

## 振幅と位相の重み付け最適化による IIR ヒルベルト変換器の設計\*

谷萩 隆嗣\*\*・清水 聡\*\*\*

### Design of IIR Hilbert Transformers Based on Weighted Optimization for Magnitude and Phase Responses\*

Takashi YAHAGI\*\* and Satoru SHIMIZU\*\*\*

In this paper, a new design method of IIR Hilbert transformers is proposed by using a nonlinear optimization algorithm. The initial conditions for nonlinear optimization are given by controlling the tap values of IIR Hilbert transformer in the time domain. A parameter optimization technique is used to obtain an IIR Hilbert transformer whose output characteristics in the time domain are close to those of the reference FIR Hilbert transformer. Then, the tap values are optimized by the Fletcher-Powell method in the frequency domain. In the proposed method, the performance criterion for optimization consists of two functions. One represents the error of magnitude response and the other represents that of phase responses. The error ratio of magnitude and phase responses is controlled by different weights to each function. Finally, some examples of IIR Hilbert transformers using this method are shown.

### 1. まえがき

入力信号の位相を変化させるものは移相器と呼ばれ、そのうち、90度位相を推移させるものは特にヒルベルト変換器と言われる。これは、SSBやVSBなどの変調信号を発生させるために用いられている。帯域制限フィルタと同様に、ヒルベルト変換器の場合にもFIR形とIIR形の二つのタイプが存在する。

FIRフィルタを用いれば、完全な直線位相が実現でき、安定性が保証される<sup>1)</sup>。そのため、ヒルベルト変換器の設計誤差は振幅特性にのみ生じる。また、FIRフィルタでは、優れた特性を持たせるためには高い次数が必要となる。

一方、IIRフィルタの場合、FIRフィルタに比べて低い次数での設計が可能であるが、完全な直線位相特性は

得られず、また、安定性が保証されない、という問題がある。従来、ヒルベルト変換器をIIRフィルタで設計する場合、全域通過回路として扱う場合が多かった<sup>2)~5)</sup>。その場合には完全な定振幅が得られ、誤差は位相特性にのみ発生する。

このように、FIRヒルベルト変換器では振幅特性に、全域通過回路では位相特性にそれぞれ誤差が集中してしまう。そこで本論文では、全域通過回路ではなく、分母と分子の係数が独立である一般的なIIRフィルタによるヒルベルト変換器の設計方法を提案する。通常このようなフィルタの形式を採用した場合、設計誤差は振幅、位相の両方に生じてしまう。そこで、逆にその性質を利用して、従来のように振幅、位相のいずれかに誤差を集中させるのではなく、最適化アルゴリズムの中で、それらを適当にバランスさせることにより、所望の特性を持つヒルベルト変換器を設計するのが、本方法の特長である。一般に回路を設計するにあたっては、振幅特性と位相特性の両方を考慮することが必要となるので、一方の特性のみ重視した従来の方法より、両方の特性を考慮して最適化する本方法が有効である。

最適化とは、ある評価関数が最小または最大になるようなパラメータを求めることである。IIRフィルタの周

\* 原稿受付 1993年11月1日

\*\* 千葉大学 工学部 Department of Information and Computer Sciences, Chiba University; 1-33, Yayoicho, Inage ward, Chiba city, Chiba 263, JAPAN

\*\*\* 千葉大学 大学院 自然科学研究科 Graduate School of Science and Technology, Chiba University; ditto

**Key Words:** Hilbert transformer, IIR filter, Kalman filter, optimization, Fletcher-Powell method.

波数特性は、タップ係数の値をパラメータとする非線形方程式と見なすことができる。非線形方程式の最適化には様々な手法がある。その中で、フィルタの設計のように高い精度が要求され、パラメータ数の多い最適化問題では、準ニュートン法を用いるのが適当と考えられる。これは、ニュートン法に必要な Hesse 行列の逆行列を、繰り返し演算により近似的に求める方法である。収束速度は速いが初期値が不適切であると最適解に収束しない場合があるので、適切な初期値を与える方法も検討する必要がある。

本論文の方法では、まず、比較的平易に設計できる FIR ヒルベルト変換器を用いて、それと同じインパルス応答を持つように、IIR ヒルベルト変換器をパラメータ推定の手法を用いて計算する<sup>6)</sup>。これにより、FIR ヒルベルト変換器の特長である直線位相特性を近似した初期値を平易に求めることができる。

