動作状態が変化する多入出力システムの安定化*

村松 鋭一**・池田 雅夫***・玉井 孝幸****

Stabilization of Multi-Input Multi-Output Systems with Variable Operating Conditions*

Eiichi MURAMATSU**, Masao IKEDA*** and Takayuki TAMAI****

A stabilization problem is considered for linear time-invariant multi-input multi-output systems with variable operating conditions. The plant is assumed to be modeled as an interpolation of two nominal plants described by proper stable factorizations of transfer function matrices. To stabilize the closed-loop system, two kinds of controllers are proposed. One is a fixed controller, and the other is an interpolation of stabilizing controllers for the nominal plants. For each case, sufficient conditions for stabilization are reduced to solvability of certain H^∞ control problems. Design algorithms for the proposed controllers are presented in the state space. The relation to the simultaneous stabilization problem for two nominal plants is also considered.

1. はじめに

この論文では、動作状態の変化により特性が変化する多入力多出力の制御対象の安定化問題を考察する。制御対象は、代表的な動作状態におけるモデル（基準モデル）の補間によって表わすことができるとする。

制御対象の特性変化を補間によって表わす方法には、参考文献 1)~7) のように種々のものが考えられる。本論文では、参考文献 4)~7) と同様に、二つの基準モデルの伝達関数行列のプロバかつ安定な既約分解表現における各分解要素の線形補間を考え、特性変化を補間パラメータの変化に対応させる。そして、このような制御対象を安定化するコントローラとして、次の2種類のコントローラの設計法を示す。一つは基準モデルの安定化コントローラを補間したコントローラであり、もう一つは補間を行わない固定したコントローラである。コントローラを補間する目的は、制御対象の特性変化に対応してコ

ントローラを変更することによって、安定化可能な制御対象の範囲をより広くすることである。

このような制御対象とコントローラの設計に関する問題は、1入力1出力系について参考文献 3)~7) で考察されており、ネバンリナ・ピックの補間問題に帰着させる手法により、制御系を安定化するコントローラが存在するための必要十分条件とコントローラの設計法が得られている。しかし多入力多出力系においては、ネバンリナ・ピックの補間問題に帰着させる手法を適用することができず、必要十分条件を得ることは困難である。そこで、本論文では、多入力多出力系を安定化するコントローラが存在するための十分条件を、ある H^∞ 制御問題の可解性に帰着させ、状態空間表現によるコントローラの設計法を示す。

なお、筆者らは二つの基準モデルの補間によって表わされる1入力1出力の制御対象が安定化可能であるためには、二つの基準モデルが同時安定化可能であることが必要であることを、参考文献 6) において示した。多入力多出力系においても同様であることを本論文で明らかにする。

本論文の構成は、次のとおりである。2. で制御対象の記述および問題設定を行い、3. において制御系を安定化各コントローラが存在するための十分条件が H^∞ 制御問題の可能性に帰着できることを示す。4. では H^∞ 制御問題の解を用いて、コントローラの設計法を示す。5. で同時安定化可能性との関連を示す。

* 原稿受付 1993年7月12日

** 住友金属工業(株) Sumitomo Metal Industries, Ltd.; 1-8 Fuso-cho, Amagasaki city, Hyogo 660, JAPAN

*** 神戸大学 工学部 Faculty of Engineering, Kobe University; 1-1 Rokkodai-cho, Nada ward, Kobe city, Hyogo 657, JAPAN

**** 神戸大学 工学部 (現在, 三井信託銀行(株)) Faculty of Engineering, Kobe University; ditto

Key Words: variable operating conditions, stabilization, coprime factorization, interpolated plants, interpolated controllers.

2. 問題設定

Fig. 1 の多入力多出力の制御系を考える。\$G\$ は制御対象、\$K\$ はコントローラの伝達関数行列を表わす。制御対象の伝達関数行列 \$G\$ は、二つの基準モデルの伝達関数行列 \$G_i (i=1, 2)\$ のプロバかつ安定な有理関数行列の集合（以下、\$RH^\infty\$ と記す）上の既約分解

$$G_i = N_i D_i^{-1} \quad (1)$$

$$= \tilde{D}_i^{-1} \tilde{N}_i \quad (2)$$

を用いて、つぎのように記述されるものとする。

$$G = N D^{-1} \quad (3)$$

$$N = \alpha N_1 + (1-\alpha) N_2, \quad (4)$$

$$D = \alpha D_1 + (1-\alpha) D_2,$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

ここで、\$\alpha\$ は制御対象の動作状態の変化に応じて、0 から 1 の間を変化するパラメータである。\$\alpha = 1\$ のとき \$G = G_1\$、\$\alpha = 0\$ のとき \$G = G_2\$ となることは明らかである。

Fig. 1 Closed-Loop system

（注意 1）本論文は、動作状態の変化が一つのパラメータによる線形補間で正確に表わすことができるという立場に立つのではなく、補間表現は制御対象を近似する一つの公称モデルと考えている。一つのパラメータによる近似が不充分であれば、二つ以上のパラメータを導入する必要がある。また、基準モデルの既約分解の選び方が異なれば、(3)、(4) 式の \$G\$ は異なる伝達関数行列になるので、近似という観点から、基準モデルの既約分解の選び方について議論する必要がある。これらについて、筆者らは、実際問題への応用の観点を含め、稿を改めて考察する予定である。

このような制御対象を安定化するとき、パラメータ \$\alpha\$ の値が利用可能な場合には、それを積極的に利用して次のような形式のコントローラを設計することが考えられる。

$$K = \tilde{D}_K^{-1} \tilde{N}_K \quad (5)$$

$$\tilde{N}_K = \alpha \tilde{N}_{K1} + (1-\alpha) \tilde{N}_{K2} \quad (6)$$

$$\tilde{D}_K = \alpha \tilde{D}_{K1} + (1-\alpha) \tilde{D}_{K2}$$

\$\alpha = 1\$ のとき \$K = \tilde{D}_{K1}^{-1} \tilde{N}_{K1}\$、\$\alpha = 0\$ のとき \$K = \tilde{D}_{K2}^{-1} \tilde{N}_{K2}\$、

