LMI に基づく低次元補償器の表現*

杉江 俊治**・田中 秀幸**

Characterization of Reduced-Order Controllers Based on LMI*

Toshiharu SUGIE** and Hideyuki TANAKA**

This paper presents an alternative characterization of reduced-order controllers via LMI approach. First we give necessary and sufficient conditions for the existence of a reduced-order controller which may be suitable for multi-purpose controller design compared to former ones. And we characterize the set of all reduced-order controllers explicitly. Second we discuss the relation between our results and former ones. Finally we characterize the reduced-order H^2 controller in a similar way, and give a numerical example.

1. はじめに

近年, 制御系の解析および設計の道具として, LMI (線形行列不等式) が注目されている¹⁾. LMI は凸最適化問題として解けることから, 大域的な解を求められることや, 多数の仕様を扱えるといった特長がある.

LMI による制御系の設計については, 状態フィードバックでは, この特長を生かした設計法が提案されている²⁾. 一方, 最近では出力フィードバックの設計についても, Iwasaki らや Gahinet らによって求められている^{3)~5)}.

参考文献 4), 5) では, H^∞ 制御問題や H^2 制御問題など閉ループ系のある“単一の”仕様をみたす補償器について求めている. しかし, 実際の制御対象の設計においては, 複数の仕様が要求される. そこで, 増淵らは閉ループ系の複数の設計仕様をみたす補償器を求める方法を提案し, そのなかで参考文献 4), 5) とは異なる方法でフルオーダーの出力フィードバック制御問題を解いている⁶⁾.

さて, Iwasaki ら, Gahinet らの方法と増淵らの方法は, 状態フィードバックを例にとりて次のように概念的に説明できる. いま, 次のような状態フィードバックを考える.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u = Kx$$

このとき, $A + BK$ が安定となるための必要十分条件は,

$$(A + BK)P + P(A + BK)^T < 0, \quad P > 0$$

なる $P = P^T$ が存在することである. 上の式を LMI にするには, 次の二つの方法がある. 一つめは $B^+B = 0$, $B^+B^{+T} > 0$ なる B^+ を用いて変数消去する方法であり, 二つめは $KP = M$ として変数変換する方法である.

変数消去型が Iwasaki ら Gahinet らのとっている方法であり, 変数変換型が増淵らのとっている方法と言える. 結果として次の式が出てくる.

$$[\text{変数消去型}] \quad B^+(AP + PA^T)B^{+T} < 0, \quad P > 0$$

$$[\text{変数変換型}] \quad (AP + BM) + (AP + BM)^T < 0, \\ P > 0$$

変数変換型の一つの利点として, 複数仕様を考慮に入れた Lyapunov 行列 P を求め易いといったことが考えられる. 実際, これまで状態フィードバックの場合には, ほとんど変数変換型で複数仕様をみたす補償器の設計法が述べられている.

これまでに, 出力フィードバック問題における低次元補償器の存在条件は, 変数消去型により得られているが^{4), 5)} 一方で変数変換型により低次元補償器の特徴づけを与えることは重要であり意味のあることと思われる.

そこで, 本論文では低次元補償器の設計を変数変換型で行った場合, どのような変数が抽出され, どのような条件が加わるかについて考察する. さらに, 安定化問題

* 原稿受付 1995 年 1 月 11 日

** 京都大学 工学部 Faculty of Engineering, Kyoto University; Gokanoshio, Uji city, Kyoto 611, JAPAN

Key Words: linear matrix inequality, reduced order controller, stabilization, H^2 control, linear time-invariant systems.

