1次・2次情報を補間する連続時間システム*

堀口 和己**・西村 卓也***・長田 朗***

Continuous-Time Systems Interpolating 1st- and 2nd-Order Information*

Kazumi HORIGUCHI**, Takuya NISHIMURA*** and Akira NAGATA***

1. はじめに

システムの所望特性として, 1次情報(伝達特性に関する情報)および2次情報(パワースペクトラム特性に関する情報)が与えられたとき, これらの特性値を持つような連続時間システムのパラメトリゼーションを提供する. 本稿の議論は, 離散時間システムに対する同様の議論¹⁾を連続時間システムに対して展開したものである. 結果は離散時間システムの結果に双一次変換を用いて導かれており, さらに, 両者の結果が比較されている.

2. 問題の記述

r 入力 m 出力の安定な線形連続時間システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1b)$$

を考える. システム(1)式の伝達関数は

$$H(s) = D + C(sI - A)^{-1}B \quad (2)$$

また, パワースペクトラム関数(PS関数)は

$$P(s) = H(s)H^*(-\bar{s}) = \frac{1}{2}\{R(s) + R^*(-\bar{s})\} \quad (3)$$

(*: 共役転置)と表わされる. $H(s)$ は $\text{Re}(s) \geq 0$ で解析的, また, $R(s)$ は PS 関数の因果的部分で, $\text{Re}(s) \geq 0$ で解析的である. (3) 式の関係より $R(s)$ は m 入力 m 出力安定な連続時間システムの伝達関数として,

$$R(s) = D_R + C(sI - A)^{-1}B_R, \quad (4)$$

$$B_R = 2(XC^* + BD^*), \quad D_R = DD^*,$$

$$AX + XA^* + BB^* = 0, \quad X > 0$$

と表わされる.

連続時間システムの1次情報, 2次情報を定義する.

$H(s), R(s)$ を点 $s_i; \text{Re}(s_i) > 0$ の周りでテイラー展開したとき, (2), (4) 式よりそれらの展開は, それぞれ

$$H(s) = H_{i0} + H_{i1}(s - s_i) + H_{i2}(s - s_i)^2 + \cdots \quad (5)$$

$$H_{ij} = \delta_{0j}D + (-1)^j C(s_i I - A)^{-j-1}B \quad (j=0, 1, \cdots)$$

$$R(s) = R_{i0} + R_{i1}(s - s_i) + R_{i2}(s - s_i)^2 + \cdots \quad (6)$$

$$R_{ij} = \delta_{0j}D_R + (-1)^j C(s_i I - A)^{-j-1}B_R \quad (j=0, 1, \cdots)$$

$$\delta_{00} = 1, \quad \delta_{0j} = 0 \quad (j=1, 2, \cdots)$$

となる. H_{ij}, R_{ij} をそれぞれ連続時間システム(1)式の1次情報, 2次情報と呼ぶ.

本稿で考える問題は, 所望の周波数特性として, 1次・2次情報 H_{ij}^D, R_{ij}^D ($j=0, \cdots, q_i-1, i=1, \cdots, p$) が与えられたとき, これらの特性値を持つような連続時間システム—このようなシステムを1次・2次情報の補間システムと呼ぶ—を求めることである.

【問題】複素周波数点 $s_i; \text{Re}(s_i) > 0$ ($i=1, \cdots, p$) における所望の1次・2次情報 H_{ij}^D, R_{ij}^D ($j=0, \cdots, q_i-1, i=1, \cdots, p$) が与えられたとき, (7)~(9) 式を満たす安定なシステム $(A \ B \ C \ D)$ を求めよ.

$$\delta_{0j}D + (-1)^j C(s_i I - A)^{-j-1}B = H_{ij}^D \quad (7)$$

$$(j=0, \cdots, q_i-1, i=1, \cdots, p)$$

$$\delta_{0j}D_R + (-1)^j C(s_i I - A)^{-j-1}B_R = R_{ij}^D \quad (8)$$

$$(j=0, \cdots, q_i-1, i=1, \cdots, p)$$

$$AX + XA^* + BB^* = 0, \quad X > 0 \quad (9a)$$

$$B_R = 2(XC^* + BD^*), \quad D_R = DD^* \quad (9b)$$

上問題は, 離散時間システムの場合と同様に, 次に述べる行列代数方程式の求解問題へと帰着される¹⁾.

