1次元非線形離散時間システムのフラクタルな 不変集合境界の存在条件*

安田 寿彦**・砂原 善文***

Existing Conditions of Fractal Boundaries of Invariant Sets of a Class of One-Dimensional Nonlinear Discrete-Time Systems*

Toshihiko YASUDA** and Yoshifumi SUNAHARA***

In this paper, fractal basin boundaries are investigated in connection with a class of one-dimensional nonlinear discrete-time systems.

Noting that the basin is an invariant set of the nonlinear function, describing the system dynamics, conditions, under which the Hausdorff dimension of boundaries of invariant sets is positive, are obtained and the existence of fractal basin boundaries is shown. Furthermore, it is demonstrated that if periodic points with period three exist, then fractal basin boundaries appear.

Secondly, the result obtained is applied to explore the basin boundary of a class of one-dimensional nonlinear sampled-data control systems. Illustrative examples together with numerical experiments show the existence of fractal basin boundaries. These theoretical and numerical results reveal that in order to determine the sampling period, it is necessary to take into account the structure of the basin of the equilibrium.

1. 緒言

非線形特性を有するシステムの状態量の漸近的挙動は、初期状態に依存する。たとえば、漸近安定な平衡点が存在しても、すべての初期状態に対して、状態量が時間経過とともにこの平衡点に収束するとは限らない。したがって、初期状態から状態量の漸近的挙動を予測するには、平衡点へ収束する初期状態の集合、すなわち平衡点の吸引域を求めることが必要となる。

さらに、システムの非線形特性は、吸引域境界に境界という設定が不可能なほど複雑なフラクタルと称される構造を生成する場合がある^{1)~8)}。吸引域境界がフラクタル構造を有する場合、いくら拡大を行っても簡単な構造が現れることがないので、初期状態が吸引域に含まれるか否かを判定することが困難になり、初期状態からシス

テムの漸近的挙動、すなわち最終的な状態を予測することが難しくなる。

本論文では、1次元差分方程式

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$x_n \in R^1, f: R^1 \rightarrow R^1$$

によって記述される非線形システムにおいて、吸引域境界がフラクタルな構造となるのは、システムの非線形特性を記述する非線形関数 f がどのような条件を満たす場合かを明らかにする。(1)式で記述される1次元離散時間システムは、乱流現象⁹⁾、生態系の個体数の不規則変動^{10), 11)}、時系列解析¹²⁾あるいは電気回路系^{13), 14)}、サンプル値制御系^{15)~17)}あるいはニューラルネットワーク^{18), 19)}のカオスの挙動など自然科学、工学の様々な分野における非線形現象の解明に重要な役割を果たしている。

フラクタルな集合の複雑さを定量化し理論的解析を行うためには、点は0次元、線は1次元、面は2次元という通常の次元を非整数値にまで拡張したフラクタル次元^{1), 4)~8)}を用いる。本研究では吸引域境界の複雑さを定量化しフラクタルか否かを判定するために、フラクタル次元の一つであるハウスドルフ次元を用いた。2.では、

* 原稿受付 1993年7月28日

** 滋賀県立短期大学 機械工学科 Shiga Prefectural Junior College; 1900 Hassaka-cho, Hikone city, Shiga 522, JAPAN

*** 岡山理科大学 工学部 Okayama University of Science; 1-1 Ridai-cho, Okayama city, Okayama 700, JAPAN

Key Words: fractal, invariant set, periodic points with period three, Hausdorff dimension, nonlinear sampled-data control system.

まずハウスドルフ次元の定義とその性質を示す。さらに、吸引域が不変性と呼ばれる条件を満たすことを示し考察の準備を整える。3. で吸引域境界のハウスドルフ次元について考察し、フラクタルな吸引域境界の存在を明らかにする。最後に、4. では 3. で求めたフラクタルな吸引域境界存在条件を応用して、非線形サンプル値制御系に出現するフラクタルな吸引域境界について考察する。

2. 準備

2.1 ハウスドルフ次元の定義

フラクタルな構造をした集合に関する理論的解析を行うためには、フラクタル次元を導入して集合の複雑さを定量化しなければならない。本論文では吸引域境界のフラクタル性を判定するために、種々あるフラクタル次元の中から、つぎのように定義されるハウスドルフ次元^{6)~8)}を用いる。

集合 $A \subset \mathbf{R}^1$ の直径 $|A|$ を

$$|A| = \sup \{|y_1 - y_2| : y_1, y_2 \in A\}$$

とする。集合 $E \subset \mathbf{R}^1$ および集合 $U_i \subset \mathbf{R}^1$ の組 $\{U_i, 0 < |U_i| \leq \rho\}$ が

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

を満たすならば、集合の組 $\{U_i\}$ を集合 E の ρ -被覆と呼び、特に $\{U_i\}$ が高々可算個の要素からなるとき可算 ρ -被覆と呼ぶ。

集合 S を $\mathbf{R}^1$ の部分集合、 s を非負の定数とし、任意の $\rho > 0$ に対し、

$$H_\rho^s(S) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset S, 0 < |U_i| \leq \rho \right\}$$

