ルーリエ系のパラメトリック絶対安定性*

和田 光代**・池田 雅夫***・太田 有三***・Dragoslav D. ŠILJAK****

Parametric Absolute Stability of Lur'e Systems*

Teruyo WADA**, Masao IKEDA***, Yuzo OHTA*** and Dragoslav D. ŠILJAK****

The concept of parametric absolute stability of Lur'e systems is defined. It provides a mathematical framework for solving the joint problem of feasibility and stability of equilibrium states of Lur'e systems with uncertain parameters and sectorial bounded nonlinearities. This problem arises since stability may be disturbed by the change of equilibrium states which is caused by the parameter variation. In this paper, we consider a single-input single-output Lur'e system, and present Popov-type sufficient conditions for parametric absolute stability. Although the condition contains the parameters, it can be tested by computing the value sets or a family of Popov plots.

1. はじめに

動的な線形時不変部と静的な非線形部から成るフィードバック系は、ルーリエ系と呼ばれる。その線形部が不確かなパラメータを含む場合の安定性については、これまでも考えられてきた^{1)~5)}。そこでは、参照入力を零と仮定し、非線形部を零入力に対しては出力が零であるものとしている。したがって、線形部が公称系から変化しても平衡状態は常に原点であり、その前提のもとで議論されている。

一方、参照入力が零でないルーリエ系では、平衡状態は、もはや原点ではなく、線形部のパラメータと非線形部に依存したものとなる。しかも、パラメータの公称値に対して平衡状態がただ一つであったとしても、パラメータが変化すると、平衡状態は複数個存在するかもしれないし、あるいは、存在しないかもしれない。すなわち、システム全体の安定性が、線形部のパラメータ変動に直接影響されるだけでなく、パラメータ変動による平衡状態の変化によっても変わり得る。したがって、参照入力とパラメータ変動による平衡状態の変化を考慮に入れた

安定解析が必要である。

本論文では、線形部に不確かなパラメータを含み、非線形部があるセクタ条件を満たす1入力1出力ルーリエ系に対して、参照入力とパラメータの変動による平衡状態の変化を考慮に入れた安定性について考える。このような平衡状態の変化を考慮に入れた安定性の概念をパラメトリック安定性といい、ロトカ・ボルテラ方程式で記述される生態系やサブシステムの結合からなる複合系などを対象に研究がなされている⁶⁾。

ところで、従来からルーリエ系の安定解析においては、非線形部はあるセクタ条件を満たす任意のものとして、系の安定性を保証する絶対安定性という概念が考えられてきた⁷⁾。本論文でも、非線形部は指定されたセクタ条件を満たす任意のものとし、参照入力の変化や線形部のパラメータ変動のもとでの安定性をパラメトリック絶対安定性と呼ぶことにする。そして、ルーリエ系がパラメトリック絶対安定であるための条件を、平衡状態の変動の解析と、パラメータを含むポポフの安定条件によって与える。

2. 平衡状態と安定性の変化

ルーリエ系では、参照入力の変化やパラメータ変動によって平衡状態が変化し得る。この平衡状態の変化のために、システムの動特性が変化し、安定性も変化し得ることを例により示す。

つぎのルーリエ系を考えよう。

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(e), \quad e = r - y, \quad y = c(p)x \quad (1)$$

* 原稿受付 1993年9月29日

** 大阪府立大学 工学部 University of Osaka Prefecture ; Gakuen-cho, Sakai city, Osaka 593, JAPAN

*** 神戸大学 工学部 Kobe University ; Rokkodai-cho, Nada ward, Kobe city, Hyogo 657, JAPAN

**** サンタクララ大学 Santa Clara University ; Santa Clara, CA 95053, U.S.A.

Key Words : nonlinear feedback system, Lur'e systems, robust stability, absolute stability, Popov condition.

ここに, r は参照入力で区間 $[0, 10]$ の値をとる定数であり, A, b, c は,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3.5 & -3.5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$c(p) = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

であるとする. ただし, p は定数パラメータで, 区間 $[-0.185, 2.05]$ の値をとり得るとする. また, φ は次式で定義される連続な非線形関数である.

$$\varphi(e) = \begin{cases} 9e, & e \leq 1 \\ 12e - 3, & 1 < e \leq \frac{65}{64} \\ 9e + \frac{3}{64}, & \frac{65}{64} < e \end{cases} \quad (3)$$

ここでは, 簡単のため, c にただ一つのパラメータが含まれる場合のみを考えている.