「ある行列 Q および $X > 0$ に対して, (9) 式および

$$\begin{bmatrix} Q & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & [B & B_R] \\ C & [D & D_R] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_Q & [F & F_R] \end{bmatrix} \quad (10)$$

を満たす安定なシステム $(A \ B \ C \ D)$ を求めよ。」ここで,

* 原稿受付 1993年12月24日

** 近畿大学 生物理工学部 Faculty of Biology-Oriented Science and Technology, Kinki University; 930 Nishimitani, Uchita-cho, Nagagun, Wakayama 649-64, JAPAN

*** 近畿大学 理工学部 Faculty of Science and Technology, Kinki University; Kowakae, Higashiosaka city, Osaka 577, JAPAN

Key Words: continuous-time system, interpolation, 1st- and 2nd-order information, parametrization, bilinear transformation.

$$\Lambda = \text{diag} \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \cdots & \Lambda_p \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_p \end{bmatrix} \quad [F \quad F_R] = \begin{bmatrix} F_1 & F_{R1} \\ \vdots & \vdots \\ F_p & F_{Rp} \end{bmatrix}$$

$\Lambda_i, E_i, F_i, F_{Ri}, (i=1, \dots, p)$ はそれぞれ $m q_i \times m q_i, m q_i \times m, m q_i \times r, m q_i \times m$ 行列であり,

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} s_i I_m & & 0 \\ & I_m & \\ & \ddots & \\ 0 & & I_m & s_i I_m \end{bmatrix}, \quad I_m: m \text{ 次単位行列}$$

$$E_i = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [F_i \quad F_{Ri}] = \begin{bmatrix} H_{i0}^D & R_{i0}^D \\ \vdots & \vdots \\ H_{iq_i-1}^D & R_{iq_i-1}^D \end{bmatrix}$$

である。

3. 問題の解

方程式 (9), (10) 式の一般解を求めるために, 双一次変換 $s = (1-z^{-1})/(1+z^{-1})$ に基づく連続時間システム $(A \ B \ C \ D)$ と離散時間システム $(A_d \ B_d \ C_d \ D_d)$ の間の変換

$$A = (I + A_d)^{-1}(A_d - I) \quad (11a)$$

$$[B \ B_R] = \sqrt{2}(I + A_d)^{-1}[B_d \ B_{dR}] \quad (11b)$$

$$C = \sqrt{2}C_d(I + A_d)^{-1} \quad (11c)$$

$$[D \ D_R] = [D_d \ D_{dR}] - C_d(I + A_d)^{-1}[B_d \ B_{dR}] \quad (11d)$$

を導入する²⁾。

(11) 式を, (9), (10) 式に代入すれば, それぞれ

$$X = A_d X A_d^* + B_d B_d^*, \quad X > 0 \quad (12a)$$

$$B_{dR} = 2(A_d X C_d^* + B_d D_d^*) \quad (12b)$$

$$D_{dR} = C_d X C_d^* + D_d D_d^*$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_d Q & E_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_d & [B_d \ B_{dR}] \\ C_d & [D_d \ D_{dR}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & [F_d \ F_{dR}] \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$A_d = (I + A)^{-1}(I - A), \quad E_d = \sqrt{2}(I + A)^{-1}E$$

$$[F_d \ F_{dR}] = \sqrt{2}(I + A)^{-1}[F \ F_R]$$

を得る。すなわち, 連続時間システム $(A \ B \ C \ D)$ が (9), (10) 式を満たすならば, 変換 (11) 式より得られる

離散時間システム $(A_d \ B_d \ C_d \ D_d)$ は (12), (13) 式を満たす。

逆に, $(A_d \ B_d \ C_d \ D_d)$ が (12), (13) 式を満たすならば, 変換 (11) 式より得られる $(A \ B \ C \ D)$ は, (9), (10) 式を満たすことも示される。したがって, 方程式 (9), (10) 式の一般解は, 方程式 (12), (13) 式の一般解に変換 (11) 式を用いることにより求められる。

方程式 (12), (13) 式の一般解は次に与えられる¹⁾。

「(12), (13) 式を満たす離散時間システム $(A_d \ B_d \ C_d \ D_d)$ が存在するための必要十分条件は, Lyapunov 方程式

$$\Lambda P + P \Lambda^* + F F^* - \frac{1}{2}(F_R E^* + E F_R^*) = 0^+ \quad (14)$$

の解 P_0 が半正定となることである。 $P_0 \geq 0$ のとき, (12), (13) 式を満たす任意の $(A_d \ B_d \ C_d \ D_d)$ は, Fig. 1 に示される入力 u_d , 出力 y_d なるシステム $(A_{d0} \ B_{d0} \ C_{d0} \ D_{d0})$ の相似なシステムとして与えられる。」