とする。ただし、最小値は集合 S のすべての可算 ρ -被覆 $\{U_i\}$ に対してとるものとする。上記のような記号を用いて、集合 S のハウスドルフ s 次元測度が次式によって定義される。

$$H^s(S) = \lim_{\rho \rightarrow 0} H_\rho^s(S)$$

【定義】 (ハウスドルフ次元)⁶⁾ 任意の集合 $S \subset \mathbf{R}^1$ に対し、つぎのような条件を満たす定数 $\dim_H(S)$ が一意に存在する。この定数 $\dim_H(S)$ を集合 S のハウスドルフ次元と呼ぶ。

$$H^s(S) = \begin{cases} \infty, & 0 < s < \dim_H(S) \\ 0, & \dim_H(S) < s < \infty \end{cases}$$

ハウスドルフ次元を用いると、つぎのように吸引域境界のフラクタル性を判定できる。考察対象としている状態量が 1 次元のシステムにおいて、吸引域境界は点の集合である。点の次元は 0 であるが、吸引域境界を構成する点集合のハウスドルフ次元が 0 より大きいときにフラ

クタルな境界と称され、いくら拡大しても吸引域の簡単な構造を得ることができない^{1), 6)~8)}。したがって、吸引域境界のハウスドルフ次元が正となるか否かを判定することによって、吸引域境界がフラクタルな構造となるか否かを判別することができる。

2.2 吸引域の不変性

点 x と集合 E の距離 $d(x, E)$ をつぎのように定義する。

$$d(x, E) = \inf \{|x - y| : y \in E\}$$

関数 $f(\cdot)$ の n 回合成写像を

$$f^n(\cdot) = f(f^{n-1}(\cdot))$$

とし、初期状態を x_0 とする離散時間システム (1) 式の時刻 n における状態量を、初期状態を明確にするため、つぎのように記述する。

$$x_n(x_0) = f^n(x_0)$$

ある初期状態 $\hat{x}_0$ に対する離散時間システム (1) 式の漸近的挙動は、集合

$$S_\omega(\hat{x}_0) = \left\{ x : \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, \bigcup_{k=n}^{\infty} x_k(\hat{x}_0)) = 0 \right\}$$

に含まれる状態量によって構成される。 $S_\omega(\hat{x}_0)$ に収束する初期状態の集合、すなわち $S_\omega(\hat{x}_0)$ の吸引域は

$$\begin{aligned} A(S_\omega(\hat{x}_0)) &= \left\{ x_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n(x_0), S_\omega(\hat{x}_0)) = 0 \right\} \\ &= \left\{ x_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x_0), S_\omega(\hat{x}_0)) = 0 \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

と定義される。

任意の集合 $S \subset \mathbf{R}^1$ に対し、非線形関数 $f: \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$ の逆写像を

$$f^{-1}(S) = \{x : f(x) \in S\}$$

とする。ある集合 $S \subset \mathbf{R}^1$ が

$$f^{-1}(S) = S \quad (3)$$

を満たすとき、集合 S を非線形関数 f の不変集合と呼ぶ^{6), 8)}。非線形関数 f が離散時間システム (1) 式の動特性を定める非線形関数であるとき、非線形関数 f の不変集合を離散時間システム (1) 式の不変集合と呼ぶ。

【補題 1】 離散時間システム (1) 式の吸引域 A は、システムの動特性を定める非線形関数 $f: \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$ の不変集合である。すなわち

$$f^{-1}(A) = A$$

となる。

補題 1 の証明は付録 1 に示す。

つぎの 3. では、補題 1 に示された吸引域の不変性を用いて、フラクタルな吸引域境界存在条件を導出する。

このとき、不変性以外の吸引域の性質は不必要なので、フラクタル境界存在条件は、自動的に不変集合のフラクタル境界存在条件となる。そこで、考察対象を吸引域境界に限定せず、不変集合のフラクタル境界存在条件の形で定理を記述する。

3. 不変集合境界のハウスドルフ次元

本節で示す定理は、離散時間システム(1)式の不変集合 S の境界 ∂S のハウスドルフ次元が

$$\dim_H(\partial S) > 0$$

となる条件、すなわち不変集合境界がフラクタルとなる条件を示す。補題1より吸引域は不変集合であるから、定理の不変集合 S を吸引域 A に置き換えるだけで、これらの定理は離散時間システム(1)式のフラクタルな吸引域境界の存在条件を与える。

【定理1】離散時間システム(1)式において、つぎのような条件を満たす二つの開区間 A および B が存在するものとする。

条件1 $A \cap B = \emptyset$

条件2 $f(A) \supset \{A \cup B\}$, $f(B) \supset \{A \cup B\}$

条件3 任意の $u_1, u_2 \in A$ あるいは $u_1, u_2 \in B$ に対し、

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leq \frac{|u_1 - u_2|}{c}$$

を満たす正の定数 $c < 1$ が存在する。

条件4 $\partial S \cap (A \cup B) \neq \emptyset$

このとき、正の数 $\delta < 1$ が存在して、不変集合 S の境界 ∂S のハウスドルフ次元は

$$\dim_H(\partial S) \geq -\frac{\log 2}{\log c + \log \delta} > 0 \quad (4)$$

となる。

証明の記述にはつぎのような作用素を用いる。任意の集合 $K \subset (A \cup B)$ に対し、

$$f_{AB}^{-1}(K) = \bigcup_{y \in K} \{(f^{-1}(y) \cap A) \cup (f^{-1}(y) \cap B) \cap \partial S\} \quad (5)$$