つぎに、周波数領域での最適化を行う。本論文では、最適化の手法として、準ニュートン法の一つである Fletcher-Powell 法を用いる。ここで使う評価関数として、振幅特性と位相特性の式に重みを付けた誤差のノルムを用いることにより、誤差のバランスをとりながら最適化することが可能となる。また、本方法の有効性を具体的な設計例で示す。

## 2. デジタルフィルタによるヒルベルト変換器の性質

ヒルベルト変換器の周波数応答は

$$H(\omega) = \begin{cases} -j, & 0 \leq \omega < \pi \\ j, & \pi \leq \omega < 2\pi \end{cases} \quad (1)$$

で与えられる。これを実現するデジタルフィルタには、振幅特性が一定で、同時に位相特性が直線であることが要求される。

FIR フィルタで設計した場合、その係数は次式となる。

$$h(n) = \begin{cases} \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

係数はタップの中央に対して点対称となっているため、完全な直線位相特性が得られる。そして、誤差は振幅特性のみに生じる。

また、IIR フィルタの一種である全域通過回路は次式で表わされる。

$$H(z) = \frac{c_n + c_{n-1}z^{-1} + \dots + c_0z^{-n}}{c_0 + c_1z^{-1} + \dots + c_nz^{-n}} \quad (3)$$

この場合、分母と分子の振幅特性は同じであるため、完全な定振幅が得られる。また、誤差は FIR フィルタとは逆に位相特性のみに存在する。

一方、一般的な IIR フィルタは次式で表わされる。

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_nz^{-n}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}} \quad (4)$$

この形式のフィルタでは、振幅、位相とも誤差が発生し得る。しかし、言い替えると、FIR フィルタや全域通過回路では、振幅、位相のいずれかに集中していた誤差を分散させることができる。また、振幅特性、位相特性の誤差の割合を自由に制御することも可能となる。本論文では、最適化に使用する評価関数を工夫することで、このような誤差の制御が行えることを示す。

## 3. 設計方法

### 3.1 初期値の設定

一般に、最適化を行うためには、初期値をできるだけ最適解に近づけておく方が有利である。また、評価関数が非線形方程式の場合、多くの局所解が存在するため、初期値の設定が不適切であると最適解を得ることができないことがある。とくに、準ニュートン法は初期値の影響を受けやすいので、注意しなければならない。最適化のための初期値の設定の概要を Fig. 1 に示す。

FIR デジタルフィルタによるヒルベルト変換器の設計方法はすでに広く知られている<sup>1)</sup>。また、MATLAB などの信号処理ツールを用いれば簡単に設計することができる。そのようにして、あらかじめ設計した FIR ヒルベルト変換器を参照用として用いる。

IIR ヒルベルト変換器には、設計済みの FIR ヒルベルト変換器と同じ入力信号  $u(t)$  を入れ、その出力信号  $\hat{y}(t)$  が FIR ヒルベルト変換器の出力信号  $y(t)$  に近づく

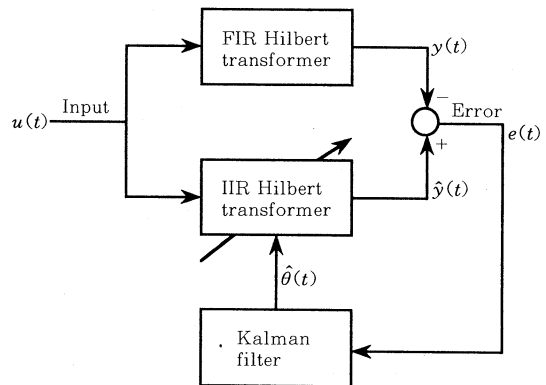


Fig. 1 Configuration for setting initial conditions for optimization

ように、タップ係数  $\theta = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n]^T$  を推定アルゴリズムを用いて決定する。ただし、 $T$  は転置を表す。ここで十分長い区間のデータを用いたとき、二つのフィルタの出力の誤差  $e(t)$  が十分小さければ、結果的に参照用として使用した FIR ヒルベルト変換器に近い周波数特性を有する IIR ヒルベルト変換器が設計されることになる。推定アルゴリズムとしてカルマンフィルタ<sup>7)</sup>を用いる場合、まず、初期値を次のように置く。

