行列安定超立方体の簡単な推定法*

森 武宏**・小亀 英己***

A Simple Estimate for Matrix Stability Hypercube*

Takehiro MORI** and Hideki KOKAME***

1. はじめに

ロバスト制御の研究のよく知られたトピックの一つとして、行列の安定半径を計算する問題がある。これは、次のようなものである。 $A = \{a_{ij}\} \in R^{n \times n}$ を $\mathcal{H}$ (フルヴィッツ行列のクラス) に属する名目行列、 $E = \{e_{ij}\}$ を任意の n 次正方摂動行列として、 $A + E \in \mathcal{H}$ となるような $\|E\|_H$ の極小値 $m_2(A)$ を求めたい。ここに $\|\cdot\|_H$ は、ユークリッド行列ノルムである。したがって、安定半径は行列要素空間において l^2 ノルムで安定余裕を測ることに対応している。この値は、 $E \in C^{n \times n}$ のときには陽に求められ、 $m_2(A) = \inf_{\omega} \sigma_{\min}(j\omega I - A)$ と表わされる。ただし、 $\sigma_{\min}(\cdot)$ は行列の最小特異値を指し、 I は単位行列である。しかし実際に、工学で要求される $E \in R^{n \times n}$ の場合には、 $m_2(A)$ は一般に閉じた形ではおろか、数値的に求めることもおぼつかなかったため、その代償に下界値が数多く報告されてきた (たとえば、参考文献2) を参照されたい)。しかし、最近に至りようやく計算法が見いだされたことが報じられている³⁾。ところで、この安定半径の定義では、十分満たされない点がある。それは、 $m_2(A)$ は直接 A の各要素 a_{ij} の許容変動範囲を与えるものではないことである。

本報告では、この点に鑑み、行列要素空間で l^∞ ノルムを用いて安定余裕を推定することを考える。すなわち、 $\|E\|_H := \max_{i,j} |e_{ij}|$ を採用し、要素空間で A を中心とした安定超立方体の大きさを簡単に推定する方法を提案する。

2. 主要な結果と検討

まず、ここで扱う問題を改めて記述しておこう。安定な名目行列 $A = \{a_{ij}\} \in R^{n \times n}$ と摂動行列 $E = \{e_{ij}\} \in R^{n \times n}$ を考えたとき、行列要素空間での安定超立方体の大きさ (一辺の長さの $1/2$) を与える、

$$\mu_H(A) := \inf \{ \|E\|_H : \exists i, \operatorname{Re} \lambda_i(A+E) \geq 0, E \in R^{n \times n} \} \quad (1)$$

を推定したい。ここに、 $\lambda_i(\cdot)$ は行列の固有値を示す。上式右辺、仮定 $A \in \mathcal{H}$ および行列固有値の要素に関する連続性から、この限界を与える E は $A+E$ の固有値の少なくとも一つを虚軸の上に至らしめるものである。この条件を表現するため、 A に対しクロネッカ和、 $K_A := A \oplus A = A \otimes I + I \otimes A$ を構成する。ここに、 $\otimes$ はクロネッカ積を示す記号である。このとき、 K_A の n^2 個の固有値、 $\lambda_k(K_A), k=1, \dots, n^2$ は、

$$\lambda_k(K_A) = \lambda_i(A) + \lambda_j(A), i, j=1, \dots, n \quad (2)$$

のように表わせることが知られている⁴⁾。これより、一般にその固有値がすべて複素閉左半平面にある行列 A が、虚軸上に少なくとも一つの固有値をもつための必要十分条件は、 $\det K_A = 0$ となることであることがわかる。ここでは A の安定性を仮定したから K_A は正則であり、 $K_A^{-1} := \{\gamma_{ij}\}$ が存在することに注意しよう。

以上の準備のもとに、本稿の主要な結果は次のようである。

【定理】 スカラ量 $m_H(A)$ を、

$$m_H(A) := \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{n^2} |\gamma_{ij}| \right)^{-1} \quad (3)$$

としたとき、 $m_H(A) \leq \mu_H(A)$ となる。つまり、

$$\|E\|_H = \max_{i,j} |e_{ij}| < m_H(A) \quad (4)$$

が成り立つ限り、 $A+E \in \mathcal{H}$ となっている。

この定理の証明の鍵となるのは、次の古典的な結果である。

* 1993 年 11 月 2 日受付

** 京都工芸繊維大学 工学学部 Department of Electronics and Information Science, Kyoto Institute of Technology ; Goshokaido-cho, Matsugasaki, Sakyo ward, Kyoto city, Kyoto 606, JAPAN.

*** 大阪工業大学 電気工学科 Department of Electrical Engineering, Osaka Institute of Technology ; Ohmiya, Asahi ward, Osaka city, Osaka 535, JAPAN.

Key Words: stability robustness, matrix stability hypercube, coefficient perturbation, estimate, matrix inversion.