とし、 $f_{AB}^{-(n+1)}(\cdot) = f_{AB}^{-1}(f_{AB}^{-n}(\cdot))$, $n \geq 1$ とする。

さらに、定理1の証明に必要な補題2および3を示す。補題2が成立するためには、集合 S が非線形関数 f の不変集合でなければならない。このことは補題2を証明する付録2の中で明らかになる。したがって、集合 S が不変集合であることは、定理1が成立するための必要条件である。補題3は参考文献6)あるいは8)より引用したものである。

【補題2】条件1~3が満たされるならば、不変集合 S の境界を構成する任意の点 $P \in \partial S \cap (A \cup B)$ に対し、正の数 $\delta = \delta(P) < 1$ が存在し、任意の整数 $n \geq 1$ に

対し、

$$P_n = f_{AB}^{-n}(P) \subset \partial S$$

を被覆するために、長さ $c^{n-1}\delta$ の区間が少なくとも $2^{n-1}+1$ 個必要となる。

【補題3】集合 E の任意の可算 ρ -被覆 $\{U_i\}$ が

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \geq 1$$

を満たすならば、

$$\dim_H(E) \geq s$$

となる。

(定理1の証明) 条件4より、

$$P \in \partial S \cap (A \cup B) \quad (6)$$

を満たす不変集合境界 P が少なくとも1点存在する。

補題2より、(6)式を満たす任意の P および任意の整数 $n \geq 1$ に対し、

$$P_n = f_{AB}^{-n}(P)$$

を被覆するために、長さ $c^{n-1}\delta$ の区間が少なくとも $2^{n-1}+1$ 個必要となるような正の定数 $\delta < 1$ が存在する。

そこで、点集合 P_n の部分集合の $c^{n-1}\delta$ -被覆を

$$\{V_i\} = \{V_i : |V_i| = c^{n-1}\delta, P_n \cap V_i \neq \emptyset, 1 \leq i \leq 2^{n-1}+1\}$$

とする。 $\{U_j\}$ を不変集合境界 ∂S の可算 ρ -被覆、すなわち

$$\{U_j\} = \{U_j : 0 < |U_j| \leq \rho, \partial S \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\}$$

とする。 P_n の定義より $P_n \subset \partial S$ であり、さらに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c^{n-1}\delta = 0$$

であるから、 ∂S の任意の可算 ρ -被覆 $\{U_j\}$ に対して、十分大きな n をとれば、 $\{V_i\}$ を

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \supset \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}+1} V_i \quad (7)$$

を満たすように構成できる。

(7)式が成立しているときに、Fig.1に示すように、 $\{V_i\}$ の m 個の要素が $\{U_j\}$ の1つの要素 U_j に含まれることがある。このような場合、任意の $k > 0$ に対して、不等式

$$|U_j|^k \geq m(c^{n-1}\delta)^k \quad (8)$$

Fig.1 Components of $\{V_i\}$ and $\{U_j\}$

が成立する^{9),8)}。不等式 (8) 式を用いれば, (7) 式より,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^k \geq \sum_{i=1}^{2^{n-1}+1} |V_i|^k \\ = (2^{n-1}+1)(c^{n-1}\delta)^k > 2^{n-1}(c\delta)^{(n-1)k} \quad (9)$$

を得る。定数 k を

$$k = -\frac{\log 2}{\log c + \log \delta} > 0$$

とすれば,

$$2^{n-1}(c\delta)^{(n-1)k} = 1$$

であるから, 不等式 (9) 式より, 不変集合境界 ∂S の任意の可算 ρ -被覆 $\{U_j\}$ に対し, 不等式

$$\sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^k > 1 \quad (10)$$

が成立することが導かれる。したがって, 補題 3 より,

$$\dim_H(\partial S) \geq -\frac{\log 2}{\log c + \log \delta} > 0 \quad (11)$$

を得る。(証明終)

定理 1 の条件 1~3 を満たす非線形関数の例は, Fig. 2 に示すような単峰形の 1 階連続微分可能な非線形関数である。しかしながら, サンプル値制御系など工学系あるいは生態系などのフラクタルな吸引域境界を解析する際には, 定理 1 の条件 1~3 は非線形関数 $f(\cdot)$ に対する条件が厳しく, これらの条件を満たす関数は限られる。つぎの定理 2 では, 定理 1 を用いて, 3 周期点²⁰⁾とフラクタルな不変集合境界との関係を明らかにする。定理 2 の条件は定理 1 よりも適用できる関数が多く, 4. では定理 2 を用いてサンプル値制御系のフラクタル吸引域境界について検討する。