であるので、

$$K_1 \triangleq \tilde{D}_{K1}^{-1} \tilde{N}_{K1} \quad (7)$$

$$K_2 \triangleq \tilde{D}_{K2}^{-1} \tilde{N}_{K2} \quad (8)$$

とすれば、(5)、(6) 式のコントローラ \$K\$ は、制御対象の変化を表わすパラメータ \$\alpha\$ によって、\$K_1\$ と \$K_2\$ を補間したものとなる。これにより、制御対象の変化に対応してコントローラも変化させる制御系が構成される。このとき、当然、コントローラ \$K_1\$、\$K_2\$ はそれぞれ基準モデル \$G_1\$、\$G_2\$ を安定化するものでなければならない。

以上は、\$\alpha\$ の値が利用できる場合には有効であるが、\$\alpha\$ の値を利用できない場合には、\$\alpha\$ に依存しないコントローラで安定化しなければならない。本論文ではまずこの問題から考察する。

以下、(3)、(4) 式のように記述される制御対象を“補間制御対象”、(5)、(6) 式のコントローラを“補間コントローラ”、\$\alpha\$ に依存しないコントローラを“固定コントローラ”と呼ぶことにする。

ここで、後の式の展開のため、\$N_i\$、\$D_i\$、\$\tilde{N}_i\$、\$\tilde{D}_i (i=1, 2)\$ に対して、

$$\begin{bmatrix} Y_i & X_i \\ -\tilde{N}_i & \tilde{D}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_i & -\tilde{X}_i \\ N_i & \tilde{Y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (9)$$

が成立するような \$X_i\$、\$Y_i\$、\$\tilde{X}_i\$、\$\tilde{Y}_i \in RH^\infty\$ を定義しておく。また、行列

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \quad (10)$$

に対する線形分数変換 DHM を

$$\text{DHM}(V; S) = (V_{11} + S V_{21})^{-1} (V_{12} + S V_{22}) \quad (11)$$

とする。DHM に関して、

$$\text{DHM}(V_1; \text{DHM}(V_2; S)) = \text{DHM}(V_2 V_1; S) \quad (12)$$

が成り立つ。プロバかつ安定な有理関数行列で、\$H^\infty\$ ノルムが 1 未満のものの集合を \$BH^\infty\$ と記す。

3. 制御系の安定化可能条件

3.1 固定コントローラによる安定化

(3)、(4) 式の補間制御対象 \$G\$ に対して、コントローラを \$\alpha\$ によらず固定とした場合の制御系が安定化可能となる条件を考察する。補間制御対象を安定化するコントローラは、\$\alpha = 1\$ のとき、つまり制御対象が \$G_1\$ のとき制御系を安定化することが必要である。したがって、Fig. 1 の制御系を安定化するコントローラを、\$G_1\$ に対する安定化するコントローラの一般形

$$K = K_1 = \tilde{D}_{K1}^{-1} \tilde{N}_{K1} \quad (13)$$

$$\tilde{N}_{K1} = X_1 + R_1 \tilde{D}_1 \quad (14)$$

$$\tilde{D}_{K1} = Y_1 - R_1 \tilde{N}_1$$

によって表現しよう。ただし、 R_1 は任意の RH^∞ の元である。

よく知られているように (3) 式の制御対象 G に対して、(13) 式のコントローラにより制御系が安定であるための必要十分条件は、

$$\Omega_1 \triangleq \tilde{D}_{K1} D + \tilde{N}_{K1} N \quad (15)$$

がユニモジュラとなることである⁶⁾。したがって、 α が $0 \leq \alpha \leq 1$ のいかなる値をとっても、 Ω_1 がユニモジュラとなるような R_1 が求められれば、補間制御対象は安定化可能である。

まず、 $\tilde{D}_{K1}$, D , $\tilde{N}_{K1}$, N に (4), (14) 式を代入し、(9) 式を利用することにより、

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \alpha I + (1-\alpha) \Phi_1 \\ &= \{\alpha + (1-\alpha)\beta\} I + (1-\alpha)(\Phi_1 - \beta I) \\ &= (1-\alpha) \left\{ \frac{\alpha + (1-\alpha)\beta}{1-\alpha} I + (\Phi_1 - \beta I) \right\} \end{aligned}$$

と計算できる。ただし、

$$\Phi_1 = T_{a1} - R_1 T_{b1} \quad (16)$$

$$T_{a1} = X_1 N_2 + Y_1 D_2 \quad (17)$$

$$T_{b1} = \tilde{N}_1 D_2 - \tilde{D}_1 N_2 \quad (18)$$

であり、 β は任意の正数である。

ここで、 Ω_1 がユニモジュラとなるための十分条件をつぎの補題を利用して与える。

【補題1】⁶⁾ M をユニモジュラ行列、 $S \in RH^\infty$ とする。このとき、

$$\|S\|_\infty < \frac{1}{\|M^{-1}\|_\infty} \quad (19)$$

であれば、 $M+S$ はユニモジュラである。

この補題より、

$$\|\Phi_1 - \beta I\|_\infty < \frac{\alpha + (1-\alpha)\beta}{1-\alpha} \quad (20)$$

であれば、 Ω_1 がユニモジュラとなる。上式の右辺は $\alpha=0$ のとき最小値 β をとるので、

$$\|\Phi_1 - \beta I\|_\infty < \beta \quad (21)$$

であれば α の値によらず Ω_1 がユニモジュラとなる。

したがって、次の補題が成り立つ。

【補題2】 ある正数 β に対して、

$$\|(T_{a1} - \beta I) - R_1 T_{b1}\|_\infty < \beta \quad (22)$$

を満たす $R_1 \in RH^\infty$ が存在すれば、補間制御対象 G を

安定化する固定コントローラ K が存在する。

(22) 式を満たす R_1 が存在するかどうかという問題は、 H^∞ 制御問題として取り扱うことができ、その解を用いることにより R_1 の構成法を得ることができる。状態空間での具体的な R_1 の存在条件とコントローラの設計法は 4. において述べる。