平衡状態は,

$$Ax + b\varphi[r - c(p)x] = 0 \quad (4)$$

の解 $x = x^e(r, p)$ として得られる. (2) 式を代入すると, $x^e(r, p)$ は,

$$x^e(r, p) = \begin{bmatrix} 0.5\varphi[e^e(r, p)] & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

と表わされる. ここに, $e^e(r, p)$ は

$$e^e(r, p) = r - c(p)x^e(r, p) \quad (6)$$

であり,

$$r - e = 0.5 p \varphi(e) \quad (7)$$

の解 $e = e^e(r, p)$ である. (5) 式から $x^e(r, p)$ は $e^e(r, p)$ によって一意に決まり, また, 逆に (6) 式から $e^e(r, p)$ は $x^e(r, p)$ によって一意に決まる.

参照入力 r の値によって, 三つの場合を考える.

(I) $r = 0$ の場合: パラメータ p の値によらず, 原点 $x^e(0, p) = 0$ がただ一つの平衡状態である. この平衡状態に対応する制御偏差は, $e^e(0, p) = 0$ である. $e = e^e(0, p) = 0$ において, 非線形関数 $\varphi(e)$ は, セクタ $[0, 588/65]$ に含まれる. このセクタの上限とポポフの安定条件⁷⁾

$$\operatorname{Re} \left[\frac{65}{588} + \frac{0.5 p (1 + j\omega)}{(j\omega)^3 + 3.5(j\omega)^2 + 3.5(j\omega) + 1} \right] > 0, \quad \forall \omega \in \bar{R}_+ \quad (8)$$

により, すべてのパラメータ $p \in [-0.185, 2.05]$ に対して, 平衡状態 $x^e(0, p) = 0$ は大域漸近安定である. ただし, $\bar{R}_+ = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ である.

(II) $r = 9.7$ の場合: $p = 2$ ならば, (3), (7) 式より $e^e(9.7, 2) = 0.97$ であり, この点において φ はセクタ $[0, 732/73]$ に含まれる. このとき, ポポフの安定条件により, 平衡状態 $x^e(9.7, 2)$ は大域漸近安定である.

$p = 1.9$ ならば, $e^e(9.7, 1.9) = 251/248$ となり, この点における φ の傾き $\kappa(p)$ は 12 である. 平衡状態 $x^e(9.7, 1.9)$ の安定解析のために, $x^e(9.7, p)$ のまわりでの線形化システム

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(p)\tilde{x} \quad (9)$$

を考える. ここに, $\tilde{x} = x - x^e(9.7, p)$,

$$\tilde{A}(p) = A - \kappa(p)bc(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(1 + 0.5 p \kappa(p)) & -3.5 & -3.5 \end{bmatrix} \quad (10)$$

である. $\tilde{A}(1.9)$ は不安定行列であるから, $x^e(9.7, 1.9)$ は不安定である. 行列 $\tilde{A}(p)$ が不安定となったのは, $p\kappa(p)$ の増加によるものである. しかし, p は 2 から 1.9 へと減少しているため, パラメータ p の値の変化が直接 $p\kappa(p)$ を増加させたのではない. p の値の変化によって $e^e(9.7, p)$ が $e^e(9.7, 2)$ から $e^e(9.7, 1.9)$ へ移動したために, その点における φ の傾き $\kappa(p)$ が増加したのが原因である.

この例は, 非線形システムにおける安定解析では, パラメータ p の変化に伴う平衡状態 $x^e(9.7, p)$ の移動を考慮する必要性を示唆している.

(III) $r = 151/800$ の場合: $p \in (-0.18, 2.05]$ のときには, (7) 式はただ一つの解 $e^e(151/800, p)$ をもち, 非線形関数 φ は, $e^e(151/800, p)$ においてセクタ $[0, k(e^e(151/800, p))]$ に含まれる. ただし,

$$k\left(e^e\left(\frac{151}{800}, p\right)\right) = \frac{4(1997 + 11025p)}{3(294 + 1625p)}$$

である. ポポフの安定条件により, 平衡状態 $x^e(151/800, p) = [0.5\varphi[e^e(151/800, p)] \ 0 \ 0]^T$ は大域漸近安定であることがいえる.

ところが, (7) 式は, $p = -0.18$ のときには二つの解, $p \in (-649/3600, -0.18)$ に対しては三つの解, また, $p = -649/3600$ のときには二つの解をそれぞれもつ. すなわち, $p \in [-649/3600, -0.18]$ に対して, (5) 式の平衡状態 $x^e(151/800, p)$ は, 一意ではなく, したがって, それらは大域漸近安定とはならない.