で得られた結果を H^2 制御問題に拡張し特徴づけを与える。

表記は次のものを用いる。 n 次の単位行列を I_n で表わす。行列 A の転置を A^T で表わす。 $\text{tr } A$, $\text{rank } A$, $\text{ker } A$, $\text{span } A$ はそれぞれ A のトレース, A の階数, 零空間および A の列ベクトルによって張られる空間を表わす。 A に対して次の性質を持つ行列 X を $A^\perp$ で表わす。

$$\text{ker } X = \text{span } A, \quad XX^T > 0$$

2. 低次元補償器

2.1 問題設定

Fig. 1 のような線形時不変な一般化制御対象 $P(s)$ を考える。 $P(s)$ の状態空間表現は次式であるとする。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B \\ C_1 & D_{11} & D_{10} \\ C & D_{01} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (1)$$

ただし, $x \in \mathbf{R}^n$ は制御対象の状態, $u \in \mathbf{R}^m$ は制御入力, $y \in \mathbf{R}^p$ は観測出力, $w \in \mathbf{R}^{p_1}$ は外乱入力, $z \in \mathbf{R}^{p_2}$ は制御量である。次数を n_c 次 ($0 < n_c < n$) に固定した次の補償器 $K(s)$ を考える。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y \end{bmatrix}, \quad A_c \in \mathbf{R}^{n_c \times n_c} \quad (2)$$

このとき, 系を内部安定化する安定化問題を考える。なお, 定理の証明はすべて付録に述べる。

Fig. 1 Feedback system

2.2 低次元補償器のパラメータ表現

ここでは, 低次元補償器が存在するための必要十分条件および補償器の構造について示す。

記述の簡単のために, 次の集合を定義する。これは, 後に述べるパラメータ集合の行列のサイズを記述するためのものである。

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &:= \{(P_f, P_g, M_f, M_g, L, X_D) \in \mathbf{R}^{n \times n} \times \mathbf{R}^{n \times n} \times \mathbf{R}^{m \times n} \times \mathbf{R}^{p \times n} \times \mathbf{R}^{n \times n} \times \mathbf{R}^{m \times p} | \\ &\quad P_f = P_f^T, P_g = P_g^T\} \end{aligned} \quad (3)$$

つぎに, 低次元補償器が存在するための必要十分条件を述べるためのパラメータ集合を定義する。(1) 式の A, B, C に対して次のパラメータの集合を定義する。

$$\mathcal{P} := \{(P_f, P_g, M_f, M_g, L, X_D) \in \mathcal{R} |$$

以下の(4)~(6)式が成立)

$$\hat{P}_{cl} := \begin{bmatrix} P_f & I_n \\ I_n & P_g \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4)$$

$$\hat{Q}_{cl} := \begin{bmatrix} Q_f & L \\ L^T & Q_g \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5)$$

$$\text{rank } \hat{P}_{cl} = \text{rank } \hat{Q}_{cl} = \text{rank } \begin{bmatrix} \hat{P}_{cl} \\ \hat{Q}_{cl} \\ \hat{M}_{cl} \end{bmatrix} = n + n_c \quad (6)$$

ただし,

$$\hat{M}_{cl} := \begin{bmatrix} M_f & X_D C \\ X_D^T B^T & M_g \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$Q_f := -(AP_f + BM_f) - (AP_f + BM_f)^T \quad (8)$$

$$Q_g := -(A^T P_g + C^T M_g) - (A^T P_g + C^T M_g)^T \quad (9)$$

とする。以上の定義を用いて低次元安定化補償器が存在するための必要十分条件および補償器の構造が次のように与えられる。

【定理1】 次は等価である。

(i) (1) 式に対して(2)式の安定化補償器が存在する。

(ii) $\mathcal{P} \neq \emptyset$

さらに, 任意の n_c 次の低次元安定化補償器 $K(s)$ に対して $\mathcal{P}$ の元が存在して, $K(s)$ の一つの実現は次の式で表わされる。

$$S := P_f - P_g^{-1} \quad (10)$$

$$D_c = X_D \quad (11)$$

$$C_c = (M_f - D_c C P_f) R^{-T} \begin{bmatrix} Z^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$B_c = -[I_{n_c} \ 0] R^{-1} P_g^{-1} (M_g^T - P_g B D_c) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} A_c = & -[I_{n_c} \ 0] R^{-1} \left(R \begin{bmatrix} I_{n_c} \\ 0 \end{bmatrix} B_c C P_f \right. \\ & + S A^T + S C^T D_c^T B^T + R \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix} C_c^T B^T \\ & \left. + Q_f - P_g^{-1} L^T \right) R^{-T} \begin{bmatrix} Z^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