(注意2) $\|\Phi_1 - \beta_1 I\|_\infty < \beta_1$ が成り立つとき、ノルムの性質より $\|\Phi_1 - (\beta_1 + \beta_2) I\|_\infty \leq \|\Phi_1 - \beta_1 I\|_\infty + \beta_2 < \beta_1 + \beta_2$ が成り立つ。したがって、(22) 式の条件は、 β を大きく選ぶほど成立しやすい。制御対象が 1 入力 1 出力の場合、この条件を図を用いて表現すると、右閉半平面の s に対する (16) 式の Φ_1 の値が、Fig. 2 の円 (中心 $(\beta, 0)$, 半径 β) の内部に入ることの意味する。なお、1 入力 1 出力の制御対象の場合の必要十分条件^{6), 7)} は、右閉半平面の s に対する Φ_1 の値が原点と負の実軸を除く領域内に存在することである。

Fig. 2 Region of Φ_1

補題2 は基準モデル G_1 の右既約分解に基づく安定化コントローラの表現を用いて導出した。同様の議論が G_2 の右既約分解に基づいても可能であることが明らかである。また、 G_1 , G_2 の左既約分解に基づくことも可能である。それらによって得られる安定化可能条件は等価ではない。

3.2 補間コントローラによる安定条件

つぎに、(3), (4) 式の補間制御対象に対して、(5), (6) 式の補間コントローラによって制御系を安定化する問題を考える。 $\alpha=1$ のとき制御対象は $G=G_1$ でコントローラは $K=K_1$, $\alpha=0$ のとき制御対象は $G=G_2$ でコントローラは $K=K_2$ となることより、 K_1 , K_2 はそれぞれ基準モデル G_1 , G_2 の安定化コントローラとなっていることが必要である。そこで、 K_i ($i=1, 2$) を G_i に対する安定化コントローラの一般形⁸⁾

$$K_i = \tilde{D}_{Ki}^{-1} \tilde{N}_{Ki} \quad (23)$$

$$\tilde{N}_{Ki} = X_i + R_i \tilde{D}_i \quad (24)$$

$$\tilde{D}_{Ki} = Y_i - R_i \tilde{N}_i$$

を用いて表現しておこう。ただし、 R_i は任意の RH^∞

の元である。

補間コントローラで制御系を安定化する場合、任意の K_1, K_2 を補間したのでは、一般に制御系の安定性は保証されない。問題は α が 0 から 1 の間のいかなる値をとっても制御系が安定となるような補間コントローラ K を構成する K_1, K_2 の求め方を明らかにすることである。

3.1 と同様、制御系の安定条件、 $\Omega_2 = \tilde{D}_K D + \tilde{N}_K N$ がユニモジュラとなる条件を考える。 Ω_2 に (4), (6) および (24) 式を代入し、(9) 式を利用することにより、

$$\begin{aligned}\Omega_2 &= (2\alpha^2 - 2\alpha + 1)I + \alpha(1-\alpha)\Phi_2 \\ &= \{2\alpha^2 - 2\alpha + 1 + \alpha(1-\alpha)\beta\}I \\ &\quad + \alpha(1-\alpha)(\Phi_2 - \beta I) \\ &= \alpha(1-\alpha)\left\{\frac{2\alpha^2 - 2\alpha + 1 + \alpha(1-\alpha)\beta}{\alpha(1-\alpha)}I\right. \\ &\quad \left.+ (\Phi_2 - \beta I)\right\}\end{aligned}$$

と計算できる。ただし、

$$\Phi_2 = T_{a2} - R_{12}T_{b2} \quad (25)$$

$$T_{a2} = X_1N_2 + Y_1D_2 + X_2N_1 + Y_2D_1 \quad (26)$$

$$T_{b2} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_1D_2 - \tilde{D}_1N_2 \\ \tilde{N}_2D_1 - \tilde{D}_2N_1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$R_{12} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

であり、 β は任意の正数である。

3.1 と同様に補題 1 を用いると、

$$\|\Phi_2 - \beta I\|_\infty < \frac{2\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha(1-\alpha)} + \beta \quad (29)$$

であれば、 Ω_2 がユニモジュラとなり、制御系が安定となることがいえる。(29) 式の右辺は、 $\alpha = 1/2$ で最小値 $2 + \beta$ をとるので、

$$\|\Phi_2 - \beta I\|_\infty < 2 + \beta \quad (30)$$

であれば、 α の値によらず Ω_2 がユニモジュラとなる。

以上より、次の補題が成り立ち、補間コントローラの存在条件が H^∞ 制御問題の可解性に帰着される。

【補題 3a】 ある正数 β に対して、

$$\|(T_{a2} - \beta I) - R_{12}T_{b2}\|_\infty < 2 + \beta \quad (31)$$

を満たす $R_{12} \in RH^\infty$ が存在すれば補間制御対象 G を安定化する補間コントローラ K が存在する。

(注意 3) 補題 2 に対する注意 2 で述べたのと同じ理由により、(31) 式の条件は、 β を大きく選ぶほど成立しやすい。制御対象が 1 入力 1 出力の場合、この条件は、右閉半平面の s に対する (25) 式の Φ_2 の値が Fig. 3

Fig. 3 Region of Φ_2

の円の内部に入ることを意味する。なお、1 入力 1 出力の制御対象の場合の必要十分条件^{5), 6)} は、右閉半平面の s に対する Φ_2 の値が実軸の $(-\infty, -2]$ を除く領域内に存在することである。