$p \in [-0.185, -649/3600]$ に対しては, (7) 式の解は, 再びただ一つとなり, それは大域漸近安定であることがいえる.

このように、平衡状態の安定性は、パラメータの変化に伴う平衡状態の個数の変化によって左右され得る。

以上の例により、参照入力やパラメータの変動に伴う非線形システムのロバスト安定解析には、平衡状態の変化が無視できないことが分かる。このような例を動機として、以下では、ルーリエ系に対するパラメトリック絶対安定性の概念を定義しよう。

3. パラメトリック絶対安定性

Fig. 1 で表わされる1入力1出力ルーリエ系 $\mathcal{S}$ を考える。すなわち、線形部は、

$$\dot{x} = A(p)x + b(p)u, \quad y = c(p)x \quad (11)$$

で与えられ、非線形部は、

$$u = \varphi(e), \quad e = r - y \quad (12)$$

で与えられるとする。ここに、 $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ は、それぞれ線形部の状態、入力、出力であり、 $e \in \mathbb{R}$ は制御偏差である。 $r \in \mathbb{R}$ は参照入力で、その値を閉区間 $\mathcal{R} = [r, \bar{r}]$ ($r \leq 0 \leq \bar{r}$) にとる定数で、公称値を0とする。 p はパラメータで、その変動領域は有界閉領域 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^l$ とし、公称値を p^* で表す。また、 $A(p)$, $b(p)$, $c(p)$ はパラメータ $p \in \mathcal{P}$ の連続関数を成分とする行列で、すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して、 $A(p)$ は安定であるとする。

Fig. 1 Lur'e system

非線形関数 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は連続で、原点の近傍 E において、

$$0 \leq \tilde{e}[\varphi(e + \tilde{e}) - \varphi(e)] \leq k(e)\tilde{e}^2, \quad \forall e \in E, \forall \tilde{e} \in \mathbb{R} \quad (13)$$

$$\varphi(0) = 0$$

を満たすとする。ここに、 $k(e)$ は $e \in E$ によって決まる正数である。この仮定は、点 $e \in E$ における φ のセクタ条件であり、 $\varphi(e)$ が原点近傍 E において単調非減少関数で、その傾きが有限であれば、適当な $k(e)$ について満たされる。 $\varphi(e)$ は、 E の外では、減少関数であってもよい。

(11), (12) 式より、システム $\mathcal{S}$ は、

$$\mathcal{S}: \dot{x} = A(p)x + b(p)\varphi[r - c(p)x], \quad (14)$$

$$r \in \mathcal{R}, \quad p \in \mathcal{P}$$

と表わされる。2. の例からも明らかなように、このシ

テムでは、パラメータ p のみならず、参照入力 r によっても動特性が変化し得る。そこで、以下では、 r, p の両方をパラメータと考える。

(r, p) が公称値 $(0, p^*) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ にあるとき、公称系

$$\mathcal{S}^*: \dot{x} = A(p^*)x + b(p^*)\varphi[-c(p^*)x] \quad (15)$$

の平衡状態は、原点にある。したがって、制御偏差 e の平衡点も原点である。そのため、公称系 $\mathcal{S}^*$ では、非線形関数に対するセクタ条件として、(13) 式で $e = 0$ といった条件

$$0 \leq \tilde{e}\varphi(\tilde{e}) \leq k(0)\tilde{e}^2, \quad \forall \tilde{e} \in \mathbb{R} \quad (16)$$

のみを考えて、システム $\mathcal{S}^*$ の絶対安定性が定義されている。すなわち、平衡点である原点におけるセクタ条件 (16) 式を満たす任意の非線形関数 φ に対して、原点 $x = 0$ が大域漸近安定であるとき、公称系 $\mathcal{S}^*$ はセクタ $[0, k(0)]$ に対して絶対安定であるといわれる⁷⁾。

しかし、参照入力 $r \neq 0$ となった場合には、2. の例でも示したように、 r と p の値によって平衡状態が変化する。そして、平衡状態が存在したとしても、それは原点ではなくなる。そのため、この場合のシステム $\mathcal{S}$ の絶対安定性を考えるには、移動した平衡点におけるセクタ条件が非線形関数に対して必要である。そこで、本論文では、原点を含むある閉区間 E の各点におけるセクタ条件 (13) 式を前提としている。