Fig. 1 System $(A_{d0} \ B_{d0} \ C_{d0} \ D_{d0})$

Fig. 1 において,

$$u_d \rightarrow y_d : (A_{d0} \ B_{d0} \ C_{d0} \ D_{d0})$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_d \\ \tilde{w}_d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{y}_d \\ \tilde{v}_d \end{bmatrix} : (\bar{A}_d \ \bar{B}_d \ \bar{C}_d \ \bar{D}_d)$$

$$(\tilde{v}_d = [u_d^T - y_d^T]^T, \tilde{y}_d = y_d)$$

$$\tilde{u}_d \rightarrow \tilde{w}_d : (F_d \ G_d \ H_d \ J_d)$$

$(\bar{A}_d \ \bar{B}_d \ \bar{C}_d \ \bar{D}_d)$ は与えられた 1 次・2 次情報より決定されるシステムで, その次数は $\text{rank } P_0$, 各行列は

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_d & \bar{B}_d \\ \bar{C}_d & \bar{D}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} W_{11}^* & [V_{11} W_{21}^* \ V_{12}^*] \\ [V_{21} W_{11}^*] & [V_{21} W_{21}^* \ V_{22}^*] \\ W_{12}^* & [W_{22}^* \ 0] \end{bmatrix} \quad (15)$$

により計算される。 V_{ij}, W_{ij} は特異値分解

$$\begin{bmatrix} \Lambda_d Q_0 & \frac{1}{2}(E_d + F_{dR}) \end{bmatrix} = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11}^* & V_{21}^* \\ V_{12}^* & V_{22}^* \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} Q_0 & [F_d \ \frac{1}{2}(E_d - F_{dR})] \end{bmatrix} = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{11}^* & W_{21}^* \\ W_{12}^* & W_{22}^* \end{bmatrix} \quad (17)$$

からの行列, 上式の Q_0 は P_0 のフルランク分解 $P_0 = Q_0 Q_0^*$ の因子 (列フルランク行列) である^{††}。

† 本方程式は $P - \Lambda_d P \Lambda_d^* + F_d F_d^* - 1/2(F_{dR} E_d^* + E_d F_{dR}^*) = 0$ と等価である。

†† Q_0 には右からユニタリ行列倍の自由度がある。この自由度はシステム $(\bar{A}_d \ \bar{B}_d \ \bar{C}_d \ \bar{D}_d)$ のユニタリ相似変換として現れるが, $(A_{d0} \ B_{d0} \ C_{d0} \ D_{d0})$ の相似なシステムのクラスは不変である (後述の連続時間システムについても同様)。

$(F_d \ G_d \ H_d \ J_d)$ は任意の離散時間無損失システム, すなわち, $\begin{bmatrix} F_d & G_d \\ H_d & J_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_d & G_d \\ H_d & J_d \end{bmatrix}^* = I$ を満たす任意のシステムである. $(F_d \ G_d \ H_d)$ が可到達・可観測ならば, $\dim A_{d0} = \text{rank } P_0 + \dim F_d$ となる.

方程式 (9), (10) 式の一般解は, 上述の結果に変換 (11) 式を用いることにより求められる. すなわち, (9), (10) 式が解を持つとき, 任意の解はシステム $(A_0 = (I + A_{d0})^{-1}(A_{d0} - I), B_0 = \sqrt{2}(I + A_{d0})^{-1}B_{d0}, C_0 = \sqrt{2}C_{d0}(I + A_{d0})^{-1}, D_0 = D_{d0} - C_{d0}(I + A_{d0})^{-1}B_{d0})$ の相似なシステムとして与えられる. $(A_0 \ B_0 \ C_0 \ D_0)$ は Fig. 1 のサブシステム $(\bar{A}_d \ \bar{B}_d \ \bar{C}_d \ \bar{D}_d)$ および $(F_d \ G_d \ H_d \ J_d)$ に, それぞれ独立に変換 (11) 式を施して得られるシステムに等しいことが確認できる.

