$d_N(*; 1) = u_N(*; 1)$$

$$d_N(*; j) = u_N(*; j) + u_N(N; *) \rho_j \quad (j \neq 1)$$

$$\begin{aligned}
 d_i(1; *) &= r_i \lambda_1 + d_{i+1}(1; *) + \frac{d_{i+1}(*; i+1) \rho_1}{1 - \rho_{i+1}} \\
 &\quad (i = 1, \dots, N-1) \\
 d_i(j; *) &= d_{i+1}(j; *) \\
 &\quad (i = 1, \dots, N-1, j \neq 1) \\
 d_i(*; 1) &= d_{i+1}(*; 1) + \frac{d_{i+1}(*; i+1)}{1 - \rho_{i+1}} \\
 &\quad (i = 1, \dots, N-1) \\
 d_i(*; i+1) &= r_i \lambda_{i+1} \\
 &\quad (i = 1, \dots, N-1) \\
 d_i(*; j) &= r_i \lambda_j + d_{i+1}(*; j) + \frac{d_{i+1}(*; i+1) \rho_j}{1 - \rho_{i+1}} \\
 &\quad (i = 1, \dots, N-1, j \neq 1, i+1) \\
 u_1(1; *) &= d_1(1; *) + d_1(*; 1) \rho_1 \\
 u_1(j; *) &= d_1(j; *) \\
 &\quad (j \neq 1) \\
 u_1(*; 1) &= 0 \\
 u_1(*; j) &= d_1(*; j) + d_1(*; 1) \rho_j \\
 &\quad (j \neq 1)
 \end{aligned}$$

付録 B 待ち客数確率母関数の 2 階偏微分

(1)～(5) 式を 2 階偏微分すると、次のような連立方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
 u_1(1, 1; *) &= d_1(1, 1; *) + 2 \rho_1 d_1(1; 1) \\
 &\quad + d_1(*; 1) \lambda_1^2 b^{(2)} + d_1(*; 1, 1) \rho_1^2 \\
 u_1(1, j; *) &= d_1(1, j; *) + d_1(j; 1) \rho_1 \\
 &\quad (j \neq 1) \\
 u_1(1; 1) &= 0 \\
 u_1(1; j) &= d_1(1; j) + d_1(1; 1) \rho_j \\
 &\quad + d_1(*; 1) \lambda_1 \lambda_j b^{(2)} + \rho_1 d_1(*; 1, j) \\
 &\quad + d_1(*; 1, 1) \rho_1 \rho_j \\
 &\quad (j \neq 1) \\
 u_1(j, k; *) &= d_1(j, k; *) \\
 &\quad (j \neq 1, k \neq 1) \\
 u_1(j; 1) &= 0 \\
 &\quad (j \neq 1) \\
 u_1(j; k) &= d_1(j; k) + d_1(j; 1) \rho_k \\
 &\quad (j \neq 1, k \neq 1) \\
 u_1(*; 1, j) &= 0 \\
 u_1(*; j, k) &= d_1(*; j, k) + d_1(*; 1, j) \rho_k \\
 &\quad + d_1(*; 1) \lambda_j \lambda_k b^{(2)} + \rho_j d_1(*; 1, k) \\
 &\quad + d_1(*; 1, 1) \rho_j \rho_k \\
 &\quad (j \neq 1, k \neq 1) \\
 u_2(1, 1; *) &= \lambda_1^2 r_1^{(2)} \\
 u_2(1, j; *) &= \lambda_1 r_1 \left(u_1(j; *) + \frac{\alpha_j u_1(1; *)}{1 - \rho_1} \right) \\
 &\quad (j \neq 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2(1; 1) &= \lambda_1 r_1 u_1(*; 1) \\
 u_2(1; j) &= \lambda_1 \lambda_j r_1^{(2)} \\
 &\quad + \lambda_1 r_1 \left(u_1(*; j) + \frac{\rho_j u_1(1; *)}{1 - \rho_1} \right) \\
 &\quad (j \neq 1) \\
 u_2(j, k; *) &= u_1(j, k; *) + \frac{\alpha_k u_1(1, j; *)}{1 - \rho_1} \\
 &\quad + \alpha_j \alpha_k u_1(1; *) \left(\theta_1^{(0,2)} - \theta_1^{(0,1)} \right) \\
 &\quad + \frac{\alpha_j u_1(1, k; *)}{1 - \rho_1} + \frac{\alpha_j \alpha_k u_1(1, 1; *)}{(1 - \rho_1)^2} \\
 &\quad (j \neq 1, k \neq 1) \\
 u_2(j; 1) &= u_1(j; 1) + \frac{\alpha_j u_1(1; 1)}{1 - \rho_1} \\
 &\quad (j \neq 1) \\
 u_2(j; k) &= \lambda_k r_1 \left(u_1(j; *) + \frac{\alpha_j u_1(1; *)}{1 - \rho_1} \right) \\
 &\quad + u_1(j; k) + \frac{\rho_k u_1(1, j; *)}{1 - \rho_1} \\
 &\quad + \alpha_j \lambda_k u_1(1; *) \theta_1^{(1,1)} + \frac{\alpha_j u_1(1; k)}{1 - \rho_1} \\
 &\quad + \frac{\alpha_j \rho_k u_1(1, 1; *)}{(1 - \rho_1)^2} \\
 &\quad (j \neq 1, k \neq 1) \\
 u_2(*; 1, 1) &= u_1(*; 1, 1) \\
 u_2(*; 1, j) &= u_1(*; 1, j) + \frac{\rho_j u_1(1; 1)}{1 - \rho_1} \\
 &\quad + \lambda_j r_1 u_1(*; 1) \\
 &\quad (j \neq 1) \\
 u_2(*; j, k) &= u_1(*; j, k) + \frac{\rho_k u_1(1; j)}{1 - \rho_1} \\
 &\quad + \lambda_j \lambda_k u_1(1; *) \theta_1^{(2,0)} + \frac{\rho_j u_1(1; k)}{1 - \rho_1} \\
 &\quad + \frac{\rho_j \rho_k u_1(1, 1; *)}{(1 - \rho_1)^2} + \lambda_k r_1 \\
 &\quad \cdot \left(u_1(*; j) + \frac{\rho_j u_1(1; *)}{1 - \rho_1} \right) + \lambda_j \lambda_k r_1^{(2)} \\
 &\quad + \lambda_j r_1 \left(u_1(*; k) + \frac{\rho_k u_1(1; *)}{1 - \rho_1} \right) \\
 &\quad (j \neq 1, k \neq 1) \\
 u_{i+1}(1, 1; *) &= u_i(1, 1; *) + 2 \rho_1 u_i(1, i; *) \\
 &\quad + u_i(i; *) \lambda_1^2 b^{(2)} + \rho_1^2 u_i(i, i; *) \\
 &\quad + 2 \lambda_1 r_i (u_i(1; *) + \rho_1 u_i(i; *)) \\
 &\quad + \lambda_1^2 r_i^{(2)} \\
 &\quad (i \neq 1, N) \\
 u_{i+1}(1, i; *) &= 0 \\
 &\quad (i \neq 1, N)
 \end{aligned}$$