補間制御対象を、基準モデルの左既約分解を用いて

$$G = \tilde{D}^{-1}\tilde{N} \quad (32)$$

$$\tilde{N} = \alpha\tilde{N}_1 + (1-\alpha)\tilde{N}_2, \quad (33)$$

$$\tilde{D} = \alpha\tilde{D}_1 + (1-\alpha)\tilde{D}_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

によって記述し、補間コントローラを

$$K = N_K D_K^{-1} \quad (34)$$

$$N_K = \alpha N_{K1} + (1-\alpha)N_{K2} \quad (35)$$

$$D_K = \alpha D_{K1} + (1-\alpha)D_{K2}$$

$$N_{Ki} = \tilde{X}_i + D_i Q_i, \quad (36)$$

$$D_{Ki} = \tilde{Y}_i - N_i Q_i,$$

$$Q_i \in RH^\infty, \quad i = 1, 2$$

と定義したとき、補題 3a と同様の条件がつぎのように得られる。これは、一般に、補題 3a と等価ではない。

【補題 3b】 ある正数 β に対して

$$\|(V_{a2} - \beta I) - V_{b2}Q_{12}\|_\infty < 2 + \beta \quad (37)$$

を満たす $Q_{12} \in RH^\infty$ が存在すれば、補間制御対象を安定化する補間コントローラ K が存在する。ただし、

$$V_{a2} = \tilde{N}_1\tilde{X}_2 + \tilde{D}_1\tilde{Y}_2 + \tilde{N}_2\tilde{X}_1 + \tilde{D}_2\tilde{Y}_1 \quad (38)$$

$$V_{b2} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_2N_1 - \tilde{N}_2D_1 & \tilde{D}_1N_2 - \tilde{N}_1D_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$Q_{12} = \begin{bmatrix} Q_1^T & Q_2^T \end{bmatrix}^T \quad (40)$$

である。

4. 状態空間でのコントローラの導出

3. において、補間制御対象を安定化するコントローラ的设计問題が H^∞ 制御問題に帰着された。この問題を解く方法として、ロバスト安定化問題⁹⁾と同様に、 s 領

域の有理関数行列の補間極値問題として定式化することが考えられる。しかし、ロバスト安定化問題の場合とは、現れる有理関数行列の大きさやプロパ性が異なるため、その定式化では求解が不可能であったり、可能でも議論が非常に煩わしくなる。

そこで、本節では、状態空間でこの H^∞ 制御問題を解く方法を与える。この方法によれば、コントローラの設計を直接行うことができる。簡単のため、基準モデル $G_i (i=1, 2)$ の既約分解はつぎの状態空間表現¹⁰⁾ 与えられているものとする。すなわち、 m 入力 p 出力の基準モデル $G_i (i=1, 2)$ の最小実現

$$G_i = C_i(sI - A_i)^{-1}B_i = \left[\begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_i & 0 \end{array} \right] \quad (41)$$

に対し、(9) 式を満たす既約分解の各要素は、

$$N_i = \left[\begin{array}{c|c} A_{Fi} & B_i \\ \hline C_i & 0 \end{array} \right], \quad D_i = \left[\begin{array}{c|c} A_{Fi} & B_i \\ \hline -F_i & I \end{array} \right] \quad (42)$$

$$X_i = \left[\begin{array}{c|c} A_{Li} & L_i \\ \hline F_i & 0 \end{array} \right], \quad Y_i = \left[\begin{array}{c|c} A_{Li} & B_i \\ \hline F_i & I \end{array} \right] \quad (43)$$

$$\tilde{N}_i = \left[\begin{array}{c|c} A_{Li} & B_i \\ \hline C_i & 0 \end{array} \right], \quad \tilde{D}_i = \left[\begin{array}{c|c} A_{Li} & L_i \\ \hline -C_i & I \end{array} \right] \quad (44)$$

$$\tilde{X}_i = \left[\begin{array}{c|c} A_{Fi} & L_i \\ \hline F_i & 0 \end{array} \right], \quad \tilde{Y}_i = \left[\begin{array}{c|c} A_{Fi} & L_i \\ \hline C_i & I \end{array} \right] \quad (45)$$

によって与えられるとする。ただし、

$$A_{Fi} \triangleq A_i - B_i F_i, \quad A_{Li} \triangleq A_i - L_i C_i \quad (46)$$

であり、 F_i, L_i は、それぞれ上の A_{Fi}, A_{Li} を安定化する任意の行列である。

4.1 H^∞ 制御問題の解

まず、準備として一つの H^∞ 制御問題の解を示しておく。これは参考文献 11), 12) の結果を組み合わせることによって得られる。

【補題 4】 伝達関数行列 T_a (h 入力 h 出力), T_b (h 入力 q 出力) が、 n 次の状態空間表現

$$\left[\begin{array}{c|c} T_a - \delta I & \\ \hline T_b & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_n & B_{n1} \\ \hline C_{n1} & (\xi - \delta) I_h \\ C_{n2} & 0_{(q \times h)} \end{array} \right] \quad (47)$$

によって表わされるとき (ただし、 $T_a(\infty) = \xi I_h$ としている)、

$$\|(T_a - \delta I) - RT_b\|_\infty < \gamma \quad (48)$$

を満たす $R \in RH^\infty$ が存在するための必要十分条件は、

Riccati 方程式

$$\begin{aligned} & P \left(A_n + \frac{\xi - \delta}{\gamma^2} B_{n1} C_{n1} \right)^T + \left(A_n + \frac{\xi - \delta}{\gamma^2} B_{n1} C_{n1} \right) P \\ & - \frac{1}{\gamma^2} P \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon} C_{n2}^T C_{n2} - C_{n1}^T C_{n1} - \frac{(\xi - \delta)^2}{\gamma^2} C_{n1}^T C_{n1} \right) P \\ & + B_{n1} B_{n1}^T + \varepsilon I = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

