論 文

粉体粒径のモーメントに着目した粉砕機のモデリング*

深山 幸穂**・金氏 武***・井山 望***・
川瀬 隆世****・湯浅 博司****・山本 晃二****

A Modeling Method for Pulverizers Using Moments of the Particle Size*

Yukio FUKAYAMA**, Takeshi KANEUJI***, Nozomu IYAMA***,
Takayo KAWASE****, Hiroshi YUASA**** and Koji YAMAMOTO****

A dynamics model suitable for applying the system control theory to pulverizers has been developed. In this report, the dynamics model is discussed through the following order : (1) describing pulverizers, in which particle size distributions have the non-Gaussian properties, with the state space form as stochastic systems, (2) reducing the order of the state space by the proposed parameterizing method using the moments of the particle size distributions, (3) deriving the modeling algorithms for the proposed method, and (4) validations of the model through analysis on a commercial plant and dynamics response data of a pilot plant.

1. はじめに

石炭火力発電設備は、近年のエネルギー事情により増加を続けており、最近ではベースロード運用のみならず高速負荷変化運用（従来は石油火力が担当）を求められている。石炭火力用ボイラにおいては、「石炭粉砕機とバーナを直結して微粉炭を燃焼する方式」が主流であり、石油火力（バーナへの燃料供給量をバルブ操作で容易に制御可能、燃料が均質）並みの負荷変化運用を実現するため、石炭粉砕機の制御が重要である。

石炭粉砕機の制御にあたり、バーナに供給される微粉炭（出炭）の粒度分布や流量の目標値への追従性が性能評価の対象となる。このとき、微粉炭の粒度分布は一般に非ガウス性が強く、燃料の品質として平均粒径よりも分布の裾（例：80パーセンタイル値で75 μ m程度）が重視されている。加えて、出炭流量の変化は粉砕機内の

諸機構（混合、粉砕、分級等）での粒度分布変化の帰結であり、これら非ガウス性の現象に忠実なモデル化が必要である。

本研究では、Austinら^{1)~3)}による粉砕機構の特性解明（粉砕速度論に基づく体系的な研究）、および、正路、廻ら^{4),5)}による分級機構、混合機構を含めた粉砕機の諸特性の数値解析（粒度分布をヒストグラム状に分割して非ガウス性を模擬）の成果に基礎を置き、新たなニーズである「システム制御理論の応用に適するモデル」の構築を推進した。本論では、粉砕機を確率システムとして定式化（2.；非ガウス性を状態空間で表現）した後、粉体粒度分布のモーメントに着目した状態ベクトルの次数低減、および、この場合の粉砕機内諸機構の模擬方法の提案（3.）を行い、最後に新提案のモデルの妥当性を確認（4.；粉体流量、粒度分布等の実測データを使用）する。

本研究の動機や数値例は火力発電用石炭粉砕機に関するが、議論、手法は粉砕機全般に適用可能である。

2. 粉砕機のモデル化

本論では、Fig.1の微粉炭製造用粉砕機を具体例として、モデル化の議論を進める。粉砕機は、一般に、(1)粉砕機構（pulverizing：ローラ、ボール、ハンマー等）、(2)分級機構（classifying：粉砕機構による被粉砕物から重力、遠心力等で粗粒を分離）、循環流（recircula-

* 原稿受付 1994年1月10日

** バブコック日立(株) 呉研究所 Kure Research Laboratory, Babcock-Hitachi ; 3-36 Takaramachi, Kure city, Hiroshima 737, JAPAN

*** 電源開発(株) 火力部 Thermal Power Department, Electric Power Development Co. Ltd. ; 15-1 Ginza 6-chome, Chuo ward, Tokyo 104, JAPAN

**** バブコック日立(株) 呉工場 Kure Works, Babcock-Hitachi ; 6-9 Takaramachi, Kure city, Hiroshima 737, JAPAN

Key Words: stochastic system, modeling, simulation, pulverizer, particle size distribution.

Fig. 1 Example of coal pulverizer

tion : 分級機構から混合機構への粉体の流れ), (3) 混合機構 (blending : 循環流と供給された原料を混合, 蓄積の後, 粉碎機構に流出), 蓄積 (hold-up : 混合機構に保有する粉体) を主要な構成要素とする。

本例の粉碎機では, ベルトコンベアからの給炭は分級機構からの循環流と共に, ターンテーブル (混合機構) 上で保有炭 (蓄積) となり, 外縁近傍のローラ (粉碎機構) で粉碎される。粉碎後の石炭は搬送空気 (ターンテーブル外縁より供給) で吹き上げられ, 一次分級 (重力分級機構), および, 二次分級 (遠心分級機構; 上部のベーンによる旋回) で粗粒が捕集されて混合機構へ落下 (循環流) する。他方, 二次分級を通過した細粒は出炭となり, パーナに供給される。また, 本研究ではターンテーブル上の保有炭の粉碎機構入口への移動について, その粒径依存性を効率的に考慮するため, 仮想的な分級機構 (virtual classifying : 2.3.2 参照) を仮定している。

2.1 粒度分布の表記

2.1.1 粉体流の性質

粉体中からサンプリングした1粒子について, その粒径 ξ (以下, 大文字のスカラ, ベクトルは確率変数を示す), 形状係数 r (球形の場合; $=1$), 密度 Γ , 質量 M は次の関係にある。

$$M = \frac{1}{6} \pi \exp(3\xi) r \Gamma \quad (1)$$

ここに, ξ は対数スケールで扱われ, 次の確率密度関数 $f_{\xi}(\xi)$ (以下, 確率密度関数全般を同様に表記する) を持つ。

$$f_{\xi}(\xi) d\xi = \Pr\{\xi < \xi \leq \xi + d\xi\} \quad (2)$$

また, 粉体の流量 Q (質量流量) は次のとおり求められる。

$$Q = \sum_{r=1}^N M \quad (3)$$

ここに, N は断面 (断面積 S) の単位時間の通過粒子の個数で, 粒子の存在密度 P , 断面法線方向の速度成分 Z (両者とも ξ に依存) より次のとおり与えられる。

$$N = P Z S \quad (4)$$

2.1.2 粒度分布の定義

本研究では, 粒度分布の定義に「断面を微小時間に通過する粒子中の, 対数粒径 ξ 以下なる質量割合」を用い, その密度関数を $g(\xi)$ と表記 (適宜に場所を示す添字を付加) する。 $g(\xi)$ と $f_{\xi}(\xi)$ との関係は (1)~(4) 式を考慮して, 以下となる。

$$\begin{aligned} g(\xi) &= E\{Q\}^{-1} E\{Q | \xi < \xi \leq \xi + \Delta\xi\} f_{\xi}(\xi) \\ &= E\{P Z \exp(3\xi)\}^{-1} \\ &\quad \times \int \int \rho \zeta f_{PZ|\xi}(\rho, \zeta | \xi) d\rho d\zeta \\ &\quad \times \exp(3\xi) f_{\xi}(\xi) \end{aligned} \quad (5)$$