$$\hat{\theta}(0) = \mathbf{0} \quad (5)$$

$$\mathbf{R}(0) = \gamma \mathbf{I}, \quad \gamma > 0 \quad (6)$$

そして、下記の繰り返し演算を行い、パラメータを推定する。

$$e(t+1) = \mathbf{z}^T(t+1)\hat{\theta}(t) - y(t+1) \quad (7)$$

$$\sigma_e^2(t+1) = E[e^2(t+1)] - \{E[e(t+1)]\}^2 \quad (8)$$

$$\mathbf{k}(t+1) = \frac{\mathbf{R}(t)\mathbf{z}(t+1)}{\sigma_e^2(t+1) + \mathbf{z}^T(t+1)\mathbf{R}(t)\mathbf{z}(t+1)} \quad (9)$$

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) - \mathbf{k}(t+1)e(t+1) \quad (10)$$

$$\mathbf{R}(t+1) = [\mathbf{I} - \mathbf{k}(t+1)\mathbf{z}^T(t+1)]\mathbf{R}(t) \quad (11)$$

ただし、 $\mathbf{z}(t+1) = [-y(t), \dots, -y(t-n+1), u(t+1), \dots, u(t-n+1)]^T$  である。

IIR ヒルベルト変換器によって参照用の FIR ヒルベルト変換器を高い精度で近似するためには、パラメータに十分な自由度がなければならない。そのため、タップ係数の総数は、FIR ヒルベルト変換器の次数より多くしておく必要がある。

入力には設計したい帯域の成分を含む信号を用いる。全帯域で設計する場合は、単位インパルス列や白色ガウス雑音などを使用すればよい。いずれの場合も、収束したパラメータの値にほとんど差はない。

安定な FIR ヒルベルト変換器を参照し、無限区間の入力信号を用いて十分な近似特性が得られれば、初期値として利用する IIR ヒルベルト変換器の安定性も保証される。実際には有限区間の入力信号しか利用できないので、良好な近似特性を得るためには FIR ヒルベルト変換器のタップ数に比べて十分長い区間の入力信号を用いることが望ましい。有限区間の入出力信号を用いた場合には、理論上は必ずしも安定性が保証されないため、実際に得られた収束値の安定性を確認する必要がある。

また、位相特性に比べて振幅特性を重視したい場合は、全域通過回路による設計値を初期値としてもよい。

### 3.2 評価関数の設定

今、設計したいフィルタと所望のフィルタの周波数特性をそれぞれ  $\hat{H}(\omega_i)$ 、 $H(\omega_i)$ 、重みを  $W(\omega_i)$  とすると、

次のような評価関数  $E_0(\hat{\theta})$  が定義できる。

$$E_0(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^N W(\omega_i) |\hat{H}(\omega_i, \hat{\theta}) - H(\omega_i)|^L \quad (12)$$

ここで  $L$  は正の偶数であり、 $H(\omega_i)$  としては (1) 式の値を用いればよい。このように設定した場合、振幅特性と位相特性が同時に理想的な特性に近づく。しかし、それらの一方を特に重視し、両者の特性のバランスを考ながら設計する場合には (12) 式は不都合である。そこで、振幅特性の評価関数  $E_m(\hat{\theta})$  と位相特性の評価関数  $E_p(\hat{\theta})$  の重み関数を調整することのできる新しい評価関数を次式で与える。

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}) &= E_m(\hat{\theta}) + E_p(\hat{\theta}) \\ &= \sum_{i=1}^M W_m(\omega_i) \left| |\hat{H}(\omega_i, \hat{\theta})| - |H(\omega_i)| \right|^{L_m} \\ &\quad + \sum_{j=1}^N W_p(\omega_j) \left| \angle \hat{H}(\omega_j, \hat{\theta}) - \angle H(\omega_j) \right|^{L_p} \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、 $L_m$  と  $L_p$  はそれぞれ正の偶数であり、重み  $W_m(\omega_i)$  と  $W_p(\omega_j)$  の値を変えれば、振幅特性と位相特性の間での誤差を調整することが可能となる。Fig. 2 にその概要を示す。