ここで、パラメータの変化に伴う平衡状態の変化を考慮に入れた絶対安定性を定義しよう。

【定義】 すべての $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ と (13) 式を満たす任意の非線形関数 φ に対して、平衡状態 $x^e(r, p)$ がただ一つ存在し、それに対する制御偏差の平衡点 $e^e(r, p)$ が E にあるとする。このとき、 $x^e(r, p)$ が大域漸近安定であるならば、ルーリエ系 $\mathcal{S}$ はパラメトリック絶対安定であるという。□

4. 平衡点解析

ルーリエ系 $\mathcal{S}$ のパラメトリック絶対安定性を示すためには、まず、すべてのパラメータ $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ と (13) 式のセクタ条件を満たすすべての非線形関数 φ に対して、平衡状態が存在するための条件を与える必要がある。平衡状態が存在して、それが大域漸近安定であるならば、その平衡状態はただ一つであるといえるから、ここでは、平衡状態の存在性についてのみ考察し、その一意性は5. の安定解析の結果によって保証する。

(14) 式で、 $\dot{x} = 0$ と置くことにより、システム $\mathcal{S}$ の平衡状態は

$$A(p)x + b(p)\varphi[r - c(p)x] = 0 \quad (17)$$

の解として得られる。(17)式は,

$$x + A^{-1}(p)b(p)\varphi[r - c(p)x] = 0 \quad (18)$$

と等価であり, また, 次式でも表わされる.

$$\begin{aligned} x + A^{-1}(p)b(p)\varphi(e) &= 0 \\ e &= r - c(p)x \end{aligned} \quad (19)$$

この第1式を第2式に代入すると, 代数方程式

$$e - r - c(p)A^{-1}(p)b(p)\varphi(e) = 0 \quad (20)$$

が得られる. したがって, (19)式より, (20)式の解 $e = e^e(r, p)$ の存在性と, (17)式の解 $x = x^e(r, p)$ の存在性が等価であることがわかる. これより, 平衡状態 $x^e(r, p)$ の存在性に関する議論は, $e^e(r, p)$ の存在性に関する議論で置き換えられる. しかも, 安定解析では, 非線形関数 φ のセクタの上限を求めるために $e^e(r, p)$ の存在領域が必要である. そこで, (20)式の解 $e = e^e(r, p)$ が存在するための条件とその存在領域を与えよう.

【補題】 条件

$$\frac{1}{k(0)} - c(p)A^{-1}(p)b(p) > 0, \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (21)$$

が成り立つならば, 任意の $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ と (13)式のセクタ条件を満たすすべての非線形関数 φ に対して, (20)式の解 $e^e(r, p)$ が区間

$$E^e(r, p)$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{r}{\sigma_0(p)}, r \right], & r\{c(p)A^{-1}(p)b(p)\} \leq 0 \text{ のとき} \\ \left[r, \frac{r}{\sigma_0(p)} \right], & r\{c(p)A^{-1}(p)b(p)\} > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (22)$$

に存在する. ここに,

$$\sigma_0(p) = 1 - c(p)A^{-1}(p)b(p)k(0) \quad (23)$$

である. $\square$

この補題の証明は以下のように示すことができる. 関数 $\phi(\cdot, p)$ を

$$\phi(e, p) = e - c(p)A^{-1}(p)b(p)\varphi(e), \quad \forall e \in \mathcal{R} \quad (24)$$

で定義すると, (13)式の原点における条件(16)式より, $c(p)A^{-1}(p)b(p) \leq 0$ の場合は, セクタ条件

$$e^2 \leq e\phi(e, p) \leq \sigma_0(p)e^2, \quad \forall e \in \mathcal{R} \quad (25)$$

が, $c(p)A^{-1}(p)b(p) > 0$ の場合は,

$$\sigma_0(p)e^2 \leq e\phi(e, p) \leq e^2, \quad \forall e \in \mathcal{R} \quad (26)$$

が成立する. Fig. 2 は, この条件を $r \geq 0$ の場合について示したものである. この図において, (20)式の解

(a) $c(p)A^{-1}(p)b(p) \leq 0$

(b) $c(p)A^{-1}(p)b(p) > 0$

Fig. 2 Sector condition on ϕ

は, $v = \phi(e, p)$ のグラフと直線 $v = r$ との交点の e -座標となる. Fig. 2 (a) の場合は, すべての連続関数 $\phi(\cdot, p)$ に対して, 明らかに, そのような交点が存在する. Fig. 2 (b) の場合は, $\sigma_0(p) > 0$ のとき, すなわち, (21)式が成り立つとき, 存在することが分かる. さらに, これらの図より, (21)式のもとでの(20)式の解の存在区間が(22)式で与えられることが分かるのである.