ただし, $R \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbf{R}^{n_c \times n_c}$ はそれぞれ正則であり, 次をみたす適当な分解であるとする。

$$S = R \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^T \quad (15)$$

逆に、任意の $(P_f, P_g, M_f, M_g, L, X_D) \in \mathcal{P}$ を用いて (15) 式の任意の R, Z の分解により (11)～(14) 式で記述された $K(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c$ は安定化補償器になっている。

(注意1) (8), (9) 式は状態フィードバックとオブザーバゲインに関する式である。たとえば、 $P_f > 0, Q_f > 0$ のとき $M_f P_f^{-1}$ は安定化状態フィードバックゲインとなる。実際、 (A, B) 可安定であるための必要十分条件は $(P_f > 0, Q_f > 0)$ であり、 (C, A) 可検出であるための必要十分条件は $(P_g > 0, Q_g > 0)$ であるといえる。

(注意2) $P_f \geq 0, P_g \geq 0, Q_f \geq 0, Q_g \geq 0$ に見えるが実際は条件をみたすとき $P_f > 0, P_g > 0$ であり⁷⁾、 $Q_f > 0, Q_g > 0$ である (付録2等価性の証明 [$\mathcal{P} \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{L} \neq \emptyset$] 参照)。

(注意3) (6) 式の rank 条件は後に見るように変数消去型における (19) 式の rank 条件に対応していると考えられる。

3. 従来結果との対応関係

3.1 変数消去型との比較

ここでは n_c 次の場合の変数消去型と変数変換型による存在条件について比較する。まず、 n_c 次の変数消去型の実在条件として Iwasaki らの条件を紹介する。条件を述べるために次のパラメータ集合を定義する。

$$\mathcal{L} := \{(P_f = P_f^T, P_g = P_g^T) \in \mathbf{R}^{n \times n} \times \mathbf{R}^{n \times n} |$$

以下の (16)～(19) 式が成立

$$B^+ (AP_f + P_f A^T) B^{+T} < 0 \quad (16)$$

$$C^{T+} (A^T P_g + P_g A) C^{T+T} < 0 \quad (17)$$

$$\hat{P}_{cl} := \begin{bmatrix} P_f & I \\ I & P_g \end{bmatrix} \geq 0 \quad (18)$$

$$\text{rank } \hat{P}_{cl} = n + n_c \quad (19)$$

【命題1】³⁾ 次は等価である。

(i) (1) 式に対して (2) 式の安定化補償器が存在する。

(ii) $\mathcal{L} \neq \emptyset$

(注意) (16), (17) 式はそれぞれ状態フィードバックおよびオブザーバに関する式といえる。実際、 (A, B) 可安定であるための必要十分条件は $(P_f > 0, (16) \text{ 式})$ であり、 (C, A) 可検出であるための必要十分条件は $(P_g > 0, (17) \text{ 式})$ である³⁾。

定理1と命題1により、 $\mathcal{P} \neq \emptyset$ と $\mathcal{L} \neq \emptyset$ の条件は等価であることは明らかであるが、さらに参考文献8)の

結果を援用することにより次の関係を示すことができる。

【定理2】 次の条件は等価である。

(i) $\mathcal{L} \neq \emptyset$ (変数消去型)

(ii) $\mathcal{P} \neq \emptyset$ (変数変換型)

さらに、ある一つの任意な元 $(P_f, P_g) \in \mathcal{L}$ に対して、適当な M_f, M_g, L, X_D が存在して、 $(P_f, P_g, M_f, M_g, L, X_D) \in \mathcal{P}$ とできる。逆に、ある一つの任意な元 $(P_f, P_g, M_f, M_g, L, X_D) \in \mathcal{P}$ に対して、 $(P_f, P_g) \in \mathcal{L}$ とできる。

これは定理1の別証を与えるとともに、 $\mathcal{L}, \mathcal{P}$ でのパラメータ関係を明確にしている。さらに、この定理を使って $\mathcal{L}, \mathcal{P}$ の順にパラメータを求めることができること、 $(P_f, P_g) \in \mathcal{L}$ を求められれば必ず $\mathcal{P}$ に属するパラメータを求めることができることを示している。

