産業用多関節ロボットアーム制御系の線形モデルの 近似誤差の評価とモデルの妥当性*

後藤 聡**・中村 政俊**・久良 修郭***

Propriety of Linear Model of Servo System for Industrial Articulated Robot Arms and Evaluation of Its Linearization Error*

Satoru GOTO**, Masatoshi NAKAMURA** and Nobuhiro KYURA***

In this paper, propriety of the linearized servo system model for an industrial articulated robot arm was discussed. Industrially, the contour control of the robot arm has been implemented in such a way that an objective trajectory of the robot arm is divided into small segments and actuators of the servo motors have been controlled to pursue the divided segments, sequentially. In the conventional controller, the model of the robot arm control system has been regarded as the linear dynamic model in working coordinates. We consider this problem and analyzed the error of the linearized model. Based on the error analysis, we derive the permissible working region where the linearization error is negligibly small. In the permissible region, the robot arm dynamics can be expressed by a linear dynamic model in working coordinates.

1. はじめに

アーク溶接, スポット溶接, 塗装, 組立等幅広い分野で稼働している産業用ロボットの多くは, 多関節の機構を有している. 多関節ロボットアームのダイナミクスは, その慣性行列がロボットアームの姿勢によって変化するため, ロボットアームを構成する各軸が干渉し, また, 遠心力とコリオリ力の項や重力項等の非線形項を含む複雑な微分方程式で表わされる. このような複雑なダイナミクスを持つ多関節ロボットアームの高速高精度制御には, 一般に非常に複雑な制御器が必要とされる^{1)~5)}. しかし, 産業界で用いられている多関節ロボットアームにおいては, 減速比を大きくとることにより負荷慣性の影響を小さくし, また, 平行リンク機構を用いて慣性行列の非対角成分の影響を小さくしているため, 各関節のアクチュエータであるサーボモータをそれぞれ独立に制御

する手法がとられている⁶⁾. 産業用ロボットアームの位置決めや輪郭制御では, 作業座標系での目標軌道を細かく分割し, その分割点に対応する関節角を各軸に対して計算し, それぞれの軸の関節角が分割された関節座標系における目標関節角まで一定速度で動くように, サーボモータの回転角の制御が行われる⁷⁾. その制御において, 作業座標系におけるロボットアームのダイナミクスは, 作業座標系における各座標軸で経験的に線形独立とみて, ロボットアームの輪郭制御における誤差解析や, 新しい作業への適用可否判断が行われているが, その線形独立の仮定の是非を理論的に解明したい.

本研究では, この作業座標における各座標軸独立の線形近似モデル (以下, 作業線形モデルと呼ぶ) の線形近似誤差を理論的に導出し, ロボットアームの可動領域内で線形近似誤差の少ない領域である線形近似可能領域 (以下, 作業線形近似可能領域と呼ぶ) を明らかにした. 作業線形近似可能領域内では, 作業座標系における目標軌道の分割や各軸ごとの制御器を含むロボットアーム制御系を, 作業座標系の各座標軸で独立の線形の制御対象としてとらえることができる. そのため, 関節座標系における特性, すなわち, サーボモータとその制御器の特性だけで新しい作業における適用可否判断ができ, また,

* 原稿受付 1993年7月30日

** 佐賀大学 理工学部 Saga University; 1 Honjomachi, Saga city, Saga 840, JAPAN

*** ㈱安川電機 メカトロ研究所 Yaskawa Co., Ltd.; 480 Kamifujisawa, Iruma city, Saitama 358, JAPAN

Key Words: industrial articulated robot arm, linear dynamic model, linearization error, working coordinates, permissible region.

制御性能を向上させるための指令値の修正等を作業座標系において各座標軸独立に安心して行うことができ、さらに、より高速高精度のロボットアーム制御理論を開発した際に^{8),9)}、その理論の実系への適用の限界が明らかにできる利点を有する。

本論文の構成は、作業線形モデルを2.で説明し、作業線形近似可能領域を3.で導出し、4.で計算機シミュレーション結果と実機ロボットを用いた実験結果を示す。最後に5.でまとめを述べる。

2. 産業用ロボットアーム制御系の作業座標系における作業線形モデル

2.1 産業用ロボットアーム制御系

産業用ロボットアームの目標軌道への追従制御は、Fig.1に示すように、作業座標系における目標軌道を微小区間に分割し、その分割点に対応する関節角を各軸に対して計算し、それぞれの軸の関節角が分割された関節座標系における目標関節角まで一定速度で動くようにサーボモータの回転角の制御を行い、各軸のサーボモータをその移動量だけ回転させ、アームの機構による座標変換でアーム先端が作業座標系の目標軌道に沿って動くように行われる⁷⁾。目標軌道は作業座標系で与えられ、ロボットアームの制御は非線形変換を伴う関節座標系で各軸ごとに独立に行われ、追従軌道は再び非線形変換を伴う作業座標系で評価されている。目標軌道の細分割による制御方式でロボットアームを制御するとき、産業用ロボットアームの制御系は、通常、作業座標系で各座標軸独立線形として近似している。この作業座標系での線形近似の妥当性を議論する(3.)ための準備として、このロボットアーム制御系の作業座標系における実軌道と作業線形モデルによる軌道を導出する。