Fig. 2 A unimodal mapping and open sets A, B in conditions 1 to 3

【定理 2】 離散時間システム (1) 式において,

条件 5 $f(r) \leq p < f(p) = q < f(q) = r$

条件 6 任意の $u_1, u_2 \in]p, r[= \{x : p < x < r\}$ に対して,

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leq \frac{|u_1 - u_2|}{c}$$

を満たす正の定数 $c < 1$ が存在する。

条件 7 $]p, r[\cap \partial S \neq \emptyset$

を満たす 3 点 p, q および r が存在するならば, 不変集合境界 ∂S のハウスドルフ次元は $\dim_H(\partial S) > 0$ である。

(証明) つぎのような離散時間システムを考える。

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{f}(\tilde{x}_n) \quad (12)$$

ただし, (12) 式において, $\tilde{f}(\tilde{x}_n) = f(f(\tilde{x}_n))$ である。離散時間システム (1) 式の不変集合 S はその定義 (3) 式より

$$\tilde{f}^{-1}(S) = f^{-1}(f^{-1}(S)) = f^{-1}(S) = S$$

を満たす。すなわち, 離散時間システム (1) 式の不変集合は離散時間システム (12) 式においても不変集合である。したがって, 離散時間システム (12) 式の不変集合境界がフラクタルならば, 離散時間システム (1) 式の不変集合境界もフラクタルとなる。

以上の考察より, 定理 2 の条件 5~7 が満たされるとき, 離散時間システム (12) 式の不変集合境界がフラクタルであることを示すことによって, 定理 2 を証明できる。以下では定理 2 の条件 5~7 が満たされる場合, 離散時間システム (12) 式において, 定理 1 の条件 1~4 が成立することを示し, 離散時間システム (12) 式の不変集合境界がフラクタルであることを示す。

条件 6 を満たす非線形関数 $f(\cdot)$ は連続であること, および条件 5 より,

$$f([p, q]) \supset]f(p), f(q)[=]q, r[\quad (13)$$

$$f([q, r]) \supset]f(r), f(q)[\supset]p, r[\quad (14)$$

となる。(13) および (14) 式より

$$\tilde{f}([p, q]) = f^2([p, q]) \supset f([q, r]) \supset]p, r[\quad (15)$$

$$\tilde{f}([q, r]) = f^2([q, r]) \supset f([p, r]) \supset]p, r[\quad (16)$$

である。(15) および (16) 式は, $A =]p, q[$ および $B =]q, r[$ とすれば, 非線形関数 $\tilde{f}(\cdot) = f^2(\cdot)$ が定理 1 の条件 2 を満たすことを示している。また, $A =]p, q[$ および $B =]q, r[$ が条件 1 を満たすことは明らかである。

さらに, 条件 6 が成立するとき,

$$|\tilde{f}(u_1) - \tilde{f}(u_2)| = |f(f(u_1)) - f(f(u_2))| \\ < \frac{|f(u_1) - f(u_2)|}{c} \\ < \frac{|u_1 - u_2|}{c^2} \quad (17)$$

となる。 $0 < c < 1$ のとき $0 < c^2 < 1$ であることに注意すれば, (17) 式は非線形関数 $\tilde{f}(\cdot)$ が定理 1 の条件 3 と同等の条件を満たしていることを示している。

$A =]p, q[$ および $B =]q, r[$ としたとき, 定理2の条件7は定理1の条件4と同じである.

以上の考察より, 定理2の条件5~7が満たされる場合, 離散時間システム(12)式において, 開区間 $A =]p, q[$ および $B =]q, r[$ が定理1の条件1~4を満たすこと, すなわち離散時間システム(12)式の不変集合境界がフラクタルとなることが示された. (証明終)

定理2の条件5を満たす3点 p, q および r は, 拡張された3周期点と呼ばれる²⁰⁾. 定理2は3周期点が存在するときにフラクタルな不変集合境界が出現することを示している.

4. サンプル値制御系のフラクタル吸引域境界

4.1 システムモデル

3.の定理2を用いて, Fig. 3に示すようなサンプル値制御系

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t) \\ u(t) &= g(r - y(kT)), kT \leq t < (k+1)T \end{aligned} \quad (18)$$

のフラクタルな吸引域境界について考察する. ただし, $g(\cdot)$ は制御要素の非線形性を記述する非線形関数で, この例題では

$$g(z) = 2z - \frac{3}{\pi} \tan^{-1} 2z$$

とする. (Fig. 3(b))

まず, サンプル値制御系(18)式の状態量の時間的変化を記述する差分方程式を導出する. 線形微分方程式

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) \\ \text{の解が} \\ x(t) &= \exp(at)x(t_0) \\ &+ \exp(at) \int_{t_0}^t \exp(-a\tau)bu(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (19)$$

となることに注意して, (19)式に $t_0 = nT, t = (n+1)T$

および $u(\tau) = g(r - cx(nT)), nT \leq \tau < (n+1)T$ を代入すれば, サンプル値制御系(18)式の状態量 $x(nT)$ と $x((n+1)T)$ の間の関係を与える差分方程式

$$\begin{aligned} x((n+1)T) &= \exp(aT)x(nT) + \exp(a(n+1)T) \\ &\times \int_{nT}^{(n+1)T} \exp(-a\tau) d\tau \cdot bg(r - cx(nT)) \end{aligned} \quad (20)$$