3.2 フルオーダーの場合との関係

つぎに、定理1の $\mathcal{P} \neq \emptyset$ がフルオーダーの場合の自然な拡張になっていることを示す。増淵らは厳密にプロパーでかつフルオーダーの場合について解いている。そこで、 $n = n_c, D_c = 0$ の場合について考察する。

$\mathcal{P} \neq \emptyset$ について見てみよう。(6) 式に $n = n_c$ とすることによって、 $\text{rank } \hat{P}_{cl} = \text{rank } \hat{Q}_{cl} = n + n_c$ であり、 $\hat{P}_{cl}, \hat{Q}_{cl}$ は正則である。したがって、次の増淵らの条件⁶⁾を得る。

【命題2】⁶⁾ 次は等価である。

(i) (1) 式に対して、 $n = n_c, D_c = 0$ とした (2) 式の安定化補償器が存在する。

(ii) $\mathcal{P}_F \neq \emptyset$

ただし、

$$\mathcal{P}_F := \{(P_f = P_f^T, P_g = P_g^T, M_f, M_g, L) \in \mathbf{R}^{n \times n} \times \mathbf{R}^{n \times n} \times \mathbf{R}^{m \times n} \times \mathbf{R}^{p \times n} \times \mathbf{R}^{n \times n} |$$

以下の (20), (21) 式が成立

$$\hat{P}_{cl} := \begin{bmatrix} P_f & I \\ I & P_g \end{bmatrix} > 0 \quad (20)$$

$$\hat{Q}_{cl} := \begin{bmatrix} Q_f & L \\ L^T & Q_g \end{bmatrix} > 0 \quad (21)$$

である。 $n = n_c$ のとき、 $R = I_n, Z = S, X_D = 0$ とすることにより、補償器の構造は増淵らの補償器⁶⁾に一致する。

$$S := P_f - P_g^{-1} \quad (22)$$

$$D_c = 0 \quad (23)$$

$$C_c = M_f S^{-1} \quad (24)$$

$$B_c = -P_g^{-1} M_g^T \quad (25)$$

$$A_c = -(B_c C_p + S A^T + S C_c^T B^T + Q_f - P_g^{-1} L^T) S^{-1} \quad (26)$$

低次元の場合、特に付録 1.2 の十分条件の証明において $\hat{P}_{cl}$, $\hat{Q}_{cl}$ の正定性がいえないこと、さらに、 S が正則でないことなどから、 X_A , X_B , X_C の存在性の議論が複雑となっている。

4. パラメータの計算法

$\mathcal{P}$ に属するパラメータを計算する一つの方法として、定理 2 の証明に基づき、変数消去型のパラメータから変数変換型のパラメータを求める方法を示しておく。

Step I 次をみたす $P_f = P_f^T$, $P_g = P_g^T$ を計算する。

$$\begin{aligned} B^+ (AP_f + P_f A^T) B^{+T} &< 0 \\ C^{T+} (A^T P_g + P_g A) C^{T+T} &< 0 \\ \hat{P}_{cl} &= \begin{bmatrix} P_f & I \\ I & P_g \end{bmatrix} \geq 0 \\ \text{rank } \hat{P}_{cl} &= n + n_c \end{aligned}$$

Step II 次の分解により S , $Z = Z^T$, R を求める。

$$S := P_f - P_g^{-1} = R \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^T$$

Step III 次の計算により U_f , U_g を求める。

$$\begin{aligned} U_f &:= R^{-T} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-n_c} \end{bmatrix} \\ U_g &:= -P_g^{-1} R^{-T} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-n_c} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Step IV 次をみたす X_D を求める。

$$\begin{aligned} U_f^T A U_g + U_g^T A^T U_f \\ + U_f^T B X_D C U_g + U_g^T C^T X_D^T B^T U_f &> 0 \end{aligned}$$

Step V 次をみたす X_C を求める。

$$\begin{aligned} -AP_f - B X_D C P_f + (-AP_f - B X_D C P_f)^T \\ -B X_C [Z \ 0] R^T - R \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix} X_C^T B^T &> 0 \end{aligned}$$