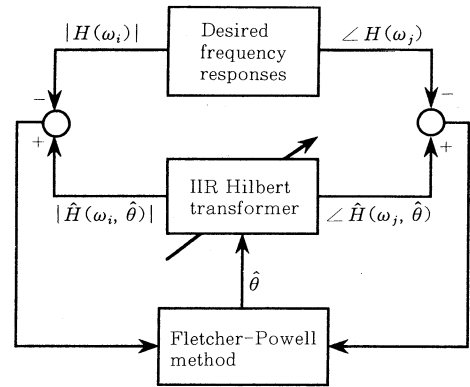


Fig. 2 Configuration for optimization

### 3.3 最適化アルゴリズム

最適解を求めるためのアルゴリズムとして Fletcher-Powell 法を用いることにする。ここで Fletcher-Powell 法について簡単に述べる。ある近似解  $\hat{\theta}_k$  に関して評価関数  $E(\hat{\theta})$  を Taylor 展開し、2 次の項まで採用すると

$$E(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}_k) + \mathbf{g}_k^T(\hat{\theta} - \hat{\theta}_k) + \frac{1}{2}(\hat{\theta} - \hat{\theta}_k)^T \mathbf{G}_k(\hat{\theta} - \hat{\theta}_k) \quad (14)$$

となる。ただし、 $\theta = \hat{\theta}_k$  におけるベクトル  $\mathbf{g}_k$ 、行列  $\mathbf{G}_k$  の各成分は次式で与えられる。

$$g_i = \frac{\partial}{\partial \theta_i} E(\hat{\theta}_k) \quad (15)$$

$$G_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} E(\hat{\theta}_k) \quad (16)$$

$\partial E(\hat{\theta})/\partial \hat{\theta} = 0$  のとき (14) 式は最小となる. そのときの  $\hat{\theta}$  を  $\hat{\theta}_{k+1}$  とすると

$$g_k + G_k(\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k) = 0 \quad (17)$$

となる. したがって

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - G_k^{-1} g_k \quad (18)$$

が成立し,  $\hat{\theta}_k$  を  $-G_k^{-1} g_k$  方向に動かすことにより, 最適解に近づけることができる.

パラメータ  $\hat{\theta}$  の初期値を  $\hat{\theta}_0$  として,  $H_0 = I$  とおく.  $k$  番目の反復では, まず  $E(\hat{\theta}_k - \alpha_k H_k g(\hat{\theta}_k))$  を最小とする  $\alpha_k > 0$  を求めて

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - \alpha_k H_k g_k \quad (19)$$

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\Delta \hat{\theta}_k \Delta \hat{\theta}_k^T}{\Delta \hat{\theta}_k^T \Delta g_k} - \frac{H_k \Delta g_k \Delta g_k^T H_k}{\Delta g_k^T H_k \Delta g_k} \quad (20)$$

の演算を実行する. ただし

$$\Delta \hat{\theta}_k = -\alpha_k H_k g_k$$

$$\Delta g_k = g_{k+1} - g_k$$

であり,  $\hat{\theta}_{k+1}$  を使用したときの安定性の確認も行う必要がある. 初期値  $\hat{\theta}_0$  が適切に選ばれていれば, この演算を繰り返し行うことで, 最適解を得ることができる.

### 3.4 勾配ベクトルの算出

Fletcher-Powell 法では, (15) 式で示される勾配ベクトルをあらかじめ計算しておかなければならない. 評価関数として (13) 式を用いた場合, その勾配ベクトルは次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\hat{\theta})}{\partial \theta_m} &= \frac{\partial E_m(\hat{\theta})}{\partial \theta_m} + \frac{\partial E_p(\hat{\theta})}{\partial \theta_m} \\ &= L_m \sum_{i=1}^M W_m(\omega_i) \left| |\hat{H}(\omega_i, \hat{\theta})| - |H(\omega_i)| \right|^{L_m-1} \\ &\quad \times \frac{\partial |\hat{H}(\omega_i, \hat{\theta})|}{\partial \theta_m} \\ &\quad + L_p \sum_{j=1}^N W_p(\omega_j) \left| \angle \hat{H}(\omega_j, \hat{\theta}) - \angle H(\omega_j) \right|^{L_p-1} \\ &\quad \times \frac{\partial \angle \hat{H}(\omega_j, \hat{\theta})}{\partial \theta_m} \end{aligned} \quad (21)$$

ここで,  $\partial |\hat{H}(\omega_i, \hat{\theta})|/\partial \theta_m$  と  $\partial \angle \hat{H}(\omega_j, \hat{\theta})/\partial \theta_m$  は次のようにして求められる.