を得る. さらに, (20)式の積分を計算して,

$$\begin{aligned} x((n+1)T) &= \exp(aT)x(nT) \\ &+ \frac{b}{a} \{\exp(aT) - 1\} g(r - cx(nT)) \end{aligned} \quad (21)$$

を得る. ここで, 変数変換

$$x_n = r - cx(nT)$$

を行えば, サンプル値制御系(18)式の状態量の挙動を記述する差分方程式

$$x_{n+1} = f_s(x_n) \quad (22)$$

$$f_s(x) = (\alpha + 2\beta)x - \frac{3\beta}{\pi} \{\tan^{-1} 2z\} + \gamma \quad (23)$$

を得る. ただし,

$$\begin{aligned} \alpha &= \exp(aT), \beta = \frac{bc}{a} \{1 - \exp(aT)\}, \\ \gamma &= r \{1 - \exp(aT)\} \end{aligned} \quad (24)$$

である.

4.2 平衡点の安定性

この例題では, サンプル値制御系を記述する微分方程式(18)式に含まれるパラメータ a, b, c および目標値 r をつぎのように設定した.

$$a = 20, b = 5, c = 5, r = -0.2$$

(24)式に示すように, 差分方程式(22)式に含まれるパラメータ α, β および γ には, サンプル時間間隔 T が含まれる. したがって, 差分方程式(22)式の非線形関数 $f_s(\cdot)$ の形状は, サンプル時間間隔 T に依存する.

Fig. 3 A sampled-data control system Eq. (18)

 Fig. 4 The shape of the nonlinear function $f_s(\cdot)$ with $T=0.075$

Fig. 4 にサンプル時間間隔 $T = 0.075$ の場合の、非線形関数 $f_s(\cdot)$ の形状を示す。Fig. 4 に示されるように、離散時間システム (22) 式はつぎのような三つの平衡点を有する。

$$x_e^{(1)} = -0.4486 \dots$$

$$x_e^{(2)} = -0.3222 \dots$$

$$x_e^{(3)} = 1.0210 \dots$$

これら平衡点における非線形関数 $f_s(\cdot)$ の接線の傾きは

$$\left. \frac{df_s}{dx} \right|_{x=x_e^{(1)}} = 0.3824 \dots$$

$$\left. \frac{df_s}{dx} \right|_{x=x_e^{(2)}} = 1.6508 \dots$$

$$\left. \frac{df_s}{dx} \right|_{x=x_e^{(3)}} = -2.6146 \dots$$

である。したがって、 $x_e^{(1)}$ は漸近安定な平衡点であるが、他の平衡点 $x_e^{(2)}$ および $x_e^{(3)}$ は不安定である。よって、離散時間システム (22) 式の漸近的挙動を予測するためには、平衡点 $x_e^{(1)}$ の吸引域

$$\Lambda(x_e^{(1)}) = \{x_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n(x_0), x_e^{(1)}) = 0\} \quad (25)$$

を得る必要がある。

サンプル時間間隔 $T = 0.075$ の場合、Fig. 4 に示すように拡張された 3 周期点 p, q, r が存在する。すなわち、定理 2 の条件 5 が成立する。非線形関数 $f_s(\cdot)$ が連続微分可能であるから、非線形関数 $f_s(\cdot)$ は定理 2 の条件 6 も満たす。

ここで、Fig. 4 の破線で囲まれた x 軸上の区間

$$I_f = [x_{\min}^{(2)}, x_{\max}^{(2)}]$$

を考える。ただし、Fig. 4 に示されるように

$$x_{\min}^{(2)} = \min\{x : f_s^2(x) = x\}$$

$$x_{\max}^{(2)} = \max\{x : f_s^2(x) = x\}$$

であり、もし初期状態 x_0 が区間 I_f に含まれないならば、離散時間システム (22) 式の状態量は正と負の値を交互にとりながら、振幅の絶対値が無限大へと発散してしまう。したがって、平衡点 $x_e^{(1)}$ の吸引域 $\Lambda(x_e^{(1)})$ は区間 I_f に含まれ、 $\Lambda(x_e^{(1)}) \subset I_f$ となる。

また、Fig. 4 に示す区間

$$I_0 = \{x : f_s(x) > x_{\max}^{(2)}\} \subset I_f \quad (26)$$

は、 $x_{\max}^{(2)}$ の定義より、明らかに $I_0 \subset \Lambda(x_e^{(1)})$ である。

以上のような考察より

- 平衡点 $x_e^{(1)} \in]p, r[$ は漸近安定である。したがって、 $x_e^{(1)}$ を含むある開区間 $I_e^{(1)}$ が存在し、 $I_e^{(1)} \subset \Lambda(x_e^{(1)})$ となる。
- 区間 $I_0 \subset]p, r[$ は平衡点 $x_e^{(1)}$ の吸引域には含まれない。

ので、開区間 $]p, r[$ の中に必ず $\Lambda(x_e^{(1)})$ の境界が存在する。すなわち定理 2 の条件 7 が成立している。

したがって、定理 2 よりサンプル時間間隔 $T = 0.075$ の場合には、吸引域 $\Lambda(x_e^{(1)})$ の境界はフラクタルな構造を示す。