ここに, $f_{PZ|\xi}(\rho, \zeta | \xi)$ は P, Z の結合条件付確率密度 (以下, 条件付確率密度全般を同様に表記する) である。

(5) 式の定義により, $\xi < \xi \leq \xi + \Delta\xi$ なる粒子の流量の期待値は $E\{Q\} g(\xi) \Delta\xi$ で表わせる。

粉体の移動速度 $E\{Z\}$ が小さい場合, Z と ξ は独立 (粒径による速度差が小さい) とみなせ, (5) 式は次の形式 ($E\{Z\}$ を約分した) に帰着する。

$$\begin{aligned} g(\xi) &= E\{P \exp(3\xi)\}^{-1} \\ &\quad \times E\{P | \xi < \xi \leq \xi + \Delta\xi\} \exp(3\xi) f_{\xi}(\xi) \end{aligned} \quad (6)$$

この形式により, 粒度分布 $g(\xi)$ を「静止した粉体」に適用可能である。したがって, 混合機構に蓄積した粉体 (蓄積量 G) について, $\xi < \xi \leq \xi + \Delta\xi$ なる粒子の蓄積量の期待値は $E\{G\} g(\xi) \Delta\xi$ で表わせる。

2.2 粉碎機構

粉碎前後の粒度分布 (粉碎前後の諸量に, それぞれ添字 ip, op を付加) は, 条件付確率密度 $g_{op|ip}(\xi | \eta)$ を用い, 一般に次の関係と置ける。

$$g_{op}(\xi) = \int g_{op|ip}(\xi | \eta) g_{ip}(\eta) d\eta \quad (7)$$

被粉碎物が石炭の場合, 正路⁴⁾により, 条件付確率密度の関数形が解明され, 次式のとおり粉碎前後の粒径の比 (対数粒径の差) のみへの依存性 (流量 Q の影響小; 実験による) が知られている。

$$g_{op|ip}(\xi | \eta) = s(\xi - \eta) \quad (8)$$

ここに, $s(\xi)$ は粉碎分布定数と呼ばれる。

粉砕前後の質量流量の関係は、粉砕機構に蓄積作用はない（蓄積作用は混合機構に一括して扱う）と仮定して次式を得る。

$$E\{Q_{op}\} = E\{Q_{ip}\} \quad (9)$$

(7)～(9) 式より粉砕機構の模擬は次に帰着する。

$$E\{Q_{op}\} g_{op}(\xi) = s(\xi) * E\{Q_{ip}\} g_{ip}(\xi) \quad (10)$$

ここに、* は重畳積分を示す。

2.3 分級機構

2.3.1 分級機構全般

粉砕機中の $n+1$ 個の分級機構について、これを第 j 番目で代表させ、入口、循環、通過の各粉体流の諸量（順に、添字 ij, rj, ij ）の関係を考える。

このとき、部分分級効率 $c_j(\xi)$ を「粒径 ξ 近傍の入口流と循環流の比」として以下に定義する。

$$c_j(\xi) = [E\{Q_{ij}\} g_{ij}(\xi) \Delta \xi]^{-1} \times E\{Q_{rj}\} g_{rj}(\xi) \Delta \xi \quad (11)$$

$$0 \leq c_j(\xi) \leq 1 \quad (12)$$

石炭粉砕機の場合、 $c_j(\xi)$ の関数形は廻ら⁵⁾により解明されており、粒径 ξ のみへの依存性（流量 Q の影響小；実験による）が知られている。

循環流、通過流について、(11) 式の定義より、ただちに以下の関係を得る。

$$E\{Q_{rj}\} g_{rj}(\xi) = c_j(\xi) E\{Q_{ij}\} g_{ij}(\xi) \quad (13)$$

$$E\{Q_{ij}\} g_{ij}(\xi) = [1 - c_j(\xi)] E\{Q_{ij}\} g_{ij}(\xi) \quad (14)$$

このとき、流量の期待値は以下のとおり求められる。

$$E\{Q_{rj}\} = r_j E\{Q_{ij}\} \quad (15)$$

$$E\{Q_{ij}\} = (1 - r_j) E\{Q_{ij}\} \quad (16)$$

ここに、循環比 r_j を次のとおり定義した。

$$r_j = \int c_j(\xi) g_{ij}(\xi) d\xi \quad (17)$$

2.3.2 仮想分級機構（粉砕速度定数の取り扱い）

「混合機構の粉体の蓄積量 G_b と粉砕機構への流出流量 Q_{ip} の比」は、粉砕速度定数 $b(\xi)$ として次式に定義される。

$$b(\xi) = [E\{G_b\} g_b(\xi) \Delta \xi]^{-1} \times E\{Q_{ip}\} g_{ip}(\xi) \Delta \xi \quad (18)$$

ここに、石炭粉砕機の場合、 $b(\xi)$ の関数形は正路⁶⁾により解明され、粒径 ξ のみへの依存性（蓄積量 G の影響小；実験による）が知られている。

本研究では後述する利便性（ $E\{G_b\} g_b(\xi)$ 消去など）のため、 $b(\xi)$ の粒径依存性を仮想的な分級機構（0 番

目の分級機構）にて考慮する。これは、まず次式のとおり、混合機構の蓄積量と仮想分級への流出量を比例関係（粒径に非依存）とする。

$$E\{Q_{i0}\} g_{i0}(\xi) \Delta \xi = \theta E\{G_b\} g_b(\xi) \Delta \xi \quad (19)$$