補題の仮定のもとで, (13)式のセクタ条件を満たすすべての φ に対する $e^e(r, p)$ の存在区間 $E^e(r, p)$ が分かる. これより, (19)式の第1式を用いれば, 平衡状態 $x^e(r, p)$ の存在領域も求めることが可能である. しかし, 上で述べたように, 安定解析に必要なのは $e^e(r, p)$ の存在領域であって, $x^e(r, p)$ の存在領域は必要としない. 平衡状態 $x^e(r, p)$ については, その存在のみが必要であり, それは, 上述の議論より, (21)式の条件によって保証されている.

5. 安定条件

ここでは, まず, 平衡状態 $x^e(r, p)$ が存在するとき, それが大域漸近安定となるための条件を述べる. そして, 補題の条件を考慮し, システム $\mathcal{S}$ がパラメトリック絶対安定であるための条件を与える.

システム $\mathcal{S}$ は, 平衡状態からの偏差 $\tilde{x} = x - x^e(r, p)$ を用いると, つぎの偏差系 $\tilde{\mathcal{S}}$ で表わされる.

$$\tilde{\mathcal{S}}: \dot{\tilde{x}} = A(p)\tilde{x} + b(p)\tilde{\varphi}[-c(p)\tilde{x}] \quad (27)$$

ここに,

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}[-c(p)\tilde{x}] &= \varphi[-c(p)\tilde{x} + e^e(r, p)] \\ &\quad - \varphi[e^e(r, p)] \\ e^e(r, p) &= r - c(p)x^e(r, p)\end{aligned}\quad (28)$$

である. この $\tilde{\mathcal{S}}$ もルーリエ系であり, その平衡状態は $\tilde{x}=0$ である. そして, $\tilde{e}=e-e^e(r, p)$ とおくと, $e^e(r, p) \in E$ であるならば, (13) 式より,

$$0 \leq \tilde{e}\tilde{\varphi}(\tilde{e}) \leq k(e^e(r, p))\tilde{e}^2, \quad \forall \tilde{e} \in \mathbf{R} \quad (29)$$

が成り立つ.

さて, ルーリエ系に対するポポフの安定条件⁷⁾より, (29) 式のもとで,

$$\begin{aligned}\frac{1}{k(e^e(r, p))} + \operatorname{Re}[(1 + j\omega\nu(r, p))g(j\omega, p)] &> 0, \\ \forall \omega \in \bar{\mathbf{R}}_+ \quad (30)\end{aligned}$$

を満たす実数 $\nu(r, p)$ が存在するならば, $\tilde{\mathcal{S}}$ の平衡状態 $\tilde{x}=0$ は大域漸近安定である. ここに, $g(s, p)$ は,

$$g(s, p) = c(p)[sI - A(p)]^{-1}b(p) \quad (31)$$

であり, ルーリエ系 $\mathcal{S}$ の線形部の伝達関数である. したがって, すべての $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対して (30) 式が成り立てば, もとのルーリエ系 $\mathcal{S}$ の平衡状態 $x^e(r, p)$ の大域漸近安定性が示される.

しかし, (30) 式の条件中の $k(e^e(r, p))$ は, 知ることのできない平衡点 $e^e(r, p)$ に依存しているので, そのまま確かめることは不可能である. そこで, 補題で与えられる $e^e(r, p)$ の存在区間 $E^e(r, p)$ から決まる

$$k_e(r, p) = \max\{k(e) : e \in E^e(r, p)\} \quad (32)$$

を $k(e^e(r, p))$ の代わりに用いることにする. すなわち,

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_e(r, p)} + \operatorname{Re}[(1 + j\omega\nu(r, p))g(j\omega, p)] &> 0, \\ \forall \omega \in \bar{\mathbf{R}}_+ \quad (33)\end{aligned}$$

を満たす実数 $\nu(r, p)$ の存在を安定条件とすることができる.

ここで,

$$k_{\mathcal{R}}(p) = \max\{k_e(r, p) : r \in \mathcal{R}\} \quad (34)$$

とおき, p を固定して考えれば, つぎのことが容易に分かる. すなわち, $\nu(r, p)$ がすべての $r \in \mathcal{R}$ について存在するためには, (33) 式で, $k_e(r, p)$ を $k_{\mathcal{R}}(p)$ で置き換えて, r に独立な実数 $\nu_0(p)$ が存在することが必要十分である. なお, Fig. 2 から分かるように, 補題の仮定のもとで, すべての $r \in \mathcal{R}$ に対する平衡点 $e^e(r, p)$ の存在区間は,

$$E_{\mathcal{R}}^e(p)$$

$$= \begin{cases} [\underline{r}, \bar{r}], & c(p)A^{-1}(p)b(p) \leq 0 \text{ のとき} \\ \left[\frac{\underline{r}}{\sigma_0(p)}, \frac{\bar{r}}{\sigma_0(p)} \right], & c(p)A^{-1}(p)b(p) > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (35)$$

で与えられる. したがって, (34) 式の $k_{\mathcal{R}}(p)$ は,

$$k_{\mathcal{R}}(p) = \max\{k(e) : e \in E_{\mathcal{R}}^e(p)\} \quad (36)$$

を用いて計算することができる.