4.3 数値実験

サンプル時間間隔 $T = 0.075$ の場合に出現するフラクタルな吸引域境界の形状を示すために、つぎのような数値実験を実施した。

- 区間 $[-2, 2]$ を 500 等分し、各分割点を差分方程式 (22) 式の初期状態として採用する。(Fig. 5 参照)
- 差分方程式 (22) 式を用いて、それぞれの初期状態から解過程 $x_n, n = 1, 2, 3, \dots$ を計算する。
- 400 回のくり返し計算の後、もし $|x_e^{(1)} - x_{400}| < 0.00001$ ならば、その初期状態は平衡点 $x_e^{(1)}$ の吸引域に含まれるものとして、領域

$$\{x : x_0 \leq x < x_0 + 0.008\}$$

に対応する帯状領域を黒く塗り潰す。(Fig. 5 参照)

Fig. 6 に平衡点 $x_e^{(1)}$ の吸引域を、上記の手順を用いて得た黒い帯状領域によって示す。黒い帯状領域の下に位置する初期状態では、解過程は平衡点 $x_e^{(1)}$ に収束する。

Fig. 5 Dividing points of an interval

Fig. 6 Fractal basin boundaries of the sampled-data control system Eq. (18)

一方、初期状態が空白領域の下に位置する場合には解過程は発散してしまう。

Fig. 6 (b) は区間 $[-0.7, -0.68]$ を再度 500 等分し上記のような手順で得た Fig. 6 (a) の拡大図である。さらに Fig. 6 (b) を拡大したものが Fig. 6 (c) である。これらの図は、拡大を行っても吸引域の簡単な構造を得ることができないので、初期状態が吸引域に含まれるか否かを判定することが極めて困難であり、システムの漸近的挙動を予測することが困難なことを示している。

5. 結 言

本研究では 1 次元離散型非線形システムにおいて、3 周期点が存在する場合にフラクタルな境界を有する不変集合が出現することを、不変集合境界のハウスドルフ次元の下限を求めることによって示した。この結果を非線形サンプル値制御系に適用し、1 次元非線形サンプル値制御系に、フラクタルな境界を有する吸引域が存在することを示した。

カントールの中央 3 分の 1 集合のような集合自体のハウスドルフ次元が非整数値の不変集合の場合、縮小写像の組によって生成されるフラクタル集合に関する研究結果²¹⁾によって、不変集合とハウスドルフ次元の関係が明らかにされている。しかしながら、吸引域自体がフラクタルな集合である場合、そのルベグ測度が 0 であるから、初期状態がそのような吸引域に含まれる確率は 0 である。すなわち、このような吸引域に初期状態が含まれる場合のシステムの挙動を観測することはできない。したがって、サンプル値制御系のような工学システムでは、吸引域自体のルベグ測度は正であるが、フラクタルな境界を有する吸引域の存在条件を求め、その出現防止策を検討することが重要となる。

参 考 文 献

- 1) S. W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott and J. A. York : Fractal Basin Boundaries ; *Physica* 17D, pp. 125~153 (1985)
- 2) C. Grebogi, E. Ott and J. A. York : Metamorphoses of Basin Boundaries in Nonlinear Dynamical Systems ; *Physical Review Letters*, Vol. 56, No. 10, pp. 1011~1014 (1985)
- 3) T. Endo and L. O. Chua : Bifurcation Diagrams and Fractal Basin Boundaries of Phase-Locked Loop Circuits ; *IEEE Trans. Circuits & Systems*, Vol. CAS-37, No. 4, pp. 535~540 (1990)
- 4) B. B. Mandelbrot : *Fractals ; Form, Chance and Dimension*, W. H. Freeman (1977)
- 5) B. B. Mandelbrot : *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman (1982)
- 6) K. J. Falconer : *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge Univ. Press (1985)
- 7) 高安 : フラクタル, 朝倉書店 (1986)
- 8) 石村 (貞), 石村 (園) : フラクタル数学, 東京図書 (1990)
- 9) E. N. Lorenz : Deterministic Non-Periodic Flow ; *J. Atmos. Sci.*, Vol. 20, pp. 130~141 (1963)
- 10) R. M. May : Biological Population with Nonoverlapping Generations : Stable Points, Stable Cycles and Chaos ; *Science*, Vol. 186, pp. 645~647 (1974)
- 11) R. M. May : Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics ; *Nature*, Vol. 261, pp. 459~467 (1976)
- 12) T. Kohda and K. Murao : Approach to Time Series Analysis for One-Dimensional Chaos Based on Frobenius-Perron Operator ; *IEICE Trans.*, Vol. E73, No. 6, pp. 793~800 (1990)
- 13) 西尾, 稲葉, 森 : 非線形負性インダクタを含む自動振動回路に発生するカオス ; 電子情報通信学会論文誌, Vol. J75-A, No. 4, pp. 754~761 (1992)
- 14) Y. Nishio and S. Mori : Chaotic Phenomena in Nonlinear Circuits with Time-Varying Resistors ; *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E76-A, No. 3, pp. 467~475 (1993)
- 15) J. Baillieul, R. W. Brockett and R. B. Washburn : Chaotic Motion in Nonlinear Feedback Systems ; *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. CAS-27, No. 11, pp. 990~997 (1980)
- 16) 荒谷 : 非線形制御プロセスからのカオスとフラクタルの発生 ; システム/制御/情報, Vol. 34, No. 2, pp. 98~105 (1990)
- 17) 平井, 足立 : 周期解とカオスとの共存現象 ; 電子情報通信学会技術研究報告非線形問題, NLP-88-9, pp. 1~6 (1988)
- 18) 石山, 合原, 伊藤, 宇都宮 : カオスニューロンモデルの情報理論的解析 ; 電子情報通信学会論文誌, Vol. J75-A, No. 8, pp. 1379~1388 (1992)
- 19) N. Kanou, Y. Horio, K. Aihara and S. Nakamura : Current-Mode Circuit of a Chaotic Neuron Model ; *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E76-A, No. 4, pp. 642~644 (1993)
- 20) T. Y. Li and J. A. Yorke : Period Three Implies Chaos ; *Am. Math. Mon.*, Vol. 89, pp. 985~992 (1975)
- 21) J. E. Hutchinson : *Fractals and Self Similarity* ; *Indiana Univ. Math. J.*, Vol. 30, No. 5, pp. 713~747 (1981)