(4) 式の  $z$  を  $e^{j\omega}$  と置き換えると

$$H(\omega) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + \dots + b_n e^{-jn\omega}}{1 + a_1 e^{-j\omega} + \dots + a_n e^{-jn\omega}} \quad (22)$$

となり,  $A_r, A_i, B_r, B_i$  をそれぞれ (22) 式の分母および分子の実部, 虚部とすると,  $|\hat{H}(\omega_i, \hat{\theta})|$  と  $\angle \hat{H}(\omega_j, \hat{\theta})$  は次式で与えられる.

$$|\hat{H}(\omega_i, \hat{\theta})| = \sqrt{\frac{B_r^2 + B_i^2}{A_r^2 + A_i^2}} \quad (23)$$

$$\angle \hat{H}(\omega_j, \hat{\theta}) = \tan^{-1} \left( \frac{A_r B_i - A_i B_r}{A_r B_r + A_i B_i} \right) \quad (24)$$

ここで,  $\theta_m$  が (22) 式の分母の係数  $a_k$  の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\hat{H}(\omega_i, \hat{\theta})|}{\partial \theta_m} &= \frac{\partial |\hat{H}(\omega_i, \hat{\theta})|}{\partial a_k} \\ &= -\frac{A_r \cos k\omega_i - A_i \sin k\omega_i}{A_r^2 + A_i^2} |\hat{H}(\omega_i, \hat{\theta})| \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \angle \hat{H}(\omega_j, \hat{\theta})}{\partial \theta_m} &= \frac{\partial \angle \hat{H}(\omega_j, \hat{\theta})}{\partial a_k} \\ &= \frac{A_r \sin k\omega_j + A_i \cos k\omega_j}{A_r^2 + A_i^2} \end{aligned} \quad (26)$$

となり,  $\theta_m$  が (22) 式の分子の係数  $b_k$  の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\hat{H}(\omega_i, \hat{\theta})|}{\partial \theta_m} &= \frac{\partial |\hat{H}(\omega_i, \hat{\theta})|}{\partial b_k} \\ &= \frac{B_r \cos k\omega_i - B_i \sin k\omega_i}{B_r^2 + B_i^2} |\hat{H}(\omega_i, \hat{\theta})| \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \angle \hat{H}(\omega_j, \hat{\theta})}{\partial \theta_m} &= \frac{\partial \angle \hat{H}(\omega_j, \hat{\theta})}{\partial b_k} \\ &= -\frac{B_r \sin k\omega_j + B_i \cos k\omega_j}{B_r^2 + B_i^2} \end{aligned} \quad (28)$$

となる. これらの式を用いることにより勾配ベクトルを計算することができる.

## 4. 設計例

30 次の参照用 FIR ヒルベルト変換器を利用して, インパルス列を入力したときの結果から初期値を設定し, 16 次の IIR ヒルベルト変換器の最適化を行った. (13) 式の評価関数の重みについては,  $W_m(\omega_i)$  と  $W_p(\omega_j)$  をそれぞれ一定値  $\alpha, 1-\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) とした. つまり,  $\alpha$  が小さいと位相特性重視, 大きいと振幅特性重視の設計となる.  $\omega_i$  と  $\omega_j$  は, とともに正規化周波数が 0.05 以上, 0.45 以下の範囲を 0.005 の等間隔で与えた. また,  $L_m, L_p$  はともに 2 とした. 最適化アルゴリズムの反復回数は, 2,000 回とした. このような条件で,  $\alpha$  が 0.2 の場合と, 0.8 の場合の比較を行う. この二例の設計結果と最適化前の初期値の振幅特性を Fig. 3 に, 位相特性を Fig. 4 に示す.