以上より, パラメトリック絶対安定性のための定理を得る.

【定理】 (21) 式の条件のもとで, 与えられた参照入力 r の範囲 $\mathcal{R}$ とすべての $p \in \mathcal{P}$ に対して,

$$E_{\mathcal{R}}^e(p) \subset E \quad (37)$$

が成り立ち,

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_{\mathcal{R}}(p)} + \operatorname{Re}[(1 + j\omega\nu_0(p))g(j\omega, p)] &> 0, \\ \forall \omega \in \bar{\mathbf{R}}_+ \quad (38)\end{aligned}$$

を満たす実数 $\nu_0(p)$ が存在するならば, ルーリエ系 $\mathcal{S}$ はパラメトリック絶対安定である. $\square$

(23) 式の $\sigma_0(p)$ の定義と (35) 式より, $\mathcal{R} \subset E_{\mathcal{R}}^e(p)$ が成り立っている. したがって, 定理の (37) 式の条件が成り立つためには, $\mathcal{R} \subset E$ が必要である. これは, パラメトリック絶対安定性の解析のためには, 非線形部の特性を表わすセクタ条件が, 少なくとも参照入力範囲で与えられている必要があることを意味している.

(38) 式の条件で $\omega=0$ において, $k(0) \leq k_{\mathcal{R}}(p)$ を用いれば, 補題の (21) 式の条件を得る. これより, 定理では, (21) 式の仮定が不要であるかのように見える. しかし, (38) 式中の $k_{\mathcal{R}}(p)$ を求めるために必要な区間 $E_{\mathcal{R}}^e(p)$ は, (21) 式の条件のもとで与えられるから, 補題の条件をまず仮定せねばならない.

ところで, 一般には, すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して線形部の定常ゲインが正, すなわち, $g(0, p) > 0$ である場合が多い. この場合には, $c(p)A^{-1}(p)b(p) < 0$ であるから, 補題の仮定は満たされ, 平衡点 $e^e(r, p)$ は常に存在する. そして, (35) 式より, その存在区間は $E_{\mathcal{R}}^e(p) = \mathcal{R}$ であり, (36) 式の $k_{\mathcal{R}}(p)$ は p に依らない定数

$$k_{\mathcal{R}}(p) = k_{\mathcal{R}}^* = \max\{k(e) : e \in \mathcal{R}\} \quad (39)$$

となる. したがって, この場合の安定条件は, 以下のようになる.

【系】 $\mathcal{R} \subset E$ であるとする. すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して, $g(0, p) > 0$ が成り立ち,

$$\frac{1}{k_{\mathcal{R}}^*} + \operatorname{Re}[\{1 + j\omega\nu_0(p)\}g(j\omega, p)] > 0, \quad (40)$$

$$\forall \omega \in \bar{\mathcal{R}}_+$$

を満たす実数 $\nu_0(p)$ が存在するならば、ルーリエ系 $\mathcal{S}$ はパラメトリック絶対安定である。□

6. 数値例

5. の結果を用いて、与えられたルーリエ系のパラメトリック絶対安定性を確かめるには、すべてのパラメータ $p \in \mathcal{P}$ に対して、(38) 式、または、(40) 式を満たす実数 $\nu_0(p)$ の存在を調べる必要がある。しかし、無限個のパラメータ $p \in \mathcal{P}$ ごとに実数 $\nu_0(p)$ の存在を示すのは、一般に困難である。そこで、代わりに、すべての $p \in \mathcal{P}$ に共通の実数 ν_0 の存在を示すことを考える。そうすれば、条件は保守的なものとなるが、参考文献 4), 5), 8) などの結果を用いて、ポポフ軌跡によって確かめることができる。以下に、例を示そう。