Step VI 次をみたす X_B を求める。

$$\begin{aligned} -A^T P_g - C^T X_D^T B^T P_g \\ + (-A^T P_g - C^T X_D^T B^T P_g)^T \\ + C^T X_B^T [I_{n_c} \ 0] R^T P_g \\ + P_g R \begin{bmatrix} I_{n_c} \\ 0 \end{bmatrix} X_B C &> 0 \end{aligned}$$

Step VII 次の計算により、 M_f , M_g , Q_f , Q_g , L を求める。

$$\begin{aligned} M_f &:= X_D C P_f + X_C [Z \ 0] R^T \\ M_g &:= X_D^T B^T P_g - X_B^T [I_{n_c} \ 0] R^T P_g \\ Q_f &:= -(AP_f + B M_f) - (AP_f + B M_f)^T \\ Q_g &:= -(A^T P_g + C^T M_g) - (A^T P_g + C^T M_g)^T \\ L &:= -Q_f U_f (U_f^T Q_f U_f)^{-1} U_g^T Q_g \end{aligned}$$

(注意 1) Step I は n_c 次の補償器が存在するための必要十分条件であり、Step I が求められれば以後の Step は求められる。

(注意 2) Step II は固有値分解により求められる。

(注意 3) 計算方法自身は変数消去型より H^∞ 補償器を設計する方法⁸⁾ とほぼ同様になっている。

5. 低次元 H^2 制御問題への拡張

ここでは H^2 制御問題を取りあげ、安定化問題の可解条件を H^2 補償器の存在条件に拡張する。

5.1 低次元 H^2 補償器の存在条件

(1), (2) 式の制御対象と n_c 次の補償器について考える。系を内部安定化し、 w から z までの伝達関数の H^2 ノルムを γ 未満にする H^2 制御問題について考える。ただし、 $D_{11} = 0$ とする。

ここで、 H^2 条件を LMI で記述しておく。 $G(s) = C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1}B_{cl}$ とする。このとき、 A_{cl} が安定かつ $\|G\|_2 < \gamma$ であるための必要十分条件は次をみたす対称な P_{cl} が存在することである (たとえば参考文献 3))。

$$\begin{aligned} -A_{cl}^T P_{cl}^{-1} - P_{cl}^{-1} A_{cl} - \gamma^{-1} C_{cl}^T C_{cl} &> 0 \\ \text{tr}(B_{cl}^T P_{cl}^{-1} B_{cl}) &< \gamma \\ P_{cl}^{-1} &> 0 \end{aligned}$$

これらの条件は $C_{cl} C_{cl}^T \in \mathbf{R}^{p_1 \times p_1}$, $B_{cl}^T B_{cl} \in \mathbf{R}^{m_1 \times m_1}$ のとき、次をみたす対称な P_{cl} が存在することと等価である (たとえば参考文献 1))。

(27)~(29) 式を満たす $Y \in \mathbf{R}^{m_1 \times m_1}$ が存在する。

$$\Omega_{2(P)} := \begin{bmatrix} Y & B_{cl}^T \\ B_{cl} & P_{cl} \end{bmatrix} > 0 \quad (27)$$

$$\Omega_{2(Q)} := \begin{bmatrix} \gamma I_{p_1} & C_{cl} P_{cl} \\ P_{cl} C_{cl}^T & Q_{cl} \end{bmatrix} > 0 \quad (28)$$

$$\text{tr } Y < \gamma \quad (29)$$

ここで、 Q_{cl} は以下で定義される。

$$Q_{cl} := -(A_{cl} P_{cl} + P_{cl} A_{cl}^T)$$

さて、低次 H^2 補償器が存在するための必要十分条件を述べるために、(1) 式の制御対象に対して次のパラメータ集合を定義する。

$$\mathcal{N}_2 := \{(P_f, P_g, M_f, M_g, L, X_D) \in \mathcal{R} \mid$$

(30)~(35)式を満たす $Y \in \mathbf{R}^{m_1 \times m_1}$ が存在)

$$\hat{\Omega}_{2(P)} := \begin{bmatrix} P_f & I_n & \Gamma_B \\ I_n & P_g & \Pi_g \\ \Gamma_B^T & \Pi_g^T & Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (30)$$