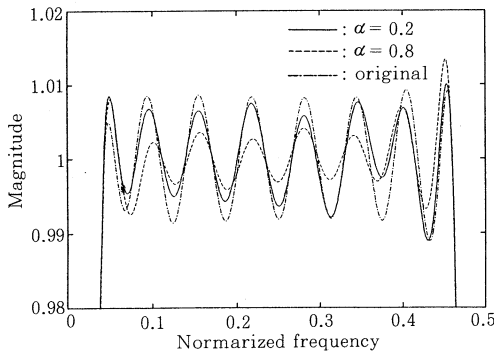


Fig. 3 Magnitude responses of 16th-order IIR Hilbert transformers

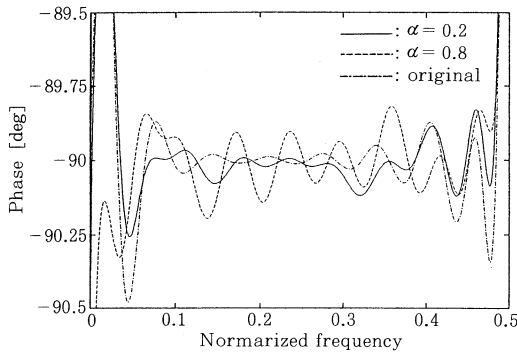


Fig. 4 Phase responses of 16th-order IIR Hilbert transformers

ヒルベルト変換器は、正規化周波数が0から0.5の範囲では、振幅特性は1、位相特性は $-90$ 度の一定値を取るのが理想である。Fig. 3を見ると、 $\alpha$ がいずれの場合も初期値より振幅特性が良くなっているが、0.8の方がより平坦に近づいていることが分かる。一方、位相特性は $\alpha$ を0.2とした方が優れており、0.8の場合には、初期値より劣化していることがFig. 4から確認できる。

さらに、振幅特性と位相特性の重みの違いによって、誤差の割合が制御できることを定量的に評価するため、振幅特性、位相特性の誤差を示す関数、つまり、評価関数の重みを1としたものを定義する。すなわち

$$e_m(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^M \left| |\hat{H}(\omega_i, \hat{\theta})| - |H(\omega_i)| \right|^{L_m} \quad (29)$$

$$e_p(\hat{\theta}) = \sum_{j=1}^N \left| \angle \hat{H}(\omega_j, \hat{\theta}) - \angle H(\omega_j) \right|^{L_p} \quad (30)$$

として、 $\alpha$ を連続的に変化させ、振幅、位相、全体の誤差関数の最適化前後の比  $r_m = e_m(\hat{\theta})/e_m(\hat{\theta}_0)$ 、 $r_p = e_p(\hat{\theta})/e_p(\hat{\theta}_0)$ 、 $r_t = (\alpha e_m(\hat{\theta}) + (1-\alpha)e_p(\hat{\theta})) / (\alpha e_m(\hat{\theta}_0) + (1-\alpha)e_p(\hat{\theta}_0))$  を求めた結果をFig. 5に示す。ここで最適化前の誤差は、 $e_m(\hat{\theta}_0) = 3.0997 \times 10^{-3}$ 、 $e_p(\hat{\theta}_0) =$

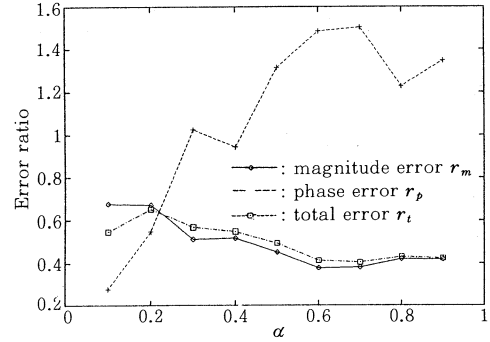


Fig. 5 Errors of optimal 16th-order IIR Hilbert transformers

$1.6126 \times 10^{-4}$ であった。全体的な誤差は最適化前の半分程度に減少している。最適化により振幅、位相とも誤差が減少している場合もあるが、位相誤差は最適化後の方が増えていることもある。一方、そこでは振幅誤差は大きく減少している。つまり、振幅特性を特に重視した設計を行いたい場合は、 $\alpha$ を大きくすることによって振幅誤差を位相誤差に移し変えることにより、振幅特性を向上させることができる。振幅特性の改善率が良いのは、初期値としてFIRヒルベルト変換器の近似特性を用いたので、最初の振幅特性の誤差が位相特性に比べて大きいためである。また、位相特性は初期値で誤差がすでに小さく、収束値でのわずかな差に結果が敏感になり、 $\alpha$ による誤差の変化が滑らかになりにくい。しかし、全体の傾向としては $\alpha$ により振幅特性と位相特性の誤差が制御できていることが分かる。