【例 1】 Fig. 1 で表わされるルーリエ系において、線形部の係数行列が、

$$A(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -p_1(0.2p_2 + p_3) & -p_1(0.5p_2 + p_4 + 0.2) \end{bmatrix}$$

$$b(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.5p_1 - p_2 \end{bmatrix}, \quad c(p) = \begin{bmatrix} p_1p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

で与えられているとする。参照入力 r は区間 $\mathcal{R} = [-1, 1]$ 内の値をとり、その公称値は $r^* = 0$ とする。また、パラメータ $p = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4]^T$ の変動領域 $\mathcal{P}$ は、

$$\mathcal{P} = \{p = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4]^T : 0.83 \leq p_1 \leq 1.25, \\ 2.4 \leq p_2 \leq 3.6, 0.32 \leq p_3 \leq 0.48, \\ 1.44 \leq p_4 \leq 2.16\} \quad (42)$$

であり、公称値は、 $p^* = [1 \ 3 \ 0.4 \ 1.8]^T$ とする。この領域において、

$$p_1(0.2p_2 + p_3) \leq 1.5 \\ p_1(0.5p_2 + p_4 + 0.2) > 2.3 \\ p_2 + 0.5p_1 > 2.8$$

であるから、 $A(p)$ の特性多項式にフルビッツの安定判別法を適用することにより、線形部の安定性がいえる。線形部の伝達関数は、

$$g(s, p) = \frac{p_1(s + p_2)}{s^3 + (p_2 + 0.5p_1)s^2 + p_1(0.5p_2 + p_4 + 0.2)s + p_1(0.2p_2 + p_3)} \quad (43)$$

である。非線形部の関数 φ は、閉区間 $E = [-1, 1]$ と

$$k(e) = \frac{588 - 576e}{65 - 64e}, \quad e \in E \quad (44)$$

について、(13) 式のセクタ条件を満たす連続なものとす。

このシステムでは、 $\mathcal{R} = E = [-1, 1]$ であり、 $p_3/p_2 \leq 0.2$ より、

$$g(0, p) = \frac{5}{1 + \frac{5p_3}{p_2}} \geq 2.5 > 0, \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (45)$$

であるから、系を用いてパラメトリック絶対安定性を確かめることができる。ここでは、上で述べたように、系の (40) 式を満たす実数 $\nu_0(p)$ の存在を調べる代わりに、

$$\frac{1}{k_{\mathcal{R}}^*} + \operatorname{Re}[\{1 + j\omega\nu_0\}g(j\omega, p)] > 0, \quad (46)$$

$$\forall \omega \in \bar{\mathcal{R}}_+$$

を満たすすべての $p \in \mathcal{P}$ に共通の実数 ν_0 の存在を、ポポフ軌跡を用いて確かめよう。そのために、参考文献 8) の多角形区間演算を用いて、非負の ω について、すべての $p \in \mathcal{P}$ に対するポポフ軌跡が存在する領域を覆う多角形を描いたものを Fig. 3 に示す。いま、

$$k_{\mathcal{R}}^* = \max\{k(e) : e \in \mathcal{R}\} = 12 \quad (47)$$

であるから、Fig. 3 において、多角形軌跡の左側に、 $-1/k_{\mathcal{R}}^* = -1/12 \approx -0.0833$ を通る直線を引くことができる。したがって、(46) 式を満たす実数 ν_0 が存在し、系より、ここで考えているルーリエ系はパラメトリック絶対安定である。□

例 1 では、(46) 式を満たす実数 ν_0 の存在を確かめる

Fig. 3 Popov plot of Example 1

ために、参考文献8)の多角形区間演算を用いた。この多角形区間演算を用いれば、すべての $p \in \mathcal{P}$ に対するポポフ軌跡を覆うのに十分な多角形の軌跡を描くことができる。そして、この計算法は、伝達関数 $g(s, p)$ の分母がそれぞれパラメータの成分の多重線形関数で、パラメータの各成分の変動区間が有界閉区間である場合に適用できる。

この特殊な場合である、伝達関数 $g(s, p)$ の分母が、それぞれ区間多項式で表わされる場合には、参考文献4), 5)の結果が適用できる。これらの結果によると、(46)式を満たすすべての $p \in \mathcal{P}$ に共通の実数 ν_0 の存在性と、(46)式を満たすある16組のパラメータ p に共通の実数 ν_0 の存在性とが必要かつ十分である。そこで、つぎに、そのような例を示そう。

【例2】 Fig. 1 で表わされるルーリエ系において、線形部の係数行列が、

$$A(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -p_1 & -3.5 \end{bmatrix}, \quad b(p) = b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$c(p) = [p_2 \quad 0 \quad 0] \quad (48)$$