ここに、比例定数 θ は次に定める。

$$\theta = \sup\{b(\xi)\} \quad (\theta > 0) \quad (20)$$

つぎに、下式の部分分級効率 $c_0(\xi)$ を持つ仮想分級機構を置き（2.3.1 の諸式を適用）、(20) 式の (18) 式に対する粉体流の剰余分を混合機構へ循環させる。

$$c_0(\xi) = 1 - \theta^{-1} b(\xi) \quad (0 \leq c_0(\xi) \leq 1) \quad (21)$$

そして、次式のとおり仮想分級機構の出口（通過）の条件を粉砕機構入口に与え、 $b(\xi)$ の粒径依存性の考慮を完了できる。

$$E\{Q_{ip}\} g_{ip}(\xi) = E\{Q_{i0}\} g_{i0}(\xi) \quad (22)$$

2.4 混合機構

混合機構（添字 b ）において、分級機構（ $j=0, \dots, n$ ）からの循環流（添字 rj ）と、原料（添字 ib ）とを混合、蓄積の後、仮想分級機構（添字 $i0$ ）に流出する場合、諸量の関係を考える。

混合、蓄積により各粒子の粒径は変化しないと仮定し、次のとおり、粒径 $\xi < \xi \leq \xi + \Delta \xi$ の粒子のマスバランス式が得られる。

$$dE\{G_b\} g_{ob}(\xi) \Delta \xi = \left[\sum_{j=0}^n E\{Q_{rj}\} g_{rj}(\xi) + E\{Q_{ib}\} g_{ib}(\xi) - E\{Q_{i0}\} g_{i0}(\xi) \right] \Delta \xi dt \quad (23)$$

(19) 式により、 $E\{G_b\} g_b(\xi)$ を消去すれば、マスバランスは次式（粉体流のみに着目）となる。

$$\theta^{-1} dE\{Q_{i0}\} g_{i0}(\xi) = \left[\sum_{j=0}^n E\{Q_{rj}\} g_{rj}(\xi) + E\{Q_{ib}\} g_{ib}(\xi) - E\{Q_{i0}\} g_{i0}(\xi) \right] dt \quad (24)$$

2.5 モデルの全体構成

2.5.1 モデル化対象について補足事項

Fig. 1 の石炭粉砕機（仮想分級、一次分級、二次分級の順に $j=0, 1, 2$ ）のモデル化にあたり、構造上から以下の条件を補う。（粉砕機構出口から一次分級機構入口、一次分級機構出口から二次分級機構入口への接続）

$$E\{Q_{i1}\} g_{i1}(\xi) = E\{Q_{op}\} g_{op}(\xi) \quad (25)$$

$$E\{Q_{i2}\} g_{i2}(\xi) = E\{Q_{i1}\} g_{i1}(\xi) \quad (26)$$

また、系の入力に関し、粉砕機への給炭量 Q_{ib} (ベルトコンベアで供給) は、ベルト上の層高の「ゆらぎ」から確率変数となる。一方、給炭の粒度分布 $g_{ib}(\xi)$ は、同一解析条件で一定 (確率変数でない) と仮定できる。これは、ベルト上での粉体の移動速度は粒径に依存しない ((5) 式と (6) 式が等価) から、 $g_{ib}(\xi)$ は給炭の静止時の粒度分布に等しく、かつ、経験的に給炭の静止時の粒度分布はおおむね一様だからである。

2.5.2 システム方程式

システム方程式の導出にあたり、2.2~2.4 の諸式を (24) 式に代入 (Fig. 1 の粉体の流れに準拠) して次式を得る。

$$\begin{aligned} dE\{Q_{i0}\}g_{i0}(\xi) &= \theta \left[[c_2(\xi)\{1-c_1(\xi)\}+c_1(\xi)] \right. \\ &\quad \times [s(\xi)*\{1-c_0(\xi)\}E\{Q_{i0}\}g_{i0}(\xi)] \\ &\quad + \{c_0(\xi)-1\}E\{Q_{i0}\}g_{i0}(\xi) \\ &\quad \left. + E\{Q_{ib}\}g_{ib}(\xi) \right] dt \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} E\{Q_{i2}\}g_{i2}(\xi) &= [\{1-c_2(\xi)\}\{1-c_1(\xi)\}] \\ &\quad \times [s(\xi)*\{1-c_0(\xi)\}E\{Q_{i0}\}g_{i0}(\xi)] \end{aligned} \quad (28)$$

このとき、(27)、(28) 式において Q の期待値記号を除去し、次の確率システムを考える。

$$\begin{aligned} dQ_{i0}g_{i0}(\xi) &= [A\{g_{i0}(\xi)\}Q_{i0} \\ &\quad + B\{g_{ib}(\xi)\}u]dt + B\{g_{i0}(\xi)\}d\beta \end{aligned} \quad (29)$$

$$Q_{i2}g_{i2}(\xi) = C\{g_{i0}(\xi)\}Q_{i0} \quad (30)$$

ここに、次の演算 A, B, C を定義した。

$$\begin{aligned} A\{g(\xi)\} &\equiv \theta [c_2(\xi)\{1-c_1(\xi)\}+c_1(\xi)] \\ &\quad \times [s(\xi)*\{1-c_0(\xi)\}g(\xi)] \\ &\quad + \theta \{c_0(\xi)-1\}g(\xi) \end{aligned} \quad (31)$$

$$B\{g(\xi)\} \equiv \theta \quad (32)$$

$$\begin{aligned} C\{g(\xi)\} &\equiv [\{1-c_2(\xi)\}\{1-c_1(\xi)\}] \\ &\quad \times [s(\xi)*\{1-c_0(\xi)\}E\{Q_{i0}\}g(\xi)] \end{aligned} \quad (33)$$

また、 β は分散パラメータ R_w のブラウン運動で、次の性質を持つ。

$$Q_{ib} = u + W \quad (34)$$

$$Wdt = d\beta \quad (35)$$

$$E\{\beta(t)-\beta(s)\} = 0 \quad (\text{すべての } t, s) \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\beta(t)-\beta(s)\} &= R_w |t-s| \quad (\text{すべての } t, s) \end{aligned} \quad (37)$$

ここで、演算 A, B, C は直接的に Q に非依存であり、 $g(\xi)$ を介して緩慢に変化する。さらに、(3) 式における中心極限定理の成立 (N は十分大) を期待して、(29)、