さらに、高次の例として、50次の参照用FIRヒルベルト変換器を利用して初期値設定を行った26次のIIRヒルベルト変換器の設計結果を示す。ただし、ほかの条件は前の設計例と同じにした。Fig. 6は振幅特性、Fig. 7は位相特性である。また、Fig. 8には $\alpha$ による振幅と位相の最適化前後の誤差の比の変化を示す。最適化前の誤差は、 $e_m(\hat{\theta}_0) = 2.8284 \times 10^{-5}$ 、 $e_p(\hat{\theta}_0) = 1.0869 \times 10^{-5}$ であった。次数が高いので、初期値の段階において誤差がすでにかなり小さくなっているため、Fig. 6、Fig. 7からでは改善効果が分かりにくい。Fig. 8から $\alpha$ により誤差が制御され、更に優れた特性となっていることが判断できる。

以上の結果を考慮すれば、重み $\alpha$ や次数 $n$ などを変えることにより、目的とするIIRヒルベルト変換器を設計することが可能である。

つぎに、本論文による設計結果を、初期値設定で用いた参照用FIRヒルベルト変換器、および参考文献5)による全域通過回路と比較する。参考文献5)の方法は、

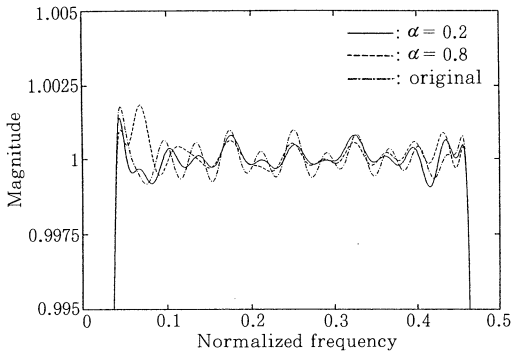


Fig. 6 Magnitude responses of 26th-order IIR Hilbert transformers

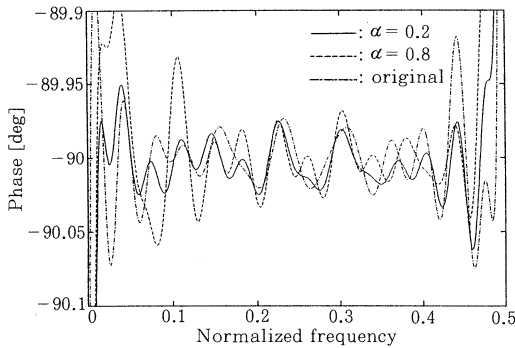


Fig. 7 Phase responses of 26th-order IIR Hilbert transformers

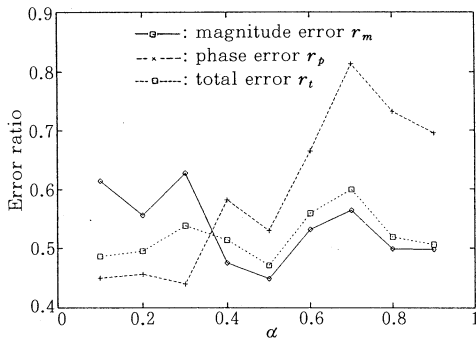


Fig. 8 Errors of optimal 26th-order IIR Hilbert transformers

(4) 式のように定義されている IIR ヒルベルト変換器を (31) 式により全域通過回路に変換するものである。

$$H'(z) = \frac{a_n + b_0 + (a_{n-1} + b_1)z^{-1} + \dots + (1 + b_n)z^{-n}}{1 + b_n + (a_1 + b_{n-1})z^{-1} + \dots + (a_n + b_0)z^{-n}} \quad (31)$$