付 録

付録 1【補題 1】の証明

逆写像 $f^{-1}(\cdot)$ の定義より, $x \in f^{-1}(\Lambda(S_\omega))$ ならば, $f(x) \in \Lambda(S_\omega)$ である. したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(f(x)), S_\omega) = 0 \quad (A1)$$

となる. (A1) 式より,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), S_\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{n+1}(x), S_\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(f(x)), S_\omega) = 0 \end{aligned}$$

となるので, $\Lambda(S_\omega)$ の定義より $x \in \Lambda(S_\omega)$ であることがわかる. したがって, $x \in f^{-1}(\Lambda(S_\omega))$ ならば, $x \in \Lambda(S_\omega)$ であること, すなわち $f^{-1}(\Lambda(S_\omega)) \subset \Lambda(S_\omega)$ が示された.

逆に, $x \in \Lambda(S_\omega)$ ならば, $f^{-1}(\cdot)$ の定義より, 任意の $y \in f^{-1}(x)$ に対して,

$$f(y) = x \in \Lambda(S_\omega)$$

である. よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(f(y)), S_\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), S_\omega) = 0$$

となる. したがって, $x \in \Lambda(S_\omega)$ ならば, $f^{-1}(x) \subset \Lambda(S_\omega)$ であること, すなわち $f^{-1}(\Lambda(S_\omega)) \subset \Lambda(S_\omega)$ が示された.

以上より, 補題 1 の $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$ が証明された.

付録 2【補題 2】の証明

まず補題 2 の証明に必要な二つの補題を示す.

【補題 A1】条件 2 および 3 が満たされるとき, 任意の $Q \in \partial S \cap (A \cup B)$ に対し,

$$f^{-1}(Q) \cap A \cap \partial S \neq \emptyset$$

$$f^{-1}(Q) \cap B \cap \partial S \neq \emptyset$$

である.

(証明) 条件 3 が成立するとき, 関数 $f(\cdot)$ が集合 A 上で連続であることと, 条件 2 の $f(A) \supset A$ より, 任意の $Q \in \partial S \cap (A \cup B)$ および任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 近傍

$$B_\varepsilon(x) = \{y : |y - x| < \varepsilon\}$$

の像 $f(B_\varepsilon(x))$ が $Q = f(x)$ の近傍となるような点 $x \in (f^{-1}(Q) \cap A)$ が存在する.

不変集合の定義 (3) 式より

$$f(S) = S$$

であることに注意すれば, $B_\varepsilon(x) \subset S$ のとき,

$$f(B_\varepsilon(x)) \subset f(S) = S \quad (A2)$$

を得るが, (A2) 式は $f(B_\varepsilon(x))$ が $Q \in \partial S$ の近傍であることと矛盾する.

逆に, $B_\varepsilon(x) \cap S \neq \emptyset$ ならば, 任意の $x' \in B_\varepsilon(x)$ に対して $f(x') \notin S$ となる. よって,

$$f(B_\varepsilon(x)) \cap S = \emptyset$$

となり, $f(B_\varepsilon(x))$ が $Q \in \partial S$ の近傍であることと矛盾する.

したがって, 任意の ε に対して, $B_\varepsilon(x)$ は集合 S に属する点と属さない点を必ず含む. このことは点 x が集合 S の境界であることを示しているので,

$$f^{-1}(Q) \cap A \cap \partial S \neq \emptyset$$

を得る.

$f^{-1}(Q) \cap B \cap \partial S \neq \emptyset$ も同様の手順によって証明される. (証明終)

【補題 A2】条件 1~3 が満たされるとき, n 個の点集合 $\{P_i : P_i \in \partial S \cap (A \cup B), 1 \leq i \leq n\}$ が

$$\min_{i,j} \{|P_i - P_j| : i \neq j\} > \delta'$$

を満たすならば, 点集合 $f_{AB}^{-1}(\{P_i\})$ を長さ $c\delta'$ の区間で被覆するためには, 少なくとも $2n-1$ 個の区間が必要である.