【補題】⁵⁾ 正則な正方行列 X に対して $X^{-1} = \{z_{ij}\}$ とし, $\eta := (\sum |z_{ij}|)^{-1}$ とする. 任意の X と同じサイズの正方行列 $Y = \{y_{ij}\}$ が $|y_{ij}| < \eta$, $\forall i, j$ を満足するとき, $\det(X+Y) \neq 0$ である.

(定理の証明) 先に述べたことから, (4) 式が成り立つならば, $\det K_{A+E} \neq 0$ となることを示せばよい. ここで二つの事実を利用する. 一つは, K_A の A に関する線形性, つまり, $K_{A+E} = K_A + K_E$ となることであり, 残る一つは $\|K_E\|_H \leq 2\|E\|_H$ である. 後者の関係式はクロネッカ和 K_E およびノルム $\|\cdot\|_H$ の定義より明らかである. 補題において, X, Y をそれぞれ K_A, K_E とおけば, 求める関係は直ちに得られる.

(証明終)

以下に, この結果についての注記事項を述べておく.

- (1) 定理では, 通常要求される最適値を求めるいかなる計算も不要で, 実質的には逆行列の計算がすべてである. しかし, 逆を求めなければならない行列のサイズは n^2 で, これが制約的といえは制約的である. けれども, これは行列を対象とする限り, 払わなければならないコストであろうと考えられる.
- (2) ここで用いたノルム, すなわち安定超立方体の利点は, (4) 式のように名目行列 A の要素 a_{ij} の許容摂動範囲を直接表現している点である. しかしこのノルムは, 通常の行列ノルムに要求される性質をすべて満たしている訳ではないことに注意しよう. たとえば, 二つの行列の積に関するノルム不等式は成り立たない. つまり, X, Y を再び任意の正方行列としたとき, $\|XY\|_H \leq \|X\|_H \|Y\|_H$ は一般に成り立っていない.
- (3) よく知られているように, K_A は, Lyapunov 行列方程式, $AP + PA' = Q$, $P, Q \in R^{n \times n}$ を標準的な一次方程式に書き直した $K_A p = q$ の係数行列である. ここに, p, q は, それぞれ行列 P, Q の行展開, すなわちそれらの行を順にスタックしていったって求められる n^2 ベクトルである. この方程式が, 一意解をもつための限界が, $\mu_H(A)$ となっている.
- (4) 証明からわかるように, ここでは K_A の A に関する線形性が一つのポイントとなっている. したがって, 並行した議論によってシュール安

定超立方体の大きさを推定することは叶わない. そのためには, クロネッカ “積”, $A \otimes A$ を用いなければならない, 線形性は成り立たないからである.

- (5) とくに $\|K_E\|_H = 2\|E\|_H$ の成り立つとき, たとえば $\|E\|_H$ が E の対角要素によって達成されるようなときには, 結果の鋭さ, つまり $\mu_H(A)$ と $m_H(A)$ の隔たりは, 補題の条件の鋭さのみに依っていることがわかる.
- (6) 行列の安定余裕を求める他の一つの方法は, 参考文献 1) に引用されている Gastinel-Kahan 定理を使うことである. しかし, そのためにはノルムとしてベクトルノルムから誘導された行列ノルムを用いるという前提を満たさなければならない. しかし, ここで採用した $\|\cdot\|_H$ はこの前提を満たさないと考えられる.

3. おわりに

フルヴィッツ安定な名目行列に対して, 係数空間でこれを中心にした安定超立方体の大きさを簡単に推定する方法を提案した. 一般に, どのようなノルムを用いるにしろ, 正確な安定余裕の計算には非線形最適化計算を含む相当の労力を要する. このことも, その下界が数多く報告されてきた理由である. 本稿の寄与は, 新たなノルムを採用したことと共に, 既存の下界にさらに計算容易なオプションを付け加えた点にある. 最後に, 参考文献 5) の内容を御教示くださった, 本学中岡明教授に御礼申し上げる.

参考文献

- 1) J. M. Martin : State-Space Measures for Stability Robustness ; IEEE Trans. on Automat. Contr., Vol. 32, No. 6, pp. 509~512 (1987)
- 2) L. Qiu and E. J. Davison : The Stability Robustness Determination of State Space Models with Real Unstructured Perturbations ; Math. Control, Signals and Systems, Vol. 4, pp. 247~267 (1991)
- 3) L. Qiu, B. Bernhardsson, A. Rantzer, E. J. Davison, P. M. Young and J. C. Doyle : On the Real Structured Stability Radius ; Proc. of 12th IFAC World Congress, Vol. 8, pp. 71~78 (1993)
- 4) P. Lancaster and M. Tismenetsky : The Theory of Matrices, Academic (1985)
- 5) M. A. Ostrowskii : Sur le Détermination des Bornes Inférieures pour une Classe des Determinants ; Bull. Sc. Math., Vol. 61, pp. 19~32 (1937)