(30) 式は流量 Q について線形時変ガウス性システムとみなせる。よって、その解の平均値関数が (27)、(28) 式に従う確率システムは、唯一 (29)、(30) 式であり、これが求める粉砕機の定式化である。

なお、オンライン制御での利便性により、 Q_{ib} は計測信号 u に白色雑音 W (ベルトコンベアの動特性の影響等) 有色雑音となる場合は、適宜、当該動特性をシステム方程式に組み込む⁹⁾ が加算されたと仮定する。

3. 粉砕機モデルの次数低減

状態ベクトル ((27) 式) の数値計算にあたり、関数空間のヒストグラム状の近似 ($x(\xi_1), x(\xi_2), \dots, x(\xi_\nu)$)^T を採用すると、模擬精度の確保のため、経験的に数十次元を要し、少なくとも制御技術用として実用的ではない。このため、本節では状態ベクトルの次元低減法と、その際の粉砕機内の諸機構の模擬方法を導出し、実用的な粉砕機モデルを構築する。

なお、粒度分布密度 $g(\xi)$ 、粉砕分布定数 $s(\xi)$ について、 ν 次以下のモーメントの存在を仮定して議論を進める。

3.1 低次元化した状態ベクトルの性質

3.1.1 基準化したモーメントによる記述

本研究では $g(\xi)$ のモーメント (最高次数 ν) を用い、状態ベクトル ($Qg(\xi)$ 型) を以下のとおりパラメトライズして $\nu+1$ 次 ($Qv(\lambda, \rho)$ 型) に次数の低減をはかる。

$$Qv(\lambda, \rho) \equiv \int q(\rho^{-1}[\xi-\lambda])Qg(\xi)d\xi \quad (38)$$

ここに、次のモーメントベクトル $v(\lambda, \rho)$ 、多項式ベクトル $q(\xi)$ をそれぞれ定義した。

$$\begin{aligned} v(\lambda, \rho) &\equiv (v_0(\lambda, \rho), v_1(\lambda, \rho), \dots, v_\nu(\lambda, \rho))^T \\ (v_0(\lambda, \rho) &= 1) \end{aligned} \quad (39)$$

$$q(\xi) \equiv (1, \xi, \dots, \xi^\nu)^T \quad (40)$$

すなわち、 $v(\lambda, \rho)$ の第 k 成分 ($k=0, 1, \dots, \nu$) は、 (λ, ρ) に基準化 (以下、変数変換 $\rho^{-1}[\xi-\lambda]$ を「 (λ, ρ) で基準化した」と称す) した $g(\xi)$ の k 次モーメント $v_k(\lambda, \rho)$ であり、 $v(\lambda, \rho)$ と流量 Q との積 (以下、単に流量 Qv と称し、必要に応じて場所の添字を付加する) で対象システムを記述する。

ちなみに、以下の諸計算において Qv の形態で値を得た場合、 $v_0(\lambda, \rho) = 1$ に着目して Q と v を一意に分離できる。

3.1.2 基準化パラメータの変更

$q(\xi), v$ の基準化の変更について、二項定理により次の関係が成立する。

$$\begin{aligned} q(\rho^{-1}[\xi-\lambda]) &= L(\lambda, \rho; \lambda_0, \rho_0) q(\rho_0^{-1}[\xi-\lambda_0]) \end{aligned} \quad (41)$$

$$v(\lambda, \rho) = L(\lambda, \rho; \lambda_0, \rho_0) v(\lambda_0, \rho_0) \quad (42)$$

ここに、変換行列 $L(\lambda, \rho; \lambda_0, \rho_0) = (l_{ij})$ ($i, j = 0, 1, \dots, \nu$) は次のとおり定義でき、正則行列となる。

$$(1) \quad j > i; l_{ij} = 0$$

$$(2) \quad j \leq i;$$

$$l_{ij} = \rho_0^i \rho^{-i} C_j [\rho_0^{-1} [\xi - \lambda_0]]^{i-j} \quad (43)$$

なお、 $(\lambda, \rho) = (\mu, \sigma) = (v_1(0, 1), v_2(\mu, 1)^{0.5})$ と選べば、基準化した高次モーメントが減少し、解析精度が向上する。この場合、次の関係が得られる。

$$v_1(\mu, \sigma) = 0, v_2(\mu, \sigma) = 1 \quad (44)$$

3.1.3 分布の混合

Qv によるシステム記述の例として、次の分布の混合を考える。

$$Qg(\xi) = \sum_m Q_m g_m(\xi) \quad (45)$$

上式に $q(\rho^{-1}[\xi - \lambda])$ を乗じ、 $-\infty < \xi < \infty$ について積分すれば、次の簡単な表記に帰着する。

$$Qv(\lambda, \rho) = \sum_m Q_m v_m(\lambda, \rho) \quad (46)$$

3.1.4 密度関数の具体化

$Qv(\lambda, \rho)$ から $Qg(\xi)$ 型への具体化は、グラム＝シャリエ展開に基づき、 $q(\xi)$ 、定数行列 K (正則行列) を用いて以下のとおり⁶⁾ 実施できる。

$$Qg(\xi) = p(\xi; \lambda, \rho) \times q^T(\rho^{-1}[\xi - \lambda]) K Qv(\lambda, \rho) \quad (47)$$

$$K \equiv H^T \text{diag}(1, 1, 2!^{-1}, \dots, \nu!^{-1}) H \quad (48)$$

ここに、 $p(\xi; \lambda, \rho)$ はガウス分布密度関数である。

$$p(\xi; \lambda, \rho) = (2\pi)^{-0.5} \rho^{-1} \exp\{0.5\rho^{-2}[\xi - \lambda]^2\} \quad (49)$$

また、定数行列 $H = (h_{ij})$ ($i, j = 0, 1, \dots, \nu$) は以下に与えられ⁶⁾、正則行列である。

$$(1) \quad j > i \text{ or } i = 2n, j = 2k+1$$

$$\text{or } i = 2n+1, j = 2k; h_{ij} = 0$$

$$(2) \quad j \leq i, i = 2n+1, j = 2k+1;$$

$$h_{ij} \equiv (-1)^{n-k} C_k (2n+1)!! \{(2k+1)!!\}^{-1}$$

$$(3) \quad j \leq i, i = 2n, j = 2k;$$

$$h_{ij} \equiv (-1)^{n-k} C_k (2n-1)!! \{(2k-1)!!\}^{-1} \quad (50)$$

このとき、 $Hq(\xi)$ の第 k 成分 ($k = 0, 1, \dots, \nu$) は、 k 次のエルミート多項式であり、下式の直交性が知られている。

$$\int Hq(\xi) q^T(\xi) H^T p(\xi; 0, 1) d\xi = \text{diag}(1, 1, 2!, \dots, \nu!) \quad (51)$$