(証明) 条件 3 より, 任意の $v_1, v_2 \in (A \cup B)$ に対して,

$$\begin{aligned} \inf \{|u_1 - u_2| : u_1 \in (f^{-1}(v_1) \cap A), \\ u_2 \in (f^{-1}(v_2) \cap A)\} &\geq c|v_1 - v_2| \end{aligned} \quad (A3)$$

が成立する. 補題 A2 の仮定 $|P_i - P_j| > \delta', i \neq j$ に注意して, (A3) 式を用いれば,

$$\begin{aligned} \inf \{|Q_i - Q_j| : Q_i \in (f^{-1}(P_i) \cap A), \\ Q_j \in (f^{-1}(P_j) \cap A)\} \\ \geq c|P_i - P_j| > c\delta' \end{aligned} \quad (A4)$$

を得る. 補題 A1 より

$$f^{-1}(P_i) \cap A \cap \partial S \neq \emptyset$$

に注意して, (A4) 式を用いれば, 任意の $i \neq j$ に対して,

$$\begin{aligned} \inf \{|x - y| : x \in (f^{-1}(P_i) \cap A \cap \partial S), \\ y \in (f^{-1}(P_j) \cap A \cap \partial S)\} > c\delta' \end{aligned}$$

となる. 上式より, 点集合

$$\bigcup_{i=1}^n \{f^{-1}(P_i) \cap A \cap \partial S\}$$

を被覆するためには, 長さ $c\delta'$ の区間が n 個必要である. 同様にして, 点集合

$$\bigcup_{i=1}^n \{f^{-1}(P_i) \cap B \cap \partial S\}$$

を被覆するためには, 長さ $c\delta'$ の区間が n 個必要である. ただし, 条件 1 を満たす開区間 A と B の距離は不

明であるから、開区間 A と B の境界を含む長さ $c\delta'$ の区間が、開区間 A に含まれる1点と開区間 B に含まれる1点を含む可能性がある。以上の考察より、点集合

$$f_{AB}^{-1}(\{P_i\}) = \bigcup_{i=1}^n \{f^{-1}(P_i) \cap A \cap \partial S\} \\ \cup \bigcup_{i=1}^n \{f^{-1}(P_i) \cap B \cap \partial S\}$$

を被覆するためには、長さ $c\delta'$ の区間が少なくとも $2n-1$ 個必要であることが示された。(証明終)

(補題2の証明)

$P \in \{\partial S \cap (A \cup B)\}$ を満たす任意の点 P に対し、

$$P_1 = f_{AB}^{-1}(P)$$

を考える。補題 A1 より、

$$P_A \in (f^{-1}(P) \cap A \cap \partial S) \subset P_1$$

$$P_B \in (f^{-1}(P) \cap B \cap \partial S) \subset P_1$$

が必ず存在する。 $P_A \in A$, $P_B \in B$ かつ A および B が開区間であるから、

$$|P_A - P_B| > \delta \quad (A5)$$

を満たす正の数 $\delta < 1$ が存在する。したがって、 P_1 を被覆するためには長さ δ の区間が、少なくとも $N_1 = 2$ 個必要である。

不等式 (A5) 式および補題 A2 より、集合 $f_{AB}^{-1}(\{P_A, P_B\})$ を被覆するためには、長さ $c\delta$ の区間が少なくとも $N_2 = 3$ 個必要である。

$$P_2 = f_{AB}^{-2}(P) = f_{AB}^{-1}(\{P_1\}) \supset f_{AB}^{-1}(\{P_A, P_B\})$$

に注意すれば、点集合 P_2 を被覆するためには、長さ $c\delta$ の区間が少なくとも $N_2 = 3$ 個必要であることが導かれる。したがって、 P_2 から3点 x_1, x_2, x_3 を選び、点集合 P'_2 を任意の $x_i, x_j \in P'_2, 1 \leq i < j \leq 3$ に対し

$$|x_i - x_j| > c\delta \quad (A6)$$

が成立するように構成できる。

不等式 (A6) 式および補題 A2 より点集合 $f_{AB}^{-1}(P'_2)$ を被覆するためには、長さ $c^2\delta$ の区間が少なくとも $N_3 = 3 \times 2 - 1 = 5$ 個必要である。

$$P_3 = f_{AB}^{-3}(P) = f_{AB}^{-1}(P_2) \supset f_{AB}^{-1}(P'_2)$$

に注意すれば、 P_3 を被覆するために、長さ $c^2\delta$ の区間が少なくとも5個必要であることが導かれる。

点集合 $P_n = f_{AB}^{-n}(P)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ を被覆するために必要な長さ $c^{n-1}\delta$ の区間数の下限を N_n とすれば、上記のような手順を繰り返すことによって、 N_n と N_{n+1} の関係式

$$N_{n+1} = 2N_n - 1, N_1 = 2 \quad (A7)$$

を得る。漸化式 (A7) 式の一般項は

$$N_n = 2^{n-1} + 1$$

である。以上の考察より、任意の整数 $n \geq 1$ に対し、点集合 $P_n = f_{AB}^{-n}(P)$ を被覆するためには、長さ $c^{n-1}\delta$ の区間が少なくとも $2^{n-1} + 1$ 個必要であることが導かれた。(証明終)