$$u_{i+1}(1, j; *) = u_i(1, j; *) + u_i(i, j; *) \rho_1 \\ + u_i(j; *) \lambda_1 r_i \\ (i \neq 1, N, j \neq 1, i)$$

$$u_{i+1}(1; 1) = u_i(1; 1) + u_i(i; 1) \rho_1 + u_i(*; 1) \lambda_1 r_i \\ (i \neq 1, N)$$

$$u_{i+1}(1; j) = u_i(1; j) + u_i(1, i; *) \rho_j \\ + u_i(i; *) \lambda_1 \lambda_j b^{(2)} + \rho_1 u_i(i; j) \\ + \rho_1 \rho_j u_i(i, i; *) + \lambda_j r_i (u_i(1; *) \\ + \rho_1 u_i(i; *)) + \lambda_1 \lambda_j r_i^{(2)} \\ + \lambda_1 r_i (u_i(*; j) + \rho_j u_i(i; *)) \\ (i \neq 1, N, j \neq 1)$$

$$u_{i+1}(i, i; *) = 0 \\ (i \neq 1, N)$$

$$u_{i+1}(i, j; *) = 0 \\ (i \neq 1, N, j \neq 1, i)$$

$$u_{i+1}(i; j) = 0 \\ (i \neq 1, N)$$

$$u_{i+1}(j, k; *) = u_i(j, k; *) \\ (i \neq 1, N, j \neq 1, i, k \neq 1, i)$$

$$u_{i+1}(j; 1) = u_i(j; 1) \\ (i \neq 1, N, j \neq 1, i)$$

$$u_{i+1}(j; k) = u_i(j; k) + u_i(i, j; *) \rho_k \\ + u_i(j; *) \lambda_k r_i \\ (i \neq 1, N, j \neq 1, i, k \neq 1)$$

$$u_{i+1}(*; 1, 1) = u_i(*; 1, 1) \\ (i \neq 1, N)$$

$$u_{i+1}(*; 1, j) = u_i(*; 1, j) + u_i(i; 1) \rho_j \\ + u_i(*; 1) \lambda_j r_i \\ (i \neq 1, N, j \neq 1)$$