2.2 2軸ロボットアームの実軌道

多軸ロボットの特性を議論するに当たって、2軸の部分でその本質的な議論を行い、3.4で多軸へと議論を拡

Fig. 2 Structure of an articulated robot arm of two-degree-of-freedom

張する。Fig.2に、直線で表わす二つの剛体リンクが、◎で表わす関節でつながって、先端がこの平面上を自由に動き得る2軸ロボットアームの概略図を示す。図中の (α, β) は関節座標系の関節角、 (x, y) は作業座標系におけるアームの先端の位置、 l_1, l_2 はそれぞれ第1リンクと第2リンクの長さを表わす。この2軸ロボットアームは多軸ロボットアームの基本的な構成をなしており、スカル型ロボットアームでは、平面の位置決めをこの2軸で行っている。

はじめに、作業座標系と関節座標系との関係を明確にするために、関節座標 (α, β) から作業座標 (x, y) への変換(順変換)と作業座標 (x, y) から関節座標 (α, β) への変換(逆変換)を示す。順変換は

$$x = l_1 \cos \alpha + l_2 \cos(\alpha + \beta) \quad (1a)$$

$$y = l_1 \sin \alpha + l_2 \sin(\alpha + \beta) \quad (1b)$$

であり、逆変換は

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{l_2 \sin \beta}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (2a)$$

$$\beta = \pm \cos^{-1} \left(\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \right) \quad (2b)$$

Fig. 1 A Block diagram of a servo system for an industrial articulated robot arm

で与えられる。ここで、(2b)式の符号は、作業座標系の1点を指定するのに、関節座標系では二通りの可能性があることを表わしている。

つぎに、関節座標系におけるロボットアームのダイナミクスを与える。産業用ロボットアームでは、減速比を大きくとって負荷慣性を小さくし、また、平行リンク機構を用いて、慣性行列の非対角成分の影響を小さくしているため、アクチュエータであるサーボモータを各軸ごとに独立に制御する手法でロボットアームの制御を行っている⁶⁾。実際に稼働している産業用ロボットアームにおいては、ロボットアームの移動速度が0.25 [m/s]以下程度のそれほど大きくない場合、負荷慣性による各軸の干渉や、コリオリ力等の非線形項を無視することができ、ロボットアームのダイナミクスはアクチュエータであるサーボモータとその制御器を合わせて、各軸独立に1次系

$$\dot{\alpha}(t) = -K_p \alpha(t) + K_p u_a(t) \quad (3a)$$

$$\dot{\beta}(t) = -K_p \beta(t) + K_p u_\beta(t) \quad (3b)$$

で表現できる¹⁰⁾。(3)式で表わされるモデルを、関節線形モデルと呼ぶ。ここで、 $u_a(t)$ 、 $u_\beta(t)$ はそれぞれ1軸、2軸の角度入力を表わし、 K_p は位置ループの比例ゲインである。Fig. 3に1次系モデルのブロック線図を示す。本研究では各軸のダイナミクスは関節座標系で(3)式の線形で表わせる、すなわち、関節線形モデルは実ロボットのダイナミクスを表現することを認め^{6), 10)}、この仮定のもとで以下のすべての議論を展開する。

Fig. 3 A block diagram of a simplified first order model for a servo motor and its controller in joint coordinates

目標軌道を細分割した微小区間に対してロボットアームがどのように追従するかを調べる。目標軌道の細分割によって分割されたそれぞれの軌道に対して、その分割された一つの微小区間の作業座標系での始点と終点をそれぞれ (x_0, y_0) 、 (x_T, y_T) 、関節座標系での始点と終点をそれぞれ (α_0, β_0) 、 (α_T, β_T) で表わす。この微小区間における関節座標と作業座標との関係はFig. 4で与えられる。 (x_0, y_0) と (α_0, β_0) 、 (α_T, β_T) と (x_T, y_T) の関係は、作業座標系と関節座標系との関係が(1)式で表わせることから

Fig. 4 A segment of a divided objective trajectory

$$x_0 = l_1 \cos \alpha_0 + l_2 \cos(\alpha_0 + \beta_0) \quad (4a)$$

$$y_0 = l_1 \sin \alpha_0 + l_2 \sin(\alpha_0 + \beta_0) \quad (4b)$$

$$x_T = l_1 \cos \alpha_T + l_2 \cos(\alpha_T + \beta_T) \quad (5a)$$

$$y_T = l_1 \sin \alpha_T + l_2 \sin(\alpha_T + \beta_T) \quad (5b)$$

と表わされる。

産業用ロボットアームにおいては、分割された微小区間に対して各軸ごとに一定角速度入力 (v_a, v_β) が与えられることから、ロボットアームのダイナミクス(3)式の各軸に対する角度入力 $(u_a(t), u_\beta(t))$ は

$$u_a(t) = \alpha_0 + v_a t, \quad v_a = \frac{\alpha_T - \alpha_0}{T} \quad (6a)$$

$$u_\beta(t) = \beta_0 + v_\beta t, \quad v_\beta = \frac{\beta_T - \beta_0}{T} \quad (6b)$$