において、

$$\begin{aligned} A_s &= A_n + \frac{\xi - \delta}{\gamma^2} B_{n1} C_{n1} \\ & - \frac{1}{\gamma^2} P \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon} C_{n2}^T C_{n2} - C_{n1}^T C_{n1} - \frac{(\xi - \delta)^2}{\gamma^2} C_{n1}^T C_{n1} \right) \end{aligned} \quad (50)$$

を安定にするような半正定解 P が存在することである。ただし、 ε は十分小さな正の実数である。

このとき、(48) 式を満たす R は、

$$R = \text{DHM}(\Pi; U), \quad \forall U \in BH^\infty \quad (51)$$

と表わされる。ただし、

$$\Pi = D_\pi^T \left[\begin{array}{c|c|c} A_s & B_{n1} & \frac{1}{\varepsilon} P C_{n2}^T \\ \hline C_{n1} & I_h & 0_{h \times q} \\ 0_{(h+n) \times n} & 0_{(h+n) \times h} & 0_{(h+n) \times q} \\ \hline \frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon}} C_{n2} & 0_{q \times h} & -\frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon}} I_q \end{array} \right] \quad (52)$$

$$B_{n1} = \frac{1}{\gamma^2} \left((\xi - \delta) B_{n1} + \frac{(\xi - \delta)^2}{\gamma^2} P C_{n1}^T + P C_{n1}^T \right)$$

であり、 D_π は

$$J = \left[\begin{array}{c|c} I_h & 0 \\ \hline 0 & -I_{(h+n+q)} \end{array} \right], \quad D_v = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\varepsilon - \delta}{\gamma} I_h & 0 \\ \hline I_h & 0 \\ 0 & I_n \\ \hline 0_{q \times h} & 0_{q \times n} \end{array} \right]$$

に対して、

$$D_\pi^T J [D_\pi \quad D_v] = [J \quad 0] \quad (53)$$

を満たす任意の行列である。

4.2 固定コントローラの導出

本節では、3. の補題を用いて、状態空間表現による固定コントローラが存在するための十分条件と、コントローラの設計法を示す。

(41)~(46) 式を用いると、補題 2 における (22) 式の $T_{a1} - \beta I, T_{b1}$ の状態空間表現は、以下のように計算できる。

$$\begin{bmatrix} T_{a1} - \beta I \\ T_{b1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 \\ \hat{C}_1 & (1-\beta)I \\ \hat{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{L1} & -B_1 F_2 + L_1 C_2 \\ 0 & A_{F2} \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T \end{bmatrix}^T \quad (56)$$

$$\hat{C}_1 = \begin{bmatrix} F_1 & -F_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \end{bmatrix} \quad (57)$$

上記の $T_{a1} - \beta I$, T_{b1} に対して, (22) 式を満たす R_1 が存在するための必要十分条件は, 補題 4 より, Riccati 方程式

$$\begin{aligned} & P \left(\hat{A} + \frac{1-\beta}{\beta^2} \hat{B}_1 \hat{C}_1 \right)^T + \left(\hat{A} + \frac{1-\beta}{\beta^2} \hat{B}_1 \hat{C}_1 \right) P \\ & - \frac{1}{\beta^2} P \left(\frac{\beta^2}{\varepsilon} \hat{C}_2^T \hat{C}_2 - \hat{C}_1^T C_1 - \frac{(1-\beta)^2}{\beta^2} \hat{C}_1^T \hat{C}_1 \right) P \\ & + \hat{B}_1 \hat{B}_1^T + \varepsilon I = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

において,

$$\begin{aligned} \hat{A}_s &= \hat{A} + \frac{1-\beta}{\beta^2} \hat{B}_1 \hat{C}_1 \\ & - \frac{1}{\beta^2} P \left(\frac{\beta^2}{\varepsilon} \hat{C}_2^T \hat{C}_2 - \hat{C}_1^T C_1 - \frac{(1-\beta)^2}{\beta^2} \hat{C}_1^T \hat{C}_1 \right) \end{aligned} \quad (59)$$

を安定にする半正定解 P が存在することである。これが成り立つとき R_1 は以下のように表現できる。

$$R_1 = \text{DHM}(\Pi_1; U_1), \quad \forall U_1 \in BH^\infty \quad (60)$$

ただし,

$$\Pi_1 = D_{\pi 1}^T \begin{bmatrix} \hat{A}_s & \hat{B}_{\pi 1} & \frac{1}{\varepsilon} P \hat{C}_2^T \\ \hat{C}_1 & I_m & 0_{m \times p} \\ 0_{(m+n) \times n} & 0_{(m+n) \times m} & 0_{(m+n) \times p} \\ \frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}} \hat{C}_2 & 0_{p \times m} & -\frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}} I_p \end{bmatrix} \quad (61)$$

である。ただし,

$$\hat{B}_{\pi 1} = \frac{1}{\beta^2} \left((1-\beta) \hat{B}_1 + \frac{(1-\beta)^2}{\beta^2} P \hat{C}_1^T + P \hat{C}_1^T \right)$$

であり, $D_{\pi 1}$ は

$$J_1 = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_{(m+n+p)} \end{bmatrix}, \quad D_{V1} = \begin{bmatrix} \frac{1-\beta}{\beta} I_m & 0 \\ I_m & 0 \\ 0 & I_n \\ 0_{p \times m} & 0_{p \times n} \end{bmatrix}$$

に対して,

$$D_{\pi 1}^T J_1 \begin{bmatrix} D_{\pi 1} & D_{V1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \end{bmatrix}$$

を満たす任意の行列である。

ところで, (13), (14) 式のコントローラは記号 DHM を用いると,

$$K = \text{DHM}(Z_1; R_1), \quad R_1 \in RH^\infty \quad (62)$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} Y_1 & X_1 \\ -\tilde{N}_1 & \tilde{D}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{L1} & B_1 & L_1 \\ F_1 & I & 0 \\ -C_1 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (63)$$