$$u_{i+1}(*; j, k) = u_i(*; j, k) + u_i(i; j) \rho_k \\ + u_i(i; *) \lambda_j \lambda_k b^{(2)} + \rho_j u_i(i; k) \\ + \rho_j \rho_k u_i(i, i; *) + \lambda_k r_i (u_i(*; j) \\ + \rho_j u_i(i; *)) + \lambda_j \lambda_k r_i^{(2)} \\ + \lambda_j r_i (u_i(*; k) + \rho_k u_i(i; *)) \\ (i \neq 1, N, j \neq 1, k \neq 1)$$

$$d_i(1, 1; *) = d_{i+1}(1, 1; *) + 2 \frac{d_{i+1}(1; i+1) \rho_1}{1 - \rho_{i+1}} \\ + d_{i+1}(*; i+1) \lambda_1^2 \theta_{i+1}^{(2,0)} \\ + \frac{\rho_1^2 d_{i+1}(*; i+1, i+1)}{(1 - \rho_{i+1})^2} + \lambda_1^2 r_i^{(2)} \\ + 2 \lambda_1 r_i \left(d_{i+1}(1; *) \right. \\ \left. + \frac{\rho_1 d_{i+1}(*; i+1)}{1 - \rho_{i+1}} \right) \\ (i \neq N)$$

$$d_i(1, j; *) = d_{i+1}(1, j; *) + \frac{d_{i+1}(j; i+1) \rho_1}{1 - \rho_{i+1}} \\ + d_{i+1}(j; *) \lambda_1 r_i \\ (i \neq N, j \neq 1)$$

$$d_i(1; 1) = d_{i+1}(1; 1) + \frac{d_{i+1}(1; i+1)}{1 - \rho_{i+1}} \\ + d_{i+1}(*; i+1) \lambda_1 \theta_{i+1}^{(1,1)} \\ + \frac{\rho_1 d_{i+1}(*; 1, i+1)}{1 - \rho_{i+1}} \\ + \frac{\rho_1 d_{i+1}(*; i+1, i+1)}{(1 - \rho_{i+1})^2} \\ + \lambda_1 r_i \left(d_{i+1}(*; 1) + \frac{d_{i+1}(*; i+1)}{1 - \rho_{i+1}} \right) \\ (i \neq N)$$

$$d_i(1; i+1) = \lambda_{i+1} r_i \left(d_{i+1}(1; *) \right. \\ \left. + \frac{d_{i+1}(*; i+1) \rho_1}{1 - \rho_{i+1}} \right) + \lambda_1 \lambda_{i+1} r_i^{(2)} \\ (i \neq N)$$

$$d_i(1; j) = d_{i+1}(1; j) + \frac{d_{i+1}(1; i+1) \rho_j}{1 - \rho_{i+1}} \\ + d_{i+1}(*; i+1) \lambda_1 \lambda_j \theta_{i+1}^{(2,0)} \\ + \frac{\rho_j d_{i+1}(*; i+1, j)}{1 - \rho_{i+1}} \\ + \frac{\rho_1 \rho_j d_{i+1}(*; i+1, i+1)}{(1 - \rho_{i+1})^2} \\ + \lambda_j r_i \left(d_{i+1}(1; *) \right. \\ \left. + \frac{\rho_1 d_{i+1}(*; i+1)}{1 - \rho_{i+1}} \right) + \lambda_1 \lambda_j r_i^{(2)} \\ + \lambda_1 r_i \left(d_{i+1}(*; j) \right. \\ \left. + \frac{\rho_j d_{i+1}(*; i+1)}{1 - \rho_{i+1}} \right) \\ (i \neq N, j \neq 1, i+1)$$

$$d_i(j, k; *) = d_{i+1}(j, k; *) \\ (i \neq N, j \neq 1, k \neq 1)$$

$$d_i(j; 1) = d_{i+1}(j; 1) + \frac{d_{i+1}(j; i+1)}{1 - \rho_{i+1}} \\ (i \neq N, j \neq 1)$$

$$d_i(j; i+1) = d_{i+1}(j; *) \lambda_{i+1} r_i \\ (i \neq N, j \neq 1)$$

$$d_i(j; k) = d_{i+1}(j; k) + \frac{d_{i+1}(j; i+1) \rho_k}{1 - \rho_{i+1}} \\ + d_{i+1}(j; *) \lambda_k r_i \\ (i \neq N, j \neq 1, k \neq 1, i+1)$$