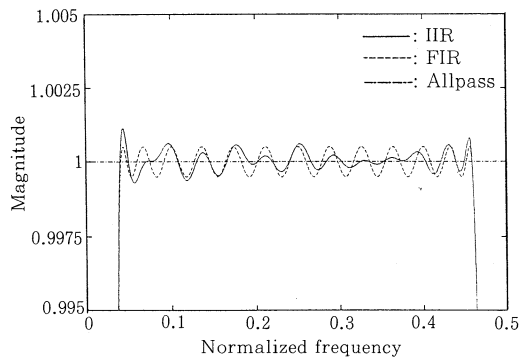


Fig. 9 Comparison of magnitude responses

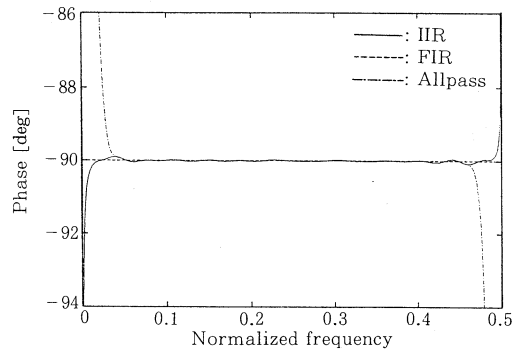


Fig. 10 Comparison of phase responses

全域通過回路は、 $n = 26$ ,  $\alpha = 0.5$  として設計した IIR ヒルベルト変換器を (31) 式により変換して求めた。また、FIR ヒルベルト変換器は Remez の方法で設計した 50 次のものであり、IIR ヒルベルト変換器を設計するとき、これを最適設計のための初期値設定に用いている。三つの方法で設計されたヒルベルト変換器の振幅特性を Fig. 9 に、位相特性を Fig. 10 にそれぞれ示す。振幅特性は全域通過回路が、位相特性は FIR ヒルベルト変換器が完全に所望の特性を満足していることが分かる。本論文による IIR ヒルベルト変換器では、振幅特性は FIR 形より優れ、位相特性は全域通過回路より長い平坦領域を持っていることが分かる。つまり、振幅特性、位相特性とも FIR 形、全域通過回路形の間の特徴を有していることが確認できた。

## 5. あとがき

本論文では、IIR フィルタによるヒルベルト変換器の新しい設計方法を提案した。本方法では、参照用の FIR ヒルベルト変換器と同じ入力に対し、同じ出力が得られるように、パラメータ推定の手法を用いて初期値を設定する。これにより、IIR フィルタにもかかわらず、位相

特性の良い初期値を平易に求めることができる。また、本方法では、IIR ヒルベルト変換器の設計を非線形方程式の最適化問題として捉えた。具体的には、所望の周波数特性との差に基づいた評価関数を定義し、Fletcher-Powell 法を用いて最適化を行った。本方法の特長は、使用する評価関数として、振幅特性と位相特性の所望の値からの差に、異なった重みを与えることである。それにより、従来の FIR フィルタや全域通過回路では、振幅もしくは位相特性に片寄っていた誤差を自由に制御することが可能であることを示した。

今後は、具体的な応用例などについて検討していく予定である。

### 参 考 文 献

- 1) L. R. Rabiner and B. Gold : Theory and Application of Digital Signal Processing, Prentice-Hall (1975)
- 2) 尾知, 山根 :  $L_p$  ノルム評価によるデジタル全域通過回路の設計と構成の最適化 ; 電子情報通信学会論文誌, Vol. J 69-A, No. 12, pp. 1547~1554 (1986)
- 3) R. Anari : IIR Discrete-Time Hilbert Transformers ; IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process., Vol. ASSP-35, No. 8, pp. 1116~1119 (1987)
- 4) 池原, 田中, 松尾 : Remez アルゴリズムを用いた IIR ヒルベルト変換器の設計 ; 電子情報通信学会論文誌, Vol. J 74-A, No. 3, pp. 414~420 (1991)
- 5) S. Shimizu and T. Yahagi : Design of IIR Allpass Networks for Hilbert Transformers ; Electronics Letters, Vol. 29, No. 24, pp. 2087~2088 (1993)
- 6) 清水, 谷萩 : カルマンフィルタを用いた IIR 移相器の設計 ; ASPシンポジウム講演論文集, システム制御情報学会, pp. 49~52 (1993)
- 7) 谷萩 : デジタル信号処理の理論, 第 3 巻推定・適応信号処理, コロナ社 (1986)