$$\hat{\Omega}_{2(Q)} := \begin{bmatrix} Q_f & L & \Pi_f^T \\ L^T & Q_g & \Gamma_C^T \\ \Pi_f & \Gamma_C & \mathcal{N}_{p1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (31)$$

$$\text{tr } Y < \gamma \quad (32)$$

$$D_{10} X_D D_{01} = 0 \quad (33)$$

$$\text{rank } \hat{\Omega}_{2(P)} = n + n_c + m_1 \quad (34)$$

$$\text{rank } \hat{\Omega}_{2(Q)} = n + n_c + p_1 \quad (35)$$

ただし

$$\Gamma_B = B_1 + B X_D D_{01}, \quad \Gamma_C = C_1 + D_{10} X_D C$$

$$\Pi_f = C_1 P_f + D_{10} M_f, \quad \Pi_g = P_g B_1 + M_g^T D_{01}$$

である。

【定理3】 次は等価である。

(i) (1) 式に対して (2) 式の H^2 補償器が存在する。

(ii) $\mathcal{P} \cap \mathcal{N}_2 \neq \phi$

さらに、 $\mathcal{P} \cap \mathcal{N}_2 \neq \phi$ のとき n_c 次の H^2 補償器は $(P_f, P_g, M_f, M_g, L, X_D) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{N}_2$ を用いて、定理1の $K(s)$ で表わされる。

(注意1) $\hat{\Omega}_{2(P)}$ と $\hat{\Omega}_{2(Q)}$ はそれぞれ $\Omega_{2(P)}$ と $\Omega_{2(Q)}$ に対応している。

(注意2) $\mathcal{N}_2$ 中の rank 条件 (34), (35) 式は実質的には制約とはなっていない。実際、この rank 条件は満たさないが、他の条件を満たしているときに、 γ を (任意の微小量) 大きくすることによって rank 条件を満たすようにすることが可能である。直観的にいえばこの rank 条件は H^2 制御仕様が γ 以下か未満を述べているにすぎない。

(注意3) 参考文献3)に基づいて変数消去型で低次元の H^2 補償器の存在条件を導くことができるが、定理3はその変数変換型の結果を与えている。

5.2 数値例

ここでは、実際にパラメータを求めることができることの例として、次の評価関数を考え H^2 制御問題により補償器 $K(s)$ を求める。

$$J = \left(\int_0^\infty x^T Q x + u^T R u dt \right)^{1/2}$$

【例題】 制御対象 $P(s) = C_p(sI - A_p)^{-1}B_p$ が次式で与えられているとする。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

次の重みを選ぶとする。

$$Q = \text{diag} \{10000, 10000\}, \quad R = 1 \quad (36)$$

一般化制御対象 $G(s)$ は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B \\ C_1 & D_{11} & D_{10} \\ C & D_{01} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & I_2 & -B_p \\ Q^{1/2} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -R^{1/2} \end{bmatrix} \\ C_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}$$

通常の場合、得られる補償器 $K(s)$ の次数は ($G(s)$ の次数) = 2 となる。閉ループ系のノルムを 150 未満になるようにして解いた。ここでは、次のようなパラメータが4の手順を H^2 に修正した計算方法により得られた。rank $\hat{P}_{cl} = 3$ であるので、次数1の低次元補償器が得られる。

$$P_f = \begin{bmatrix} 1.107 & -1.500 \times 10^{-2} \\ -1.500 \times 10^{-2} & 1.094 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$P_g = \begin{bmatrix} 32.06 & -3.082 \\ -3.082 & 93.79 \end{bmatrix}$$

$$M_f = [150.1 \quad -1.014 \times 10^{-3}]$$

$$M_g = [-106.8 \quad -274.9]$$

$$L = \begin{bmatrix} 82.04 & 305.6 \\ -0.9478 & 1.350 \end{bmatrix}$$

$$X_D = 208.5$$

$$Y = \begin{bmatrix} 40.12 & -3.082 \\ -3.082 & 101.8 \end{bmatrix}$$

$$U_f = \begin{bmatrix} -1.489 \times 10^{-2} \\ -0.9999 \end{bmatrix}$$

$$U_g = \begin{bmatrix} 1.494 \times 10^{-3} \\ 1.071 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