と表現できる。(62) 式に, (60) 式を代入し, (12) 式を利用すると,

$$\begin{aligned} K &= \text{DHM}(Z_1; R_1) \\ &= \text{DHM}\{Z_1; \text{DHM}(\Pi_1; U_1)\} \\ &= \text{DHM}(\Pi_1 Z_1; U_1) \end{aligned} \quad (64)$$

と変形できる。よって, $\hat{K} \triangleq \Pi_1 Z_1$ を計算すればよい。

(61), (63) 式から $\Pi_1 Z_1$ を計算し, 不可制御, 不可観測部分を取り除くことにより,

$$\hat{K} = D_{\pi 1}^T \begin{bmatrix} \hat{A}_s & B_{\hat{K}1} & B_{\hat{K}2} \\ \hat{C}_1 & I_m & 0_{(m \times p)} \\ 0_{(m+n) \times n} & 0_{(m+n) \times m} & 0_{(m+n) \times p} \\ \frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}} \hat{C}_2 & 0_{(p \times m)} & -\frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}} I_p \end{bmatrix} \quad (65)$$

を得る。ただし,

$$\begin{aligned} B_{\hat{K}1} &= \hat{B}_{\pi 1} + \begin{bmatrix} B_1^T & 0 \end{bmatrix}^T \\ B_{\hat{K}2} &= \frac{1}{\varepsilon} P \hat{C}_2^T + \begin{bmatrix} L_1^T & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

である。以上より, 次の定理が成り立つ。

【定理 1】 ある正数 β に対して, (58) 式の Riccati 方程式が (59) 式を安定にする半正定解 P をもつならば, (3), (4) 式の補間制御対象 G に対して, 固定コントローラ

$$K = \text{DHM}(\hat{K}; U_1), \quad \forall U_1 \in BH^\infty \quad (66)$$

は制御系を安定にする。

4.3 補間コントローラの導出

(41)~(46) 式を用いると, 補題 3a の (31) 式における $T_{a2} - \beta I$, T_{b2} は,

$$\begin{bmatrix} T_{a2} - \beta I \\ T_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_1 & (2-\beta)I \\ \bar{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

と表わされる。ただし、

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{L1} & -B_1 F_2 + L_1 C_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_{F2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{L2} & -B_2 F_1 + L_2 C_1 \\ 0 & 0 & 0 & A_{F1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T & B_2^T & B_1^T \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{C}_1 = \begin{bmatrix} F_1 & -F_2 & F_2 & -F_1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & -C_1 \end{bmatrix}$$

である。上記の $T_{a2} - \beta I$, T_{b2} に対して, (31) 式を満たす R_{12} が存在するための必要十分条件は, 補題 4 より Riccati 方程式

$$\begin{aligned} P \left(\bar{A} + \frac{2-\beta}{(2+\beta)^2} \bar{B}_1 \bar{C}_1 \right)^T &+ \left(\bar{A} + \frac{2-\beta}{(2+\beta)^2} \bar{B}_1 \bar{C}_1 \right) P \\ &- \frac{1}{(2+\beta)^2} P \left(\frac{(2+\beta)^2}{\varepsilon} \bar{C}_2^T \bar{C}_2 - \bar{C}_1^T \bar{C}_1 \right. \\ &\left. - \frac{(2-\beta)^2}{(2+\beta)^2} \bar{C}_1^T \bar{C}_1 \right) P + \bar{B}_1 \bar{B}_1^T + \varepsilon I = 0 \end{aligned} \quad (68)$$

において

$$\begin{aligned} \bar{A}_s &= \bar{A} + \frac{2-\beta}{(2+\beta)^2} \bar{B}_1 \bar{C}_1 - \frac{1}{(2+\beta)^2} P \\ &\times \left(\frac{(2+\beta)^2}{\varepsilon} \bar{C}_2^T \bar{C}_2 - \bar{C}_1^T \bar{C}_1 - \frac{(2-\beta)^2}{(2+\beta)^2} \bar{C}_1^T \bar{C}_1 \right) \end{aligned} \quad (69)$$

を安定にする半正定解 P が存在することである。このとき, R_{12} は以下のように表わされる。

$$R_{12} = \text{DHM}(\Pi_2; U_2), \quad \forall U_2 \in BH^\infty \quad (70)$$

ただし、

$$\Pi_2 = D_{\pi 2}^T \begin{bmatrix} \bar{A}_s & \bar{B}_{\pi 1} & \frac{1}{\varepsilon} P \bar{C}_2^T \\ \bar{C}_1 & I_m & 0_{m \times 2p} \\ 0_{(m+n) \times n} & 0_{(m+n) \times m} & 0_{(m+n) \times 2p} \\ \frac{2+\beta}{\sqrt{\varepsilon}} \bar{C}_2 & 0_{2p \times m} & -\frac{2+\beta}{\sqrt{\varepsilon}} I_{2p} \end{bmatrix}, \quad (71)$$

$$\bar{B}_{\pi 1} = \frac{1}{(2+\beta)^2} \left((2-\beta) \bar{B}_1 + \frac{(2-\beta)^2}{(2+\beta)^2} P \bar{C}_1^T + P \bar{C}_1^T \right)$$

であり, $D_{\pi 2}$ は

$$J_2 = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_{(m+n+2p)} \end{bmatrix}, \quad D_{V2} = \begin{bmatrix} \frac{2-\beta}{(2+\beta)} I_m & 0 \\ I_m & 0 \\ 0 & I_n \\ 0_{2p \times m} & 0_{2p \times n} \end{bmatrix}$$