したがって、(47) 式に左より $Hq(\rho^{-1}[\xi - \lambda])$ を乗じ、 ξ について積分すると次式が得られ、その第 k 成分 ($k = 0, 1, \dots, \nu$) は k 次のグラム＝シャリエ展開係数である。

$$H Q v(\lambda, \rho) = \int Q g(\xi) H q(\rho^{-1}[\xi - \lambda]) d\xi \quad (52)$$

なお、本論において $Qg(\xi)$ 型のグラフを表示する場合、 $(\lambda, \rho) = (\mu, \sigma)$ として (47) 式の打切誤差 (ν 次を超える項の影響) を低減する。

3.2 粉碎機構

粉碎機構における粒度分布変化は重畳積分 (2.2) であり、キュムラントの和で簡明に取り扱える。

$$\kappa_{k \circ p} = \kappa_{k i p} + \kappa_{k s} \quad (k = 1, 2, \dots, \nu) \quad (53)$$

ここに、 $\kappa_{k \circ p}$ 、 $\kappa_{k i p}$ 、 $\kappa_{k s}$ は、順に、粉碎機構出口、入口の粒度分布密度 $g_{\circ p}(\xi)$ 、 $g_{i p}(\xi)$ 、および、粉碎分布定数 $s(\xi)$ の k 次キュムラントである。このとき、一般に、 k 次キュムラント κ_k は、モーメント $v_m(\lambda, \rho)$ ($m \leq k$) と相互変換可能⁶⁾ だから、以下 ($k \leq 5$ の具体例) のとおり粉碎機構を模擬できる。

まず、粉碎機構入口流量について、(53) 式に与えるキュムラント $\kappa_{k i p}$ を求める。

$$\kappa_{1 i p} = \mu_{i p} = v_{1 i p}(0, 1) \quad (54)$$

$$\kappa_{2 i p} = \sigma_{i p}^2 = v_{2 i p}(0, \mu_{i p}) \quad (55)$$

$$\kappa_{3 i p} = \sigma_{i p}^3 v_{3 i p}(\mu_{i p}, \sigma_{i p}) \quad (56)$$

$$\kappa_{4 i p} = \sigma_{i p}^4 [v_{4 i p}(\mu_{i p}, \sigma_{i p}) - 3] \quad (57)$$

$$\kappa_{5 i p} = \sigma_{i p}^5 [v_{5 i p}(\mu_{i p}, \sigma_{i p}) - 10 v_{3 i p}(\mu_{i p}, \sigma_{i p})] \quad (58)$$

なお、 $\kappa_{k s}$ も $s(\xi)$ のモーメントベクトル v_s から同様に算出できる。

つぎに、出口流量 $Q_{\circ p}$ 、 $v_{\circ p}$ は、(53) 式の算出結果を用い、下式で求められる。

$$\mu_{\circ p} = \kappa_{1 \circ p}, \sigma_{\circ p} = \kappa_{2 \circ p}^{0.5} \quad (59)$$

$$v_{0 \circ p}(\mu_{\circ p}, \sigma_{\circ p}) = v_{2 \circ p}(\mu_{\circ p}, \sigma_{\circ p}) = 1 \quad (60)$$

$$v_{1 \circ p}(\mu_{\circ p}, \sigma_{\circ p}) = 0 \quad (61)$$

$$v_{3 \circ p}(\mu_{\circ p}, \sigma_{\circ p}) = \sigma_{\circ p}^{-3} \kappa_{3 \circ p} \quad (62)$$

$$v_{4 \circ p}(\mu_{\circ p}, \sigma_{\circ p}) = \sigma_{\circ p}^{-4} \kappa_{4 \circ p} + 3 \quad (63)$$

$$v_{5 \circ p}(\mu_{\circ p}, \sigma_{\circ p}) = \sigma_{\circ p}^{-5} \kappa_{5 \circ p} + 10 \sigma_{\circ p}^{-3} \kappa_{3 \circ p} \quad (64)$$

$$Q_{\circ p} = Q_{i p} \quad (65)$$

したがって、(53)～(64) 式の手順を関数 $v_{\circ p}(v_{i p})$ で代表させると、粉碎機構の模擬は下式に帰着する。

$$Q_{\circ p} v_{\circ p} = Q_{i p} v_{\circ p}(v_{i p}) \quad (66)$$

3.3 分級機構

分級機構における粒度分布、流量の変化は、それぞれ、粒度分布密度 $g(\xi)$ と部分分級効率 $c(\xi)$ の積、および、その積分 (2.3) で求められる。本項では、これらの演算を、 $Qv(\lambda, \rho)$ と $c(\xi)$ のパラメータのみ (具体的な関数値の積、数値積分によるモーメント算出を不使用) により実施する。

3.3.1 部分分級効率の近似

部分分級効率 $c(\xi)$ は、一般に、 $0 \leq c(\xi) \leq 1$ を満たす任意の連続関数 (累積分布型関数の場合が多い) であり、実用上の粉体粒径の範囲 $\xi_a \leq \xi \leq \xi_b$ について、 $c(\xi)$ を、適当なパラメータ a_m, λ_m, ρ_m ($m = 1, 2, \dots$) を用い、ガウス分布密度 $p(\xi; \lambda, \rho)$ 型の関数の和で次式に近似する。

$$c(\xi) = \sum_m a_m p(\xi; \lambda_m, \rho_m) \quad (67)$$

このとき、以下の諸量を定義し、 $c^{[m]}(\xi)$ のグラフの概形から d_m (m 回目の近似手順による誤差の低減量) を可能な限り大とするパラメータ (a_m, λ_m, ρ_m) を決定する。

$$c^{[m]}(\xi) = c^{[m-1]}(\xi) - a_m p(\xi; \lambda_m, \rho_m), \quad (m = 1, 2, \dots; c^{[0]}(\xi) = c(\xi)) \quad (68)$$

$$d_m = \int_{\xi_a}^{\xi_b} |c^{[m-1]}(\xi)| d\xi - \int_{\xi_a}^{\xi_b} |c^{[m]}(\xi)| d\xi \quad (69)$$

$$\varepsilon_m = \sup\{|c^{[m]}(\xi)|\}, (\xi_a \leq \xi \leq \xi_b) \quad (70)$$