で与えられているとする。参照入力 r の変動区間は $\mathcal{R} = [-0.5, 0.5]$ であり、公称値は $r^* = 0$ とする。また、パラメータ $p = [p_1 \ p_2]^T$ の変動領域 $\mathcal{P}$ は、

$$\mathcal{P} = \{p = [p_1 \ p_2]^T : 3 \leq p_1 \leq 4, 1 \leq p_2 \leq 2\} \quad (49)$$

を満たし、公称値は、 $p^* = [3.5 \ 1.5]^T$ であるとする。このとき、線形部の伝達関数は、

$$g(s, p) = \frac{0.5 p_2}{s^3 + 3.5 s^2 + p_1 s + 1} \quad (50)$$

であるから、線形部は安定である。非線形部は、例1と同じものとする。

いま、 $\mathcal{R} = [-0.5, 0.5] \subset E$ であり、

$$g(0, p) = 0.5 p_2 \geq 0.5, \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (51)$$

であるから、この例においても、系を用いることができる。例1と同様に、(40)式を満たす実数 $\nu_0(p)$ の存在を調べる代わりに、(46)式を満たすすべての $p \in \mathcal{P}$ に共通の実数 ν_0 の存在を確認する。参考文献4), 5)の結果によると、このような ν_0 が存在するための必要十分条件は、

$$p = [-4 \ 1]^T, [-4 \ 2]^T, [-3 \ 1]^T, [-3 \ 2]^T \quad (52)$$

なる4組のパラメータ値に対して、(46)式を満たす共通の実数 ν_0 が存在することである。このパラメータの組

Fig. 4 Popov plot of Example 2

は、一般には16組であるが、ここではパラメータ p の成分が2個であるので、(52)式のように4組となった。(52)式の4組のパラメータ値に対する線形部のポポフ軌跡をFig. 4に示す。いま、

$$k_x^* = \max\{k(e) : e \in \mathcal{R}\} = \frac{100}{11} \quad (53)$$

であるから、実軸上の $-1/k_x^* = -0.11$ を通り、この四つのポポフ軌跡を右にみる直線が引ける。したがって、(46)式を満たす実数 ν_0 が存在し、このルーリエ系もパラメトリック絶対安定である。□

7. おわりに

線形部に不確かなパラメータを含む1入力1出力ルーリエ系に対して、パラメータ変動に伴う平衡状態の変化を考慮に入れた、パラメトリック絶対安定性という概念を定義した。そして、そのための十分条件を、パラメータを含むポポフ条件の形で導出した。その判定は、ポポフ軌跡を用いて実行可能である。

線形部に定値外乱が加わる場合にも、平衡状態は変化する。この場合についても、同様に議論ができ、本論文の結果を容易に拡張することができる。

ルーリエ系が多入力多出力の場合も、同様に、パラメトリック絶対安定性のためのポポフ型の条件を得ることができる。しかし、パラメータを含む多変数ポポフ条件の判定は容易でない。したがって、多変数ルーリエ系に対しては別のアプローチが望まれる。

参考文献

- 1) D. D. Šiljak : Nonlinear Systems, The Parameter Analysis and Design, Wiley (1969)
- 2) D. D. Šiljak : Polytopes of Nonnegative Polynomials ;

- Proc. ACC, pp.193~199 (1989)
- 3) A. Tesi and A. Vicino : Robust Absolute Stability of Lur'e Control Systems in Parameter Space ; Automatica, Vol. 27, No. 1, pp.147~151 (1991)
- 4) M. Dahleh, A. Tesi and A. Vicino : On the Robust Popov Criterion for Interval Lur'e Systems ; Proc. 31st Conf. Decision and Contr., pp.2808~2809 (1992)
- 5) 西村, 森, 黒江, 小亀 : 区間プラントを含むルーリエ系に対するポポフの定理の適用について ; システム制御情報学会論文誌, Vol. 6, No. 4, pp.165~170 (1993)
- 6) M. Ikeda, Y. Ohta and D. D. Šiljak (G. Conte, A. M. Perdon and B. Wyman (eds.)) : Parametric Stability ; New Trends in Systems Theory, Birkhäuser pp.1~20 (1991)
- 7) M. A. Aizerman and F. R. Gantmacher : Absolute Stability of Regulator Systems, (English Translation by E. Polak), Holden-Day (1964)
- 8) Y. Ohta, L. Gong and H. Haneda : Polygon Interval Arithmetic and Design of Robust Control Systems ; Proc. 29th Conf. Decision and Contr., pp.1065~1067 (1990)