$$\begin{aligned}
 d_i(*; 1, 1) &= d_{i+1}(*; 1, 1) + 2 \frac{d_{i+1}(*; 1, i+1)}{1 - \rho_{i+1}} \\
 &\quad + d_{i+1}(*; i+1) \left(\theta_{i+1}^{(0,2)} - \theta_{i+1}^{(0,1)} \right) \\
 &\quad + \frac{d_{i+1}(*; i+1, i+1)}{(1 - \rho_{i+1})^2} \\
 &\quad (i \neq N) \\
 d_i(*; 1, i+1) &= \lambda_{i+1} r_i \left(d_{i+1}(*; 1) + \frac{d_{i+1}(*; i+1)}{1 - \rho_{i+1}} \right) \\
 &\quad (i \neq N) \\
 d_i(*; 1, j) &= d_{i+1}(*; 1, j) + \frac{d_{i+1}(*; 1, i+1) \rho_j}{1 - \rho_{i+1}} \\
 &\quad + d_{i+1}(*; i+1) \lambda_j \theta_{i+1}^{(1,1)} \\
 &\quad + \frac{d_{i+1}(*; i+1, j)}{1 - \rho_{i+1}} \\
 &\quad + \frac{\rho_j d_{i+1}(*; i+1, i+1)}{(1 - \rho_{i+1})^2} \\
 &\quad + \lambda_j r_i \left(d_{i+1}(*; 1) + \frac{d_{i+1}(*; i+1)}{1 - \rho_{i+1}} \right) \\
 &\quad (i \neq N, j \neq 1, i+1) \\
 d_i(*; i+1, i+1) &= \lambda_{i+1}^2 r_i^{(2)} \\
 &\quad (i \neq N) \\
 d_i(*; i+1, j) &= \lambda_{i+1} \lambda_j r_i^{(2)} + \lambda_{i+1} r_i \\
 &\quad \cdot \left(d_{i+1}(*; j) + \frac{d_{i+1}(*; i+1) \rho_j}{1 - \rho_{i+1}} \right) \\
 &\quad (i \neq N, j \neq 1, i+1) \\
 d_i(*; j, k) &= d_{i+1}(*; j, k) + \frac{d_{i+1}(*; j, i+1) \rho_k}{1 - \rho_{i+1}} \\
 &\quad + d_{i+1}(*; i+1) \lambda_j \lambda_k \theta_{i+1}^{(2,0)} \\
 &\quad + \frac{\rho_j d_{i+1}(*; i+1, k)}{1 - \rho_{i+1}} \\
 &\quad + \frac{\rho_j \rho_k d_{i+1}(*; i+1, i+1)}{(1 - \rho_{i+1})^2} \\
 &\quad + \lambda_k r_i \left(d_{i+1}(*; j) \right. \\
 &\quad \quad \left. + \frac{d_{i+1}(*; i+1) \rho_j}{1 - \rho_{i+1}} \right) \\
 &\quad + \lambda_j \lambda_k r_i^{(2)} + \lambda_j r_i \left(d_{i+1}(*; k) \right. \\
 &\quad \quad \left. + \frac{d_{i+1}(*; i+1) \rho_k}{1 - \rho_{i+1}} \right) \\
 &\quad (i \neq N, j \neq 1, i+1, k \neq 1, i+1) \\
 d_N(1, 1; *) &= u_N(1, 1; *) + 2 u_N(1, N; *) \rho_1 \\
 &\quad + u_N(N; *) \lambda_1^2 b^{(2)} \\
 &\quad + \rho_1^2 u_N(N, N; *) \\
 d_N(1, j; *) &= u_N(1, j; *) + u_N(j, N; *) \rho_1 \\
 &\quad (j \neq 1, N) \\
 d_N(1, N; *) &= 0 \\
 d_N(1; 1) &= u_N(1; 1) + u_N(N; 1) \rho_1 \\
 d_N(1; j) &= u_N(1; j) + u_N(1, N; *) \rho_j \\
 &\quad + u_N(N; *) \lambda_1 \lambda_j b^{(2)} + \rho_1 u_N(N; j) \\
 &\quad + \rho_1 \rho_j u_N(N, N; *) \\
 &\quad (j \neq 1) \\
 d_N(j, k; *) &= u_N(j, k; *) \\
 &\quad (j \neq 1, N, k \neq 1, N) \\
 d_N(j, N; *) &= 0 \\
 &\quad (j \neq 1, N) \\
 d_N(j; 1) &= u_N(j; 1) \\
 &\quad (j \neq 1, N) \\
 d_N(j; k) &= u_N(j; k) + u_N(j, N; *) \rho_k \\
 &\quad (j \neq 1, N, k \neq 1) \\
 d_N(N, N; *) &= 0 \\
 d_N(N; j) &= 0 \\
 d_N(*; 1, 1) &= u_N(*; 1, 1) \\
 d_N(*; 1, j) &= u_N(*; 1, j) + u_N(N; 1) \rho_j \\
 &\quad (j \neq 1) \\
 d_N(*; j, k) &= u_N(*; j, k) + u_N(N; j) \rho_k \\
 &\quad + u_N(N; *) \lambda_j \lambda_k b^{(2)} + \rho_j u_N(N; k) \\
 &\quad + \rho_j \rho_k u_N(N, N; *) \\
 &\quad (j \neq 1, k \neq 1)
 \end{aligned}$$