と与えられる。ここで、 T は目標軌道の細分割における微小時間であり、分割の始点における時刻は0とする。

(6)式で表わされる角度入力に対するロボットアームの作業座標系における位置を導出する。ロボットアームの初期時刻における目標軌道と実軌道の位置は等しい $(\alpha(0), \beta(0)) = (\alpha_0, \beta_0)$ とすると、ロボットアームの関節座標系での位置は、(6)式の角度入力を(3)式に代入して微分方程式を解くことにより

$$\alpha(t) = \alpha_0 + v_a \delta(t) \quad (7a)$$

$$\beta(t) = \beta_0 + v_\beta \delta(t) \quad (7b)$$

となる。ここで

$$\delta(t) = t + \frac{e^{-K_p t} - 1}{K_p} \quad (8)$$

である。このときのロボットアームの作業座標系の位置は、(7)式を非線形変換である(1)式に代入することにより

$$x(t) = l_1 \cos(\alpha_0 + v_a \delta(t)) + l_2 \cos(\alpha_0 + \beta_0 + (v_a + v_\beta) \delta(t)) \quad (9a)$$

$$y(t) = l_1 \sin(\alpha_0 + v_a \delta(t)) + l_2 \sin(\alpha_0 + \beta_0 + (v_a + v_\beta) \delta(t)) \quad (9b)$$

と計算できる。この(9)式がロボットアーム先端の作業座標系における実軌道を表わす。この実軌道に対応させて、本研究で問題とする、作業座標系において各座標軸独立に線形近似を行った線形近似モデルである作業線形モデルにおける作業線形近似軌道を導出する。

2.3 2軸ロボットアームの作業線形近似軌道

作業座標系でロボットアーム制御系を x 軸 y 軸それぞれ独立に線形近似すると

$$\dot{\hat{x}}(t) = -K_p \hat{x}(t) + K_p u_x(t) \quad (10a)$$

$$\dot{\hat{y}}(t) = -K_p \hat{y}(t) + K_p u_y(t) \quad (10b)$$

となる。ここで、 $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ は線形近似されたロボットアームの作業座標系での位置を表わし、 $(u_x(t), u_y(t))$ は作業座標系での位置入力を表わす。この(10)式が本研究で議論の対象となる作業線形モデルである。線形近似された(10)式で、目標軌道をFig.4のように細分割したときの微小区間に対するロボットアームの応答を導出する。ここで、ロボットアームの初期時刻における目標軌道と作業線形近似軌道の位置は等しい $(\hat{x}(0), \hat{y}(0)) = (x_0, y_0)$ とする。厳密には関節座標系での入力である(6)式に対応する作業座標系における入力は、(1)式の座標変換によって導出する必要があり、この作業座標系における入力は作業座標系では一定速度の入力とはならないが、作業座標系での入力も一定速度であるものとして

$$u_x(t) = x_0 + v_x t, \quad v_x = \frac{x_T - x_0}{T} \quad (11a)$$

$$u_y(t) = y_0 + v_y t, \quad v_y = \frac{y_T - y_0}{T} \quad (11b)$$

と近似し、その近似誤差はほとんど無視できる。この(11)式の入力を(10)式の作業線形モデルに代入し、微分方程式を解くことによりロボットアームの作業線形近似軌道は

$$\hat{x}(t) = x_0 + v_x \delta(t) \quad (12a)$$

$$\hat{y}(t) = y_0 + v_y \delta(t) \quad (12b)$$

となる。すなわち、ロボットアームの作業座標系における実軌道(9)式に対応する作業線形近似軌道は(12)式で与えられる。

3. 作業線形モデルの妥当性と適用範囲

3.1 作業線形モデルの近似誤差

ロボットアーム制御系の実軌道(9)式と作業線形近似軌道(12)式を比較することにより、本研究での議論の対象となる作業線形モデルの近似精度を評価する。作業座標系における近似誤差は(9)式と(12)式の差

$$e_x(t) = \hat{x}(t) - x(t) \quad (13a)$$

$$e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t) \quad (13b)$$

である。(13)式を作業線形近似誤差と呼ぶ。(13)式を空間に関する項と時間に関する項に分けて評価するために、ロボットアームの実際の作業座標系の位置を表わす(9)式を (α_0, β_0) からの移動量が小さいものとして、テイラー展開を用いて1次近似すると

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) = & l_1 \{ \cos(\alpha_0) - \sin(\alpha_0) v_a \delta(t) \} \\ & + l_2 \{ \cos(\alpha_0 + \beta_0) - \sin(\alpha_0 + \beta_0) (v_a + v_\beta) \delta(t) \} \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) = & l_1 \{ \sin(\alpha_0) + \cos(\alpha_0) v_a \delta(t) \} \\ & + l_2 \{ \sin(\alpha_0 + \beta_0) + \cos(\alpha_0 + \beta_0) (v_a + v_\beta) \delta(t) \} \end{aligned} \quad (14b)$$

と計算される。実軌道と(14)式のテイラー展開1次近似軌道の間には

$$\begin{aligned} x(t) = & \tilde{x}(t) + l_1 o(v_a \delta(t)) + l_2 o((v_a + v_\beta) \delta(t)) \\ = & \tilde{x}(t) + o(\delta(t)) \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} y(t) = & \tilde{y}(t) + l_1 o(v_a \delta(t)) + l_2 o((v_a + v_\beta) \delta(t)) \\ = & \tilde{y}(t) + o(\delta(t)) \end{aligned} \quad (15b)$$

の関係がある¹¹⁾。ここで、(15)式中の $o(\delta(t))$ は $\delta(t)$ よりも高位の微小数を表わす。三角不等式を用いると、実軌道と作業線形近似軌道の誤差の大きさは、(12)式と(14)式から

$$\begin{aligned} |\hat{x}(t) - x(t)| \leq & |\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)| + |\tilde{x}(t) - x(t)| \\ = & |\varepsilon_x \delta(t)| + |o(\delta(t))| \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} |\hat{y}(t) - y(t)| \leq & |\hat{y}(t) - \tilde{y}(t)| + |\tilde{y}(t) - y(t)| \\ = & |\varepsilon_y \delta(t)| + |o(\delta(t))| \end{aligned} \quad (16b)$$