この手順を ε_m が必要な値に低減できるまで繰り返し、近似 (a_m, λ_m, ρ_m による $c(\xi)$ のパラメータライズ) を完了する。

Fig. 2 は第 j 番目の分級機構についての以上の手法の実施例であり、 $c_j(\xi)$ (狭義単調増加の場合)、および、

Fig. 2 Simulation method for the classifying process

Fig. 3 Recirculations through approximation terms

その近似関数の部分 (67) 式; 近似成分の上位 6 項) を示す。本例では、 $c_j(\xi)$ の第 m 次近似成分 ($m = 1, 3$: Fig. 3 上段, $m = 2$: 下段等) に起因する凹凸 (左から順に $m = 1, 2, \dots, 6$ の影響) が認められるが、さらに高次の近似成分 ($a_m < 0$ の場合あり) の付加により、必要な近似精度を達成できる。なお、本項の各近似成分は、対応する循環流量成分 (求める循環流量: 各流量成分の加算) 算出に使用し、その具体例を後述する。

3.3.2 循環流量の算出法

第 j 番目の分級機構について、入口流量 $Q_{ij}v_{ij}$ と分級のパラメータ ($a_{mj}, \lambda_{mj}, \rho_{mj}$) から循環流量 $Q_{rj}v_{rj}$ を求める。すなわち、(13) 式に (47), (67) 式を適用し、次式のとおり $Q_{rj}v_{rj}$ と $Q_{ij}v_{ij}$ との関係導く。

$$\begin{aligned} p(\xi; \lambda, \rho) q^T(\rho^{-1}[\xi - \lambda]) K Q_{rj} v_{rj}(\lambda, \rho) \\ = \left[\sum_m a_{mj} p(\xi; \lambda_{mj}, \rho_{mj}) \right] \\ \times p(\xi; \mu_{ij}, \sigma_{ij}) \\ \times q^T(\sigma_{ij}^{-1}[\xi - \mu_{ij}]) \\ \times K Q_{ij} v_{ij}(\mu_{ij}, \sigma_{ij}) \end{aligned} \quad (71)$$

上式について、まず、以下の変形を行い、(71) 式の右辺を分布の混合に帰着させる。

((71) 式の右辺)

$$\begin{aligned} = \sum_m a_{mj} p(\xi; \lambda_{mrj}, \rho_{mrj}) \\ \times q^T(\sigma_{ij}^{-1}[\xi - \mu_{ij}]) \\ \times K Q_{ij} v_{ij}(\mu_{ij}, \sigma_{ij}) \\ = \sum_m a_{mj} p(\xi; \lambda_{mrj}, \rho_{mrj}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \mathbf{q}^T(\rho_{mrj}^{-1}[\xi - \lambda_{mrj}]) \\
 & \times L^T(\mu_{ij}, \sigma_{ij}; \lambda_{mrj}, \rho_{mrj}) \\
 & \times K Q_{ij} v_{ij}(\mu_{ij}, \sigma_{ij}) \\
 & = \sum_m p(\xi; \lambda_{mrj}, \rho_{mrj}) \\
 & \times \mathbf{q}^T(\rho_{mrj}^{-1}[\xi - \lambda_{mrj}]) \\
 & \times K Q_{mrj} v_{mrj}(\mu_{mrj}, \sigma_{mrj}) \quad (72)
 \end{aligned}$$

ここに、1回目の変形において、 $p(\xi; \mu, \sigma)$ 型関数の指数関数部に着目し、次の条件を適用した。

$$a_{mj}^* = a_{mj} \quad (73)$$

$$\lambda_{mrj} = (\sigma_{ij}^2 + \rho_{mj}^2)^{-1}(\rho_{mj}^2 \mu_{ij} + \sigma_{ij}^2 \lambda_{mj}) \quad (74)$$

$$\rho_{mrj} = (\sigma_{ij}^2 + \rho_{mj}^2)^{-0.5} \rho_{mj} \sigma_{ij} \quad (75)$$

また、2回目の変形では(41)式を、さらに、3回目の変形では次の $Q_{mrj} v_{mrj}$ を用いた。

$$\begin{aligned}
 & Q_{mrj} v_{mrj}(\mu_{mrj}, \sigma_{mrj}) \\
 & = a_{mj}^* K^{-1} L^T(\mu_{ij}, \sigma_{ij}; \lambda_{mrj}, \rho_{mrj}) \\
 & \times K Q_{ij} v_{ij}(\mu_{ij}, \sigma_{ij}) \quad (76)
 \end{aligned}$$

よって、(71)式の左辺と(72)式に着目し、結論の式($Q_{rj} v_{rj}$ と $Q_{ij} v_{ij}$ の関係)が得られる。

$$\begin{aligned}
 Q_{rj} v_{rj}(\lambda, \rho) & = \sum_m Q_{mrj} v_{mrj}(\lambda, \rho) \\
 & = J_{rj} Q_{ij} v_{ij}(\mu_{ij}, \sigma_{ij}) \quad (77)
 \end{aligned}$$

ここに、第 j 番目の分級機構循環流の算出行列 J_{rj} (Q に非依存) を定義した。

$$\begin{aligned}
 J_{rj} & = \sum_m a_{mj}^* L(\lambda, \rho; \lambda_{mrj}, \rho_{mrj}) \\
 & \times K^{-1} L^T(\mu_{ij}, \sigma_{ij}; \lambda_{mrj}, \rho_{mrj}) K \quad (78)
 \end{aligned}$$

なお、 K, L はそれぞれ、(48)、(43)式より与えられ、正則行列である。

本手法の適用例として、Fig. 2, 3 (確率変数 Q は $E\{Q\}$ で表示) は、部分分級効率 $c_j(\xi)$ (Fig. 2 上段)、入口流量 $Q_{ij} v_{ij}$ (Fig. 2 下段) を与えた際、循環流量 $Q_{rj} v_{rj}$ の算出経過 ($c_j(\xi)$ の各近似成分を使用) を示す。本例により、 $c_j(\xi)$ の第 m 次近似成分が循環流量成分 ((77) 式の第 m 項) を与える機能 (Fig. 3)、および、各循環流量成分を加算して循環流量 $Q_{rj} v_{rj}$ (Fig. 2 下段) を求める機能の有効性を確認できる。