に対して、

$$D_{\pi 2}^T J_2 [D_{\pi 2} \quad D_{V2}] = [J_2 \quad 0]$$

を満たす任意の行列である。

さて, (5), (6) 式および (24) 式によって表わされる補間コントローラは DHM を用いれば、

$$K = \text{DHM}\{Z_a; [R_1 \quad R_2]\}, [R_1 \quad R_2] \in RH^\infty \quad (72)$$

$$\begin{aligned} Z_a &= \begin{bmatrix} \alpha Y_1 + (1-\alpha) Y_2 & \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2 \\ \begin{bmatrix} -\alpha \tilde{N}_1 \\ -(1-\alpha) \tilde{N}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha \tilde{D}_1 \\ (1-\alpha) \tilde{D}_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{L1} & 0 & \alpha B_1 & \alpha L_1 \\ 0 & A_{L2} & (1-\alpha) B_2 & (1-\alpha) L_2 \\ F_1 & F_2 & I_m & 0_{m \times p} \\ -C_1 & 0 & 0_{p \times m} & \alpha I_p \\ 0 & -C_2 & 0_{p \times m} & (1-\alpha) I_p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (73)$$

と表現できる。

4.2 と同様, (72) 式に (70) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} K &= \text{DHM}(Z_a; R_{12}) \\ &= \text{DHM}\{Z_a; \text{DHM}(\Pi_2; U_2)\} \\ &= \text{DHM}(\Pi_2 Z_a; U_2) \end{aligned} \quad (74)$$

と変形できるので, $\bar{K} \triangleq \Pi_2 Z_a$ を計算すればよい。(71), (73) 式を用いて, $\bar{K} = \Pi_2 Z_a$ を計算し, 不可制御, 不可観測部分を取り除くことにより、

$$\bar{K} = D_{\pi 2}^T \begin{bmatrix} \bar{A}_s & B_{\bar{K}1} & B_{\bar{K}2} \\ \bar{C}_1 & I_m & 0_{(m \times p)} \\ 0_{(m+n) \times n} & 0_{(m+n) \times m} & 0_{(m+n) \times p} \\ \frac{2+\beta}{\sqrt{\varepsilon}} \bar{C}_2 & 0_{(2p \times m)} & D_{\bar{K}22} \end{bmatrix} \quad (75)$$

を得る。ただし、

$$B_{\bar{K}1} = \bar{B}_{\pi 1} + B_a, \quad B_{\bar{K}2} = \frac{1}{\varepsilon} P C_a^T + L_a$$

$$D_{\bar{K}22} = -\frac{2+\beta}{\sqrt{\varepsilon}} \begin{bmatrix} \alpha I_p \\ (1-\alpha) I_p \end{bmatrix}$$

$$B_a = \begin{bmatrix} \alpha B_1^T & 0 & (1-\alpha) B_2^T & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$C_a = \begin{bmatrix} \alpha C_1 & -\alpha C_2 & (1-\alpha) C_2 & -(1-\alpha) C_1 \end{bmatrix}$$

$$L_a = \begin{bmatrix} \alpha L_1^T & 0 & (1-\alpha) L_2^T & 0 \end{bmatrix}$$

である。以上より, つぎの定理が成り立つ。

【定理2】 ある正数 β に対して, (68) 式の Riccati 方程式が (69) 式を安定にする半正定解 P をもつとき, (3), (4) 式の補間制御対象 G に対して, 補間コントローラ

$$K = \text{DHM}(\bar{K}; U_2), \quad \forall U_2 \in BH^\infty \quad (76)$$

は制御系を安定化する.

(注意4) 上記のコントローラにおいて, $\alpha=1, \alpha=0$ とすれば, 補間コントローラを構成する K_1, K_2 が得られることは明らかである.

5. 同時安定化問題との関連

固定コントローラによって補間制御対象を安定化するには, 二つの基準モデル G_1, G_2 が同時安定化可能であることが必要であることは明らかである. しかし補間コントローラによって安定化する場合にはどうであろうか? 筆者らは, すでに, 制御対象が1入力1出力の場合について, 同時安定化可能性の必要性を示している⁶⁾. 本節では, 多入力多出力の場合にも必要であることを示す.

同時安定化問題に関しては, 次の補題⁷⁾ が知られている.

【補題5】 G_1, G_2 は (9) 式を満たす既約分解で (1), (2) 式のように表わされるとする. そして,

$$W_a = X_1 N_2 + Y_1 D_2 \quad (77)$$

$$W_b = \tilde{D}_1 N_2 - \tilde{N}_1 D_2 \quad (78)$$

とにおいて, W_b の実軸上 (無限遠点も含む) の不安定なブロッキング零点を

$$0 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_m \quad (79)$$

と定義する. このとき, G_1 と G_2 が同時安定化可能である必要十分条件は, $\det W_a(\sigma_i), i=1, \dots, m$ が一定符号をとることである.

この補題5を用いることにより, 以下の命題が証明できる.

【命題】 (3), (4) 式で表わされる補間制御対象が安定化可能であるためには, G_1 と G_2 が同時安定化可能であることが必要である.

(証明) まず, (77), (78) 式の W_a, W_b の定義は,

$$\begin{bmatrix} W_a \\ W_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & X_1 \\ -\tilde{N}_1 & \tilde{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad (80)$$

と書ける. (9) 式を考慮すると,

$$\begin{bmatrix} Y_1 & X_1 \\ -\tilde{N}_1 & \tilde{D}_1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} D_1 & -\tilde{X}_1 \\ N_1 & \tilde{Y}_1 \end{bmatrix} \quad (81)$$

であるので, (80) 式より,

$$\begin{bmatrix} D_1 & -\tilde{X}_1 \\ N_1 & \tilde{Y}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_a \\ W_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad (82)$$

が成り立つ.