と抑えることができる。ここで、

$$\varepsilon_x = v_x + y_0 v_a + l_2 \sin(\alpha_0 + \beta_0) v_\beta \quad (17a)$$

$$\varepsilon_y = v_y - x_0 v_a - l_2 \cos(\alpha_0 + \beta_0) v_\beta \quad (17b)$$

であり、ロボットアームの位置と速度に依存し、時間には依存しない誤差項である。 $\delta(t)$ が充分小さいときには、(15)式の $o(\delta(t))$ の項が無視できる。したがって作業線形近似誤差は

$$e_x(t) \approx \varepsilon_x \delta(t) \quad (18a)$$

$$e_y(t) \approx \varepsilon_y \delta(t) \quad (18b)$$

と近似することができる。すなわち、 $\delta(t)$ が十分小さい、言い替えると、目標軌道の分割間隔が十分小さければ、作業線形近似誤差は(18)式で表わすことができる。(18)式は、(17)式のロボットアームの位置に依存する項 $(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$ と(8)式の時間に依存する項 $\delta(t)$ との積で与えられる。(17)式の $(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$ はロボットアームの位置 (x_0, y_0) 、 (α_0, β_0) と移動速度 (v_x, v_y) 、 (v_a, v_β) との関数となっている。ここで、ロボットアームの位置を関節座標で表現した (α_0, β_0) は、(2)式の逆変換により作

業座標系で表現することが可能であり、また、関節座標系での移動速度も(6)式により $(v_\alpha, v_\beta) = ((\alpha_T - \alpha_0)/T, (\beta_T - \beta_0)/T)$ で表わされ、(2)式の逆変換により作業座標系 $(x_0, y_0), (x_T, y_T)$ で表現できるため、(18)式は作業座標系におけるロボットアームの位置 $(x_0, y_0), (x_T, y_T)$ で表現することができる。この(18)式が着目する作業線形近似誤差を表わす式であり、この大きさを評価することにより、ロボットアーム制御系の作業線形モデルの妥当性と作業線形近似可能領域を導出することができる。

3.2 作業線形モデルの定量的評価

ロボットアームの作業座標系における(10)式の作業線形モデルの作業線形近似誤差が小さい領域、すなわち、作業線形近似可能領域を定量的に評価する。Fig. 5に作業座標系において、点線で囲まれたロボットアームの可動領域内において、0.2[m]ごとに分割された188点のそれぞれの始点 (x_0, y_0) (図中の・)から矢印の方向にロボットアームを動かした場合の作業線形近似誤差の位置依存項 $(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$ の値(図中の・からでている線分)を(17)式で計算した結果を示す。アームの長さは $l_1 = 0.7$ [m], $l_2 = 0.9$ [m], 移動速度は $v_x = 0.1$ [m/s], $v_y = 0.1$ [m/s]とし、(2b)式の符号は常に正とした。Fig. 5から、作業線形モデルの近似精度はロボットアームの移動方向において、可動領域の限界近くになるほど悪くなることがわかる。また、アームが縮んでいる領域では、作業線形近似誤差が大きくなっている。作業線形近似誤差はアームの作業座標系における絶対的な位置に依存するのではなく、アームの姿勢に依存しているので、Fig. 5の作業線形近似誤差の結果は、矢印の方向にロ

Fig. 5 Linearization errors in working coordinates for various initial points (dots: initial positions of the robot arm; bars from the dots: linearization error vector $(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$)

ットアームを動かした場合を表わすのみではなく、どの方向に移動させる場合においても、Fig. 5を原点について回転させ、アームの移動方向を図中の矢印の方向に合わせると、その移動方向に対する作業線形近似誤差の位置依存項を表わす。

つぎに、視点を変えて、ロボットアームの一つの始点(原点からアームの先端位置までの距離 $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ で記述される)から、いろいろな移動方向によって作業線形近似誤差がどのように変化するかをみる。 $r = 0.25$ [m], 0.38 [m], 1.5 [m], 1.55 [m]の4点において、移動速度 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{0.02} \approx 0.141$ [m/s]で、初期位置を中心として一周 2π の各移動方向にアームを移動させた場合の、作業線形近似誤差の位置依存項の大きさ $\sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2}$ を計算した結果をFig. 6に示す。Fig. 6の横軸 θ がアームを移動させる角度を表わしており、アームを伸ばす方向を角度の基準 $\theta = 0$ [rad]にとり、 $\theta = \pi$ [rad]がアームを縮める方向を表わす。Fig. 6から、アームの可動領域(0.2 [m] $\leq r \leq 1.6$ [m])の限界近くである $r = 0.25$ [m]と 1.55 [m]において、アームが伸縮する動作において作業線形近似誤差が大きくなり、伸縮方向に垂直方向に移動する場合には、作業線形近似誤差は比較的に小さいことがわかる。

Fig. 6 Linearization errors for different moving directions θ and the positions r of the robot arm ($r = 0.25$ [m], $r = 0.38$ [m], $r = 1.5$ [m], $r = 1.55$ [m])