3.3.3 通過流量の算出

第 j 番目の分級機構の通過流量 $Q_{tj} v_{tj}$ の算出は、3.3.1、

3.3.2 (循環流量の算出) の諸式中の部分分級効率 $c(\xi)$ を $\{1 - c(\xi)\}$ に置き替え、同様の手順で算出できる。

$$Q_{tj} v_{tj}(\lambda, \rho) = J_{tj} Q_{ij} v_{ij}(\mu_{ij}, \sigma_{ij}) \quad (79)$$

ここに、第 j 番目の分級機構通過流の算出行列 J_{tj} を用いた。ちなみに、近似手法に係わる誤差分を除き、下式

(I : 単位行列) が成立する。

$$J_{rj} + J_{tj} = I \quad (80)$$

3.4 混合機構

混合機構の平均値関数による模擬式 ((24) 式) について、2.5.2 の議論に従って Q の期待値記号を除去し、さらに、 Qv 型へ変換して下式を得る。

$$\begin{aligned}
 & dQ_{i0} v_{i0}(\lambda, \rho) \\
 & = \theta \left[\sum_{j=0}^n Q_{rj} v_{rj}(\lambda, \rho) - Q_{i0} v_{i0}(\lambda, \rho) \right. \\
 & \quad \left. + u v_{ib}(\lambda, \rho) \right] dt + v_{ib}(\lambda, \rho) d\beta \quad (81)
 \end{aligned}$$

3.2, 3.3 の議論に従い、第 j 番目の分級機構 ($j = 0, 1, \dots, n$) の循環流 $Q_{rj} v_{rj}$ を $Q_{i0} v_{i0}$ で記述して本式に代入し、系全体の低次元化したモデル化を完結できる。

3.5 低次元化したシステム方程式

3.5.1 確率微分方程式による表記

本項では、粉碎機の低次元化したモデルをシステム方程式に整理する。これは $Q_{ip} v_{ip}$ を状態ベクトルとして下式 (本項以降、簡明化のため、 v の基準化パラメータ (λ, ρ) を省略) に帰着する。

$$\begin{aligned}
 dQ_{ip} v_{ip} & = [Q_{ip} a^*(v_{ip}) + u B^* v_{ib}] dt \\
 & + B^* v_{ib} d\beta \quad (82)
 \end{aligned}$$

$$Q_{i2} v_{i2} = Q_{ip} \eta^*(v_{ip}) \quad (83)$$

ここに、ベクトル関数 a^*, η^* 、行列 B^* を定義した。

$$a^*(v_{ip}) = \theta J_{i0} [-v_{ip} + (J_{r2} J_{t1} + J_{r1}) v_{op}(v_{ip})] \quad (84)$$

$$B^* = \theta J_{i0} \quad (85)$$

$$\eta^*(v_{ip}) = J_{i2} J_{t1} v_{op}(v_{ip}) \quad (86)$$

2.5.2 と同様の議論により、 a^*, η^*, B^* は Q に非依存であり、(82)、(83) 式は Q について線形時変ガウス性のシステムを記述する。

3.5.2 平均値関数と分散関数

本研究による粉碎機モデルの解析は、3.5.1 の議論により、次の平均値関数と分散関数の導出に帰着する。

$$\begin{aligned}
 & dE\{Q_{ip}\} v_{ip} \\
 & = [E\{Q_{ip}\} a^*(v_{ip}) + u B^* v_{ib}] dt \quad (87)
 \end{aligned}$$

$$E\{Q_{i2}\} v_{i2} = E\{Q_{ip}\} \eta^*(v_{ip}) \quad (88)$$

$$\begin{aligned}
 & d[\text{Var}\{Q_{ip}\} V_{ip}] \\
 & = [\text{Var}\{Q_{ip}\} [A^* V_{ip} + V_{ip} A^{*T}] \\
 & \quad + R_w B^* V_{ib} B^{*T}] dt \quad (89)
 \end{aligned}$$

$$\text{Var}\{Q_{i2}\} V_{i2} = \text{Var}\{Q_{ip}\} C^* V_{ip} C^{*T} \quad (90)$$

ここに、次の行列 (微係数は $v = v_{ip}$ 、 $q = E\{Q_{ip}\}$ における値を用いる) を定義した。

$$V = vv^T \quad (\text{各添字とも}) \quad (91)$$

$$\begin{aligned} A^* &= \left[\frac{\partial q a^*(v)}{\partial q v} \right] \\ &= q \left[\frac{\partial a^*(v)}{\partial v} \right] \left[\frac{\partial v}{\partial q v} \right] + a^*(v) \left[\frac{\partial q}{\partial q} \right] \left[\frac{\partial q}{\partial q v} \right] \\ &= \left[\frac{\partial a^*(v)}{\partial v} \right] + a^*(v) (1, v_1^{-1}, \dots, v_n^{-1}) \quad (92) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^* &= \left[\frac{\partial q \eta^*(v)}{\partial q v} \right] \\ &= \left[\frac{\partial \eta^*(v)}{\partial v} \right] + \eta^*(v) (1, v_1^{-1}, \dots, v_n^{-1}) \quad (93) \end{aligned}$$

4. モデルの検証

本節では、本研究による粉砕機のモデル化手法の検証にあたり、平均値関数 ((87), (88) 式) の時間応答を具体的に求め、これを検討する。

4.1 平均値関数の時間離散化

本項では (87), (88) 式を以下のとおり時間離散化する。

$$\begin{aligned} [E\{Q_{ip}\}v_{ip}]_{\tau+1} &= \Phi_\tau [E\{Q_{ip}\}v_{ip}]_\tau + u_\tau \Psi_\tau v_{ib} \\ &\quad + \Delta t [E\{Q_{ip}\}\{a^*(v_{ip}) - A^* v_{ip}\}]_\tau \quad (94) \end{aligned}$$

$$[E\{Q_{id}\}v_{id}]_\tau = [E\{Q_{ip}\}\eta^*(v_{ip})]_\tau \quad (95)$$

ここに、添字 τ は時刻 $t = \tau \Delta t$ (Δt : 計算時間刻み) の値を示す。また、2次のパディ近似により推移行列 Φ_τ 、駆動行列 Ψ_τ (u_τ : 0次ホールドを仮定) を求めた。

$$\begin{aligned} \Phi_\tau &= \exp\{\Delta t A_\tau^*\} \\ &= [I - 0.5 \Delta t A_\tau^*]^{-1} [I + 0.5 \Delta t A_\tau^*] \quad (96) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_\tau &= [\Phi_\tau - I](A_\tau^*)^{-1} B^* \\ &= \Delta t [I - 0.5 \Delta t A_\tau^*]^{-1} B^* \quad (97) \end{aligned}$$