いま, G_1, G_2 が同時安定化可能でないとしよう. このとき補題5より,

$$\det W_a(\sigma_j) < 0 \quad (83)$$

となる j が存在する. $s = \sigma_j$ において, $W_b(\sigma_j) = 0$ であるので, (82) 式より,

$$\begin{bmatrix} D_1(\sigma_j) \\ N_1(\sigma_j) \end{bmatrix} W_a(\sigma_j) = \begin{bmatrix} D_2(\sigma_j) \\ N_2(\sigma_j) \end{bmatrix} \quad (84)$$

が成り立つ. これを利用すると補間制御対象の表現における (4) 式の N, D において,

$$\begin{aligned} N(\sigma_j) &= N_1(\sigma_j) \{ \alpha I + (1-\alpha) W_a(\sigma_j) \} \\ D(\sigma_j) &= D_1(\sigma_j) \{ \alpha I + (1-\alpha) W_a(\sigma_j) \} \end{aligned} \quad (85)$$

が成り立つ. ここで補間制御対象の安定化可能性を考えるため,

$$\Omega = \tilde{N}_K N + \tilde{D}_K D \quad (86)$$

がユニモジュラとなるような $\tilde{N}_K, \tilde{D}_K$ の存在性を考える. $s = \sigma_j$ における (86) 式に (85) 式を代入すると,

$$\begin{aligned} \Omega(\sigma_j) &= \{ \tilde{N}_K(\sigma_j) N_1(\sigma_j) + \tilde{D}_K(\sigma_j) D_1(\sigma_j) \} \\ &\quad \times \{ \alpha I + (1-\alpha) W_a(\sigma_j) \} \end{aligned} \quad (87)$$

となる. $\alpha = 0$ のとき,

$$\det [\alpha I + (1-\alpha) W_a(\sigma_j)] = \det W_a(\sigma_j) < 0$$

$\alpha = 1$ のとき,

$$\det [\alpha I + (1-\alpha) W_a(\sigma_j)] = 1 > 0$$

なので,

$$\det [\alpha_0 I + (1-\alpha_0) W_a(\sigma_j)] = 0$$

となるような α_0 が存在する. したがって $\alpha = \alpha_0$ において Ω をユニモジュラとするような $\tilde{N}_K, \tilde{D}_K$ は存在せず, 補間制御対象を安定化するコントローラは存在しない.

(証明終)

(注意5) 上記の証明は, 補間制御対象のみに着目した, コントローラの構成に独立な議論である. したがって, 二つの基準モデルが同時安定化可能でない場合には, いかなるコントローラによっても既約分解の選び方によらず補間制御対象は安定化できないことを意味する.

6. おわりに

多入力多出力の補間制御対象に対して, 制御系を安定化する固定コントローラおよび補間コントローラが存在するための十分条件を, ある H^∞ 制御問題の可解性に帰

着させ、状態空間表現によるコントローラの設計法を示した。そして、二つの基準モデルの同時安定化可能性が、補間制御対象が安定化可能であるために必要であることを、多入力多出力系についても明らかにした。

本論文では、補間制御対象を時変系として記述していないので、制御対象の変化の過渡状態における挙動は考察していない。しかし、動作状態が変化し制御対象の特性が変化したとき、それぞれの定常状態における制御系の安定性が保証されるという意味で、実際の制御においても十分有効性をもつ。

なお、基準モデルの既約分解の選び方が異なれば、補間によって表現された制御対象は異なる。そして、補間制御対象の安定化可能性も既約分解の選び方に依存している。したがって、実際の制御系設計においては、どのような既約分解の補間を用いるかが制御対象のモデリングとの関連において重要となる。

なお、本論文では基準モデルの数は2としたが、これを $n (> 2)$ とした場合については、参考文献13)において考察している。

参 考 文 献

- 1) T. Tanaka, Y. Aizawa and H. Eguchi : Multiple Operating Conditions Model and Design of Gain Scheduler ; 第34回自動制御連合講演会前刷, pp. 239~242 (1991)
- 2) 山口, 田鍋, 村上, 後藤 : ファジー連想記憶システムを用いた適応制御 ; 電気学会論文誌 (C), Vol. 111, No. 1, pp. 40~46 (1990)
- 3) 保田 : 構造的不確かさをもつシステムのロバスト安定化 ; 電子情報通信学会論文誌 (A), Vol. J75-A, No. 5, pp. 926~933 (1992)
- 4) B. K. Ghosh : An Approach to Simultaneous System Design, Part II : Nonswitching Gain and Dynamic Feedback Compensation by Algebraic Geometric Methods ; SIAM J. Control and Optimization, Vol. 26, No. 4, pp. 919~963 (1988)
- 5) Z. Chen, Y. Hayakawa and S. Fujii : On the Stabilizability of Plants with Variable Operating Conditions ; 第22回制御理論シンポジウム資料, pp. 55~60 (1993)
- 6) 村松, 池田 : 動作状態が変化する制御対象の安定化 ; 第15回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, pp. 53~56 (1992)
- 7) C. Abdallah, P. Dorato, F. Perez and D. Docampo : From Nyquist to Kharitonov : Synthesis of Robust Controllers ; Preprints of 12th IFAC World Congress, Vol. I, pp. 41~44 (1993)
- 8) 前田, 杉江 : アドバンスド制御のためのシステム制御理論, 朝倉書店 (1990)
- 9) M. Vidyasagar and H. Kimura : Robust Controllers for Uncertain Linear Multivariable Systems ; Automatica, Vol. 22, No. 1, pp. 85~94 (1986)
- 10) C. N. Nett, C. A. Jacobson and M. J. Balas : A Connection Between State-Space and Doubly Coprime Fractional Representations ; IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-29, No. 9, pp. 831~832 (1984)
- 11) 小出, 原 : 虚軸上に零点を有する H^∞ 制御問題の解法 ; 第13回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, pp. 11~14 (1991)
- 12) 村松, 細江 : RH^∞ 標準問題の直接的解法 ; 第19回制御理論シンポジウム資料, pp. 119~124 (1990)
- 13) 西野, 池田, 村松 : 動作状態が変化するプラントに対する補間コントローラ ; 第15回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, pp. 67~70 (1992)