作業線形近似誤差(18)式は時間にも依存しているため、時間に依存する項 $\delta(t)$ の $K_p = 15$ [1/s]とした場合の時間推移をFig. 7に示す。微小時間 $T = 0.02$ [s]での $\delta(t)$ は 0.0027 [s]であり、Fig. 6より 0.38 [m] $\leq r \leq 1.5$ [m]の範囲ではアームをどの方向に移動させても、作業線形近似誤差の位置依存項の大きさ $\sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2}$ は 0.001 [m/s]以下であるので、作業線形近似誤差の最大値を計算すると 0.027 [mm]となり、この値は微小時間 $T = 0.02$ [s]での微小区間の長さ 0.141 [m/s] $\times$

Fig. 7 Time dependency of the linearization error $\delta(t)$

0.02[s] = 0.00282[m] の約 0.1% と非常に小さい値である。すなわち、ロボットアームの移動速度が 0.141[m/s] で目標軌道の分割における微小時間が 0.02[s] の場合に、目標軌道の分割の 1 区間において作業線形近似誤差が目標軌道の 0.1% 以内である作業線形近似可能領域は $0.38[\text{m}] \leq r \leq 1.5[\text{m}]$ といえることができる。

一般的なロボットアームに対する作業線形近似可能領域の導出手順を整理する。ロボットアームのリンク長 l_1, l_2 , 位置ループの比例ゲイン K_p , 目標軌道の分割における微小時間 T , アームの移動の速さ v , 原点からアームの先端位置までの距離 r (一般性を失うことなく x 軸上にアームの先端を置くものとする), 移動方向を θ としたときの作業線形近似誤差の大きさは以下に示す方法で求めることができる。

- (i) $(x_0, y_0) = (r, 0)$, $(x_T, y_T) = (x_0 + vT \cos \theta, y_0 + vT \sin \theta)$ とする。
- (ii) 逆変換 (2) 式を用いて (α_0, β_0) , (α_T, β_T) を求める。
- (iii) 作業座標系の移動速度 $(v_x, v_y) = (v \cos \theta, v \sin \theta)$, 関節座標系の移動速度 $(v_a, v_\beta) = ((\alpha_T - \alpha_0)/T, (\beta_T - \beta_0)/T)$ を計算する。
- (iv) (17) 式を用いて作業線形近似誤差の位置依存項 $(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$ を求め、その大きさ $\sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2}$ を計算する。
- (v) (8) 式を用いて作業線形近似誤差の時間依存項 $\delta(T)$ を計算する。
- (vi) 作業線形近似誤差の大きさ $\sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2} \delta(T)$ を計算する。

作業線形近似可能領域を、目標軌道の 1 区間において作業線形近似誤差が目標軌道の分割された微小区間 vT の $p\%$ 以下となる領域と定義すると、作業線形近似可能領域は (i) の原点からアームの先端位置までの距離 r をアームの可動領域で変化させたものと、(ii) のアームの移動方向 $\theta = 0 \sim 2\pi$ で作業線形近似誤差の大きさ $\sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2} \delta(T)$ を計算し、その大きさが設定した許容範囲 $pvT/100$ 以下であるか否かを判定することにより

求めることができる。

3.3 作業線形モデルの誤差の累積

今までの評価は、目標軌道の細分割において、分割された 1 区間について線形近似が妥当であるかを評価し、作業線形近似可能領域の導出法を示した。実際の目標軌道は分割軌道が繋ぎ合わされたものからなり、軌道全体としてみたときの区間ごとの作業線形近似誤差が時間の経過と共にどのように累積するかを調べる。

3.3.1 区間での作業線形近似誤差の推移

2.2 と 2.3 においては、分割された微小区間の始点において、目標軌道と実軌道と作業線形近似軌道の位置がすべて同じであるものとして、実軌道と作業線形近似軌道の導出を行ったが、本節では、始点での目標軌道と実軌道と作業線形近似軌道がそれぞれ違う値をとっているときの 1 区間における作業線形近似誤差を調べる。初期時刻の目標軌道の位置を作業座標と関節座標でそれぞれ (u_{x_0}, u_{y_0}) , (u_{a_0}, u_{β_0}) , 実軌道を作業座標と関節座標でそれぞれ (x_0, y_0) , (α_0, β_0) とし、作業線形近似軌道の位置を作業座標で $(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$ とする。

ロボットアームの実軌道は (3) 式に (6) 式を代入し、初期条件 (α_0, β_0) を用いて $(\alpha(t), \beta(t))$ について解き、(1) 式に代入すると

$$\begin{aligned} x(t) = & l_1 \cos(\alpha_0 + (u_{a_0} - \alpha_0) \sigma(t) + v_a \delta(t)) \\ & + l_2 \cos(\alpha_0 + \beta_0 + (u_{a_0} + u_{\beta_0} - \alpha_0 - \beta_0) \sigma(t) \\ & + (v_a + v_\beta) \delta(t)) \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} y(t) = & l_1 \sin(\alpha_0 + (u_{a_0} - \alpha_0) \sigma(t) + v_a \delta(t)) \\ & + l_2 \sin(\alpha_0 + \beta_0 + (u_{a_0} + u_{\beta_0} - \alpha_0 - \beta_0) \sigma(t) \\ & + (v_a + v_\beta) \delta(t)) \end{aligned} \quad (19b)$$

となる。ここで

$$\sigma(t) = 1 - e^{-K_p t} \quad (20)$$

である。作業線形近似軌道は (10) 式に (11) 式を代入し、初期条件 $(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$ を用いて $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ について解くと