なお、モーメント v の基準化は次のとおりとする。

$$(\lambda, \rho) = (\mu_{ip}, \sigma_{ip}) \quad (98)$$

したがって、(94), (95) 式の逐次計算により、求める時間応答が得られる。

4.2 実プラントの応答の解析例

発電用ボイラ向け大型石炭粉砕機 (Fig. 1 の構造) の起動停止について、Fig. 4~6 に本論の解析手法の実施例を紹介する。本例では、Fig. 4 に操作量 (給炭量、搬送空気流量) の時間変化、その際の出炭流量、保有炭量、出炭の粒度分布 (基準粒径の 4, 1, 1/4 倍以下の重量割合) の応答を、また、Fig. 5, 6 に、それぞれ、起動操作開始直後 (時点 (P)) 起動完了後 (時点 (Q)) における給炭、保有炭 (仮想分級機構入口)、一次分級機構通過、出炭 (二次分級機構通過) の粒度分布密度関

Fig. 4 Example of start-up and shut-down analysis for an actual pulverizer

Fig. 5 Particle size distributions at the point (P)

Fig. 6 Particle size distributions at the point (Q)

数（後二者の面積は当該時点の一次分級機構入口に対する流量期待値の比を与える）を示している。これらより、粉砕機の起動停止時における大幅な流量、粒度分布変化の解析に際しても、本論の手法の良好な適用性を確認できる。なお、本例では計算刻み (Δt) 1秒で十分な数値演算の安定性が確保でき、この場合、解析所要時間はパソコン (i-286MPU, 12MHz, 実数演算プロセッサ付) 利用で実時間の 1/5 程度に収まる。

大型石炭粉砕機の場合、非定常状態の出炭流量の実測が困難なため、搬送空気入口と二次分級機構入口間の差圧（一般に粉砕機差圧と呼ばれる；Fig. 1 参照）に着目して運転状態の監視が行われている。当該差圧の挙動について、モデル上は保有炭量（系のマスバランスの帰結）と搬送空気流量による実験式で算出可能であり、実測値と共に、これを Fig. 4 中段に示す。本図より、粉砕機差圧の模擬精度は実用上十分であり、本解析手法の妥当性を例証できる。

4.3 パイロット粉砕機による検証

本解析手法の精度検証にあたり、パイロット粉砕機（実用機の約 1/6 の規模）により、出炭流量、粒度分布の計算値と実測値との比較試験を行った。Fig. 7, 8 は、それぞれ、給炭量 (coal feeder 速度) 指令ステップ下降、上昇の際のデータである。両図中に出炭流量実測値

は差圧式 (differential pressure type : 拡大管・縮小管それぞれの差圧から流量算出) と蓄積式 (hopper type : 微粉炭ホッパーの重量変化速度から流量算出) の微粉炭流量計により、基準粒径以下の重量割合の実測値は規定の篩 (ふるい) を用いて求めている。

Fig. 7, 8 において、差圧式、蓄積式の出炭流量計測値の変動成分が大であり、これらは両計測法に起因する雑音の影響と考えられる。したがって、両計測値の変動の中心を想定すれば、これらは出炭流量計算値 (平均値関数) とおおむね一致 (蓄積式流量計は最後流部にあり、遅れの影響を考慮要) しており、本解析手法の実用精度達成を確認できる。また、基準粒径以下の重量割合 (粒度分布評価の目安) の計算精度も良好で、ことに分級機構の模擬の妥当性を示している。

5. おわりに

本論では、システム制御理論の応用に適する粉砕機の動特性モデルの開発にあたり、次の事項について述べた。

- (1) 粉体粒度分布非ガウス性の状態空間表現、および、この場合の粉砕機の定式化
- (2) 粉体粒度分布のモーメントに着目した状態ベクトルの次数低減、および、この場合の粉砕機内の粉砕、分級、混合機構の模擬方法
- (3) 実機特性の解析、パイロット粉砕機による動特性試験を通じた、本モデルの妥当性確認

参 考 文 献

- 1) L. G. Austin et al. : An Analysis of Ball-and-Race Milling, Part I. The Harderove Mill ; Power Technology, Vol. 29, pp. 263~275 (1981)
- 2) L. G. Austin et al. : An Analysis of Ball-and-Race Milling, Part II. The Babcock E1. 7 Mill ; Power Technology, Vol. 33, pp. 113~125 (1982)
- 3) L. G. Austin et al. : An Analysis of Ball-and-Race Milling, Part III. Scale-up to Industrial Mills ; Power Technology, Vol. 33, pp. 127~134 (1982)
- 4) K. Shoji et al. : A Mathematical Model for a Ring-roller Mill ; Proc. JSME-ASME ICOPE-93, Vol. 2, pp. 565~571 (1993)
- 5) N. Meguri et al. : The Development of a Ring Ball Mill Simulation Model ; KONA Powder Science and Technology in Japan, No. 7, pp. 50~58 (1989)
- 6) H. Cramer : Mathematical Methods of Statistics, Princeton Univ. Press (1974)
- 7) J. L. Doob : Stochastic Processes, John Wiley & Sons (1953)
- 8) 深山 : キュムラントを用いた粉砕機のモデリング ; 第 24 回確率システム シンポジウム予稿集, pp. 189~192 (1992)
- 9) A. H. Jazwinski : Stochastic Process and Filtering Theory, Academic Press (1970)

note) type a : hopper flow meter
type b : differential pressure flow meter

Fig. 7 Validation on a pilot plant data (coal feeder step-down)

note) type a : hopper flow meter
type b : differential pressure flow meter

Fig. 8 Validation on a pilot plant data