「(9), (10) 式を満たす連続時間システム $(A \ B \ C \ D)$ が存在するための必要十分条件は, Lyapunov 方程式 (14) 式の解 P_0 が半正定となることである. $P_0 \geq 0$ のとき, (9), (10) 式を満たす任意の $(A \ B \ C \ D)$ は, Fig. 2 に示される入力 u , 出力 y なるシステム $(A_0 \ B_0 \ C_0 \ D_0)$ の相似なシステムとして与えられる.」

Fig. 2 System $(A_0 \ B_0 \ C_0 \ D_0)$

Fig. 2 において,

$$u \rightarrow y: (A_0 \ B_0 \ C_0 \ D_0)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}: (\bar{A} \ \bar{B} \ \bar{C} \ \bar{D})$$

$$(\tilde{u} = [u^T \ -y^T]^T, \tilde{y} = y)$$

$$\tilde{v} \rightarrow \tilde{w}: (F \ G \ H \ J)$$

であり, $(\bar{A} \ \bar{B} \ \bar{C} \ \bar{D})$ は与えられた 1 次・2 次情報より決定されるシステムで, その次数は $\text{rank } P_0$, 各行列は (15) 式の $(\bar{A}_d \ \bar{B}_d \ \bar{C}_d \ \bar{D}_d)$ を用いて

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I + \bar{A}_d)^{-1}(\bar{A}_d - I) & \sqrt{2}(I + \bar{A}_d)^{-1}\bar{B}_d \\ \sqrt{2}\bar{C}_d(I + \bar{A}_d)^{-1} & \bar{D}_d - \bar{C}_d(I + \bar{A}_d)^{-1}\bar{B}_d \end{bmatrix}$$

により計算される[†].

$(F \ G \ H \ J)$ は任意の連続時間無損失システム, すな

わち, $F + F^* + GG^* = 0, GJ^* + H^* = 0, JJ^* - I = 0$ を満たす任意のシステムである. $(F \ G \ H)$ が可到達・可観測ならば, $\dim A_0 = \text{rank } P_0 + \dim F$ となる.

(9a) 式より, $(A \ B)$: 可到達 $\iff A$: 安定行列であるから, 次の結果が言える.

【問題の解】 補間問題が可解であるための必要条件是 Lyapunov 方程式 (14) 式の解 P_0 が半正定となることである. $P_0 \geq 0$ のとき, Fig. 2 の $(A_0 \ B_0 \ C_0 \ D_0)$ において, $(A_0 \ B_0)$ が可到達のとき, またそのときに限り, 補間問題の解 $(A \ B \ C \ D)$ は $(A_0 \ B_0 \ C_0 \ D_0)$ の相似なシステムとして与えられる. $(F \ G \ H)$ が可到達・可観測ならば, $\dim A_0 = \text{rank } P_0 + \dim F$ となる.

最後に, 1 次・2 次情報の補間に関する連続時間システムの結果と離散時間システムの結果を比較しておく.

- ・離散時間システムの結果¹⁾は q -Markov cover に関する結果³⁾を包含していた. 連続時間システムの場合, q -Markov cover は本補間において $p = 1, s_1 \rightarrow \infty$ とした場合に相当するので, q -Markov cover に関する結果は本結果とは別に導かなくてはならない^{††}.
- ・両者とも, 補間システムが存在するための必要条件は Lyapunov 方程式の解が半正定となることであり, 補間システムは無損失システムをパラメータとする同じ構造 (Fig. 1, Fig. 2) で与えられる.
- ・連続時間の補間システムにおいて, $\bar{D}$ の第 (2, 2) ブロック要素が必ずしも零行列とならないため, パラメータ $(F \ G \ H \ J)$ の $(A_0 \ B_0 \ C_0 \ D_0)$ への入り方が, 離散時間の補間システムの場合に比べて複雑となる.

4. おわりに

本結果は参考文献 1) と同様, 多様な周波数特性の仕様を考慮した連続時間システムの近似, 低次元化に有用である.

参考文献

- 1) 堀口, 西村, 長田: 1 次・2 次情報を補間するシステムのパラメトリゼーション; システム制御情報学会論文誌, Vol. 7, No. 3, pp. 94~102 (1994)
- 2) K. Glover: All Optimal Hankel-Norm Approximations of Linear Multivariable Systems and their L^∞ -Error Bounds; International Journal of Control, Vol. 39, No. 6, pp. 1115~1193 (1984)
- 3) B. D. O. Anderson and R. E. Skelton: The Generation of All q -Markov Covers; IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-35, No. 4, pp. 375~384 (1988)
- 4) 長岡: 連続時間線形システムの Mullis-Roberts 型近似; 電子通信学会論文誌 A, Vol. J69-A, No. 6, pp. 694~702 (1986)

[†] $(I + \bar{A}_d)$ の正則性は (15)~(17) 式より確認できる (証明略).

^{††} 参考文献 4) では, $s = \infty$ における 1 次・2 次情報を補間する単入出力システムが与えられ, 本稿とも参考文献 3) と異なる結果が報告されている.