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_0 + (u_{x_0} - \hat{x}_0) \sigma(t) + v_x \delta(t) \quad (21a)$$

$$\hat{y}(t) = \hat{y}_0 + (u_{y_0} - \hat{y}_0) \sigma(t) + v_y \delta(t) \quad (21b)$$

と計算される。実軌道と作業線形近似軌道の誤差を求めると、(21) 式と (19) 式との差から

$$\begin{aligned} e_x(t) = & \hat{x}(t) - x(t) \\ = & \hat{x}(t) - \hat{x}(t) + o(\sigma(t)) \\ = & (\hat{x}_0 - x_0) e^{-K_p t} + \varepsilon_x \delta(t) \\ & + \{(u_{x_0} - x_0) + y_0(u_{a_0} - \alpha_0) \\ & + l_2 \sin(\alpha_0 + \beta_0)(u_{\beta_0} - \beta_0)\} \sigma(t) + o(\sigma(t)) \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\begin{aligned}
e_y(t) &= \hat{y}(t) - y(t) \\
&= \hat{y}(t) - \tilde{y}(t) + o(\sigma(t)) \\
&= (\hat{y}_0 - y_0)e^{-K_p t} + \varepsilon_y \delta(t) \\
&\quad + \{(u_{y_0} - y_0) + x_0(u_{a_0} - \alpha_0) \\
&\quad - l_2 \cos(\alpha_0 + \beta_0)(u_{\beta_0} - \beta_0)\} \sigma(t) + o(\sigma(t))
\end{aligned} \tag{22b}$$

となる。ここで、式変形中 $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ は、実軌道 (19) 式のテイラー展開 1 次近似

$$\begin{aligned}
\hat{x}(t) &= x_0 + l_1 \sin \alpha_0 \{(u_{a_0} - \alpha_0) \sigma(t) + v_a \delta(t)\} \\
&\quad + l_2 \sin(\alpha_0 + \beta_0) \{(u_{a_0} + u_{\beta_0} - \alpha_0 - \beta_0) \sigma(t) \\
&\quad + (v_a + v_\beta) \delta(t)\} \\
\hat{y}(t) &= y_0 - l_1 \cos \alpha_0 \{(u_{a_0} - \alpha_0) \sigma(t) + v_a \delta(t)\} \\
&\quad - l_2 \cos(\alpha_0 + \beta_0) \{(u_{a_0} + u_{\beta_0} - \alpha_0 - \beta_0) \sigma(t) \\
&\quad + (v_a + v_\beta) \delta(t)\}
\end{aligned} \tag{23a}$$

である。(22) 式中の最後の式における第 1 項は初期時刻での実軌道 (x_0, y_0) と作業線形近似軌道 $(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$ との違いによる項で、第 2 項は 3.1 において目標軌道と実軌道と作業線形近似軌道が等しいものとして導出した作業線形近似誤差 (18) 式であり、第 3 項は目標軌道と実軌道との初期時刻における位置が違ふことによって生じた誤差項で、第 4 項は (23) 式のテイラー展開 1 次近似による誤差項である。

初期時刻における作業線形近似誤差 $(\hat{x}_0 - x_0, \hat{y}_0 - y_0)$ は、(22) 式中の最後の式における第 1 項により、時間と共に指数的に減衰していることがわかる。

3.3.2 作業線形近似誤差の累積

先の議論より、作業線形近似誤差の時間推移の特性は x 軸と y 軸共に等しいので、ここでは x 軸についてのみ考察する。作業線形近似誤差が微小間隔 T で増加するときの上限値を三角不等式を用いて調べる。目標軌道の分割の微小区間 T での作業線形近似誤差の大きさは (22) 式より

$$\begin{aligned}
|e_x(T)| &= |(\hat{x}_0 - x_0)e^{-K_p T} + \varepsilon_x \delta(T) + \{(u_{x_0} - x_0) + y_0(u_{a_0} - \alpha_0) \\
&\quad + l_2 \sin(\alpha_0 + \beta_0)(u_{\beta_0} - \beta_0)\} \sigma(T) + o(\sigma(T))| \\
&\leq E_0 e^{-K_p T} + E_1 \sigma(T)
\end{aligned} \tag{24}$$

と抑えられる。ここで $E_0 = |\hat{x}_0 - x_0|$, E_1 は 1 区間で新たに生じた作業線形近似誤差の大きさを表す正の定数であり、最後の式変形においては $\delta(T) = o(\sigma(T))$ を用いている。

同様にして目標軌道の分割の第 N 区間における作業線形近似誤差の大きさは

$$|e_x(NT)| \leq |e_x((N-1)T)| e^{-K_p T} + E_N \sigma(T) \tag{25}$$

と抑えることができる。(25) 式を逐次用いることによって、第 N 区間における作業線形近似誤差の大きさの上限を初期値からの作業線形近似誤差の累積によるものとして表現すると

$$\begin{aligned}
|e_x(NT)| &\leq |e_x((N-1)T)| e^{-K_p T} + E_N \sigma(T) \\
&\leq (|e_x((N-2)T)| e^{-K_p T} + E_{N-1} \sigma(T)) e^{-K_p T} \\
&\quad + E_N \sigma(T) \\
&\leq E_0 e^{-NK_p T} + E_1 \sigma(T) e^{-(N-1)K_p T} + \dots + E_N \sigma(T) \\
&\leq E_0 e^{-NK_p T} + E_{\max} \sigma(T) (e^{-(N-1)K_p T} \\
&\quad + e^{-(N-2)K_p T} + \dots + 1) \\
&= E_0 e^{-NK_p T} + E_{\max} \sigma(T) \frac{1 - e^{-NK_p T}}{1 - e^{-K_p T}} \\
&= E_0 e^{-NK_p T} + E_{\max} (1 - e^{-NK_p T})
\end{aligned} \tag{26}$$

となる。ここで、 $E_{\max} = \max(E_1, E_2, \dots, E_N)$ であり、導出過程で (20) 式の $\sigma(T)$ の値を用いた。(26) 式の第 1 項が初期時刻における作業線形近似誤差の影響を表わしており、第 2 項が目標軌道の分割の区間ごとに生じた作業線形近似誤差の累積値を表わしている。(26) 式より、分割数 N が大きくなっても作業線形近似誤差は発散することなく有限確定値 $E_{\max}$ に収束することがわかる。この $E_{\max}$ は、3.1 において目標軌道と実軌道と作業線形近似軌道が等しいものとして導出した作業線形近似誤差 (18) 式と、目標軌道と実軌道との違いによって生じた誤差によって定まる定数である。また、ロボットアームのダイナミクス特性を良くする、すなわち、位置ループの比例ゲイン K_p を大きくしても、作業線形近似誤差の累積値の上限は $E_{\max}$ となることがわかる。また、目標軌道の時間 NT を一定としたもとで、目標軌道の分割数を多くし、分割時間を短くする、すなわち、 $N \rightarrow \infty, T \rightarrow 0$ としても、作業線形近似誤差の累積値の上限は (26) 式により変化しないことがわかる。この誤差の上限を評価すると、3.2 と同じ条件でロボットアームを x 軸の正方向に $(-0.8 \text{ [m]}, 0.8 \text{ [m]})$ から $(-0.7 \text{ [m]}, 0.8 \text{ [m]})$ へ速さ 0.1 [m/s] で移動させた場合に、終点における実際の作業線形近似誤差は $6.89 \times 10^{-6} \text{ [m]}$ で、(26) 式から計算される誤差の上限は $6.10 \times 10^{-5} \text{ [m]}$ となる。誤差の上限で見積もった場合においても作業線形近似誤差は無視できる大きさである。

3.4 多軸ロボットアームへの拡張

今までの議論は、2 軸ロボットアームについて作業線形近似可能領域を導出した。この節では、2 軸ロボットアームから多軸ロボットアームに拡張した場合についての作業線形近似可能領域について考察する。第 3 軸が z 軸方向の直動となるスカラ型ロボットについては、作業

線形近似可能領域は2軸ロボットアームの作業線形近似可能領域を z 軸方向に平行移動させた領域となる。第4軸はエンドエフェクタ自身の回転であるので、作業線形近似する必要はない。つぎに、6軸ロボットアームの作業座標における位置決めを行うベースからの3軸について考える。この6軸ロボットアームの第3軸は、Fig.2やFig.5で表わされる2軸ロボットアームの y 軸を軸として回転するように取られる。したがって、この3軸からなるロボットアームの可動領域は、中心部が空洞の球となる。

Fig. 8 The third axis and x axis of a three-degree-of-freedom robot arm

第3軸と x 軸で作られる平面でのロボットアームをFig.8に示す。この第3軸と x 軸で作られる平面における線形近似と、2.で議論した2軸ロボットアームの線形近似の違いは、前者は1軸が回転でもう1軸が直動であるのに対して、後者は2軸とも回転であるという点のみである。すなわち、2.で論じた2軸ロボットアームの線形近似というのは、2軸の回転から2軸の直動への変換が可能であることを示したことになるので、第3軸と x 軸で作られる平面での1軸が回転で、もう1軸の直動から2軸の直動への変換は、2.で論じた2軸ロボットアームの線形近似の議論と同様になる。すなわち、第3軸と x 軸で作られる平面でのロボットアームは、作業座標系で線形近似可能であり、3軸のロボットアームの作業線形近似可能領域は、2軸ロボットアームの作業線形近似可能領域を y 軸を軸として回転した領域となる。ハンドに近い第3軸については、動作する作業空間が手首を中心とする球の表面と、エンドエフェクタ自身の回転となるため、作業線形近似する必要はない。

4. 計算機シミュレーションと実験結果

今まで議論してきた線形近似が、ロボットアームの制御性能にいかに関わるかを見るために計算機シミュレーションを行った。シミュレーションに用いたロボットアームは $l_1 = 0.7$ [m], $l_2 = 0.9$ [m], $K_p = 15$ [1/s]とし、目標軌道は速度 0.25 [m/s]で y 軸方向に 0.15 [m]移動し、その後 x 軸方向に 0.15 [m]移動する直線軌道とした。目標軌道として作業線形近似誤差が 0.2% 以内である作業線形近似可能領域 0.5 [m] $\leq r \leq 1.45$ [m]

内の $(x_0, y_0) = (-0.8$ [m], 0.65 [m])と可能領域外 $(x_0, y_0) = (-1.13137$ [m], 0.98137 [m])の二通りについてシミュレーションを行った。目標軌道の分割間隔は $T = 20$ [ms]とした。作業線形近似可能領域内の頂点 $(x, y) = (-0.8$ [m], 0.8 [m])における作業線形近似誤差は $(\epsilon_x, \epsilon_y) = (0.00068$ [m/s], -0.00009 [m/s])であり、目標軌道1区間で生じる作業線形近似誤差は、分割された目標軌道 0.002 [m]の 0.037% と非常に小さい値である。作業線形近似可能領域外の頂点 $(x, y) = (-1.13137$ [m], 1.13137 [m])における作業線形近似誤差は $(\epsilon_x, \epsilon_y) = (0.00000$ [m/s], 0.25000 [m/s])であり、目標軌道1区間で生じる作業線形近似誤差は、分割された目標軌道 0.002 [m]の 13.5% と大きな値となっている。

Fig. 9 A simulation result of the actual trajectory and the linearization model trajectory of the two-degree-of-freedom robot arm inside of the linearizable region

Fig.9に作業線形近似可能領域内における実軌跡と線形近似した際の応答軌跡、Fig.10に作業線形近似可能領域外における実軌跡と線形近似した際の応答軌跡を示す。Fig.9の作業線形近似可能領域内においては、実軌跡と線形近似した際の応答軌跡は図上では一致しており、両者の誤差は最大でも 0.2 [mm]であり、無視できる大きさである。それに対してFig.10の作業線形近似可能領域外においては、実軌跡と線形近似した際の応答軌跡はずれており、両者の誤差は最大 2.7 [mm]であり、かなり大きくなっている。また、作業線形近似可能領域外においては、実軌跡にオーバーシュートが生じており、ロボットアーム自身の制御性能も劣化している。

すなわち、作業線形近似可能領域内においては、ロボットアームの実軌道と作業線形近似軌道がほぼ等しく取り扱うことができるため、ロボットアームの制御性能は作業座標系において評価することが可能であるが、作業線

Fig. 10 A simulation result of the actual trajectory and the linearization model trajectory of the two-degree-of-freedom robot arm outside of the linearizable region

形近似可能領域外においてはロボットアームの作業座標系での評価は困難となり、制御性能も作業線形モデルで表わされる制御性能から劣化し、オーバーシュートなどが生じる。

つぎに、線形近似モデルの妥当性を示すために、6軸産業用ロボットアーム（モートマン K3S）で輪郭制御実験を行った。Fig. 11 に実験結果を示す。この実験結果を見ると、Fig. 9 の作業線形モデルでのシミュレーション結果とはほぼ一致していることがわかる。このことから、本研究で導いた作業線形近似可能領域の内部では、産業用ロボットアームは作業線形モデルで表わし得ることを実験でも検証したことになる。

Fig. 11 An experimental result of the actual trajectory and the linearization model trajectory of the six-degree-of-freedom robot arm inside of the linearizable region

5. おわりに

産業界で用いられている多関節ロボットアームが、作業座標系において各座標軸で線形独立なモデルである作業線形モデルで表現するときの作業線形近似誤差を理論的解析により求め、作業線形近似可能領域の導出法を明らかにした。作業線形近似可能領域内においては、産業用ロボットアーム制御系は作業座標系において各座標軸独立の線形近似可能であり、作業線形近似誤差は非常に小さく、作業線形近似誤差が時間と共に累積して発散しないことが理論的に導出でき、作業線形近似可能領域外ではロボットアームの制御性能が劣化することがシミュレーションにより確認された。また、実機ロボットによる実験結果においても、作業線形近似可能領域内では作業線形モデルによるシミュレーション結果とほぼ一致することが確認された。

ロボットアームの作業線形近似可能領域においては、ロボットアーム制御系を作業座標系で各座標軸独立の線形の制御対象としてとらえ、その制御対象に対する制御器の構成において既存の線形制御理論を適用することにより、より高速高精度のロボットアーム制御を行うことが可能となる。作業線形近似可能領域外で高精度制御を行うためには、作業線形モデルを補正するような非線形制御の必要性を示唆している。

参考文献

- 1) 若松, 田村 (編): ロボットの制御, 計測自動制御学会, pp. 31~78 (1985)
- 2) R. Ortega and M. W. Spong: Adaptive Motion Control of Rigid Robots: A Tutorial; Automatica, Vol. 25, No. 6, pp. 877~888 (1989)
- 3) S. W. Wijesoma and R. J. Richards: Robust Trajectory Following of Robots Using Computed Torque Structure with VSS; Int. J. Control, Vol. 52, No. 4, pp. 935~962 (1990)
- 4) 川崎: ロボットアームの動力学計算法; 計測と制御, Vol. 25, No. 1, pp. 23~29 (1986)
- 5) 吉川: ロボットアームの制御方式; 計測と制御, Vol. 25, No. 1, pp. 37~44 (1986)
- 6) 有本: ロボットの力学と制御, 朝倉書店, pp. 82~88 (1990)
- 7) 久良: メカトロニクス機器の動作制御方式に関する研究, 九州大学博士論文, pp. 74~103 (1992).
- 8) 後藤, 中村, 久良: ロボットアームの高速高精度位置決めのための教示信号修正法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 27, No. 12, pp. 1396~1404 (1991)
- 9) 後藤, 中村, 久良: 2次系表現に基づく教示信号修正法を用いた実機ロボットアームの高精度輪郭制御; 第10回計測自動制御学会九州支部学術講演会予稿集, pp. 295~298 (1991)
- 10) 安川電機製作所 (編): メカトロニクスのためのサーボ技術入門, 日刊工業出版社, pp. 22~23 (1986)
- 11) 高木: 解析概論, 改訂第三版, 岩波書店, pp. 62~63 (1973)