なお、 D_{01} に微小な正数を加えることによって仮定をみたすようにした通常の H^2 補償器による最適解の閉ループ系のノルムは 111.87 であった。

結果として補償器 $K(s)$ は以下のものであり、得られた閉ループ系のノルムは 113.84 であった。

$$K(s) = \frac{208.50(s + 2.062)}{s + 141.9} \quad (37)$$

なお、この計算にあたって Gahinet 氏提供による LMI-Lab を使わせていただきました。ここに、感謝の意を表します。

6. おわりに

本論文では、LMI の変数変換型による解法で低次元補償器が存在するための必要十分条件を求め、補償器を特徴づけた。フルオーダの場合と異なり、rank 条件が加わるため複雑なものとならざるを得ないが、変数消去型による存在条件、フルオーダの場合との比較を行い、その関係を明らかにした。さらに、本結果の安定化補償器の可解条件が H^2 制御問題へ拡張できることを示した。 H^∞ 補償器も同じパラメータ集合を用いて表現できるが、他の機会に報告することとする。

現在のところ、変数消去型に基づく計算方法しか得られておらず、今後の課題として変数変換型を直接求める計算方法の確立が必要である。

参 考 文 献

- 1) E. Feron, S. Boyd, L. E. Ghauli and V. Balakrishnan : Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM (1994)
- 2) P. L. D. Peres, J. Bernussou and J. C. Geromel : A Linear Programming Oriented Procedure for Quadratic Stabilization of Uncertain Systems; System and Control Letters, Vol. 13, No. 1, pp. 65~72 (1989)
- 3) T. Iwasaki : A Unified Matrix Inequality Approach to Linear Control Design, Ph. D thesis, Purdue University (1993)
- 4) T. Iwasaki and R. E. Skelton : All Controllers for the General H^∞ Control Problem : LMI Existence Conditions and State Space Formulas; Automatica, Vol. 30, pp. 1307~1317 (1994)
- 5) P. Gahinet and P. Apkarian : A Linear Matrix Inequality Approach to H^∞ Control; Int. J. Robust and Nonlinear Control, Vol. 4, pp. 421~448 (1994)
- 6) 増淵, 小原, 須田 : フルオーダコントローラの新たなパラメトリゼーションとそのロバスト制御系への応用; 第23回 SICE 制御理論シンポジウム資料, pp. 375~380 (1994)
- 7) E. Kreindler and A. Jameson : Conditions for Non-negativeness of Partitioned Matrices; IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. 17, No. 1, pp. 147~148 (1972)
- 8) P. Gahinet : Explicit Controller Formulas for LMI-Based H^∞ Synthesis; Automatica (1994), (to be submitted)

付 録

付録1 定理1 (安定化問題) の証明

付録1.1 必要条件

(2) 式の安定化補償器 $K(s)$ が存在すると仮定する。最初に、

$$X_D := D_c \quad (A1)$$

とおく。このとき、閉ループ系のひとつの実現は $x_{cl} =$

$[x^T \ x_c^T]^T$ とすると

$$\dot{x}_{cl} = A_{cl} x_{cl}, \quad A_{cl} := \begin{bmatrix} A + BX_D C & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \quad (A2)$$

となる。このとき、 A_{cl} は安定なので

$$P_{cl} > 0 \quad (A3)$$

$$\bar{Q}_{cl} := -A_{cl}^T P_{cl} - P_{cl} A_{cl}^T > 0 \quad (A4)$$

をみたす対象行列 $P_{cl} \in \mathbf{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ が存在する。さらに、

$$P_{cl} = \begin{bmatrix} P_1 & P_{12} \\ P_{12}^T & P_2 \end{bmatrix}, \quad P_1 \in \mathbf{R}^{n \times n} \quad (A5)$$

と分割するとき、 P_{12} が列フルランクとなるような $P_{cl} > 0$ が必ず選べる。そこで、正則な R , P_{121} が存在して、 P_{12} を

$$P_{12} = R \begin{bmatrix} P_{121} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_{121} \in \mathbf{R}^{n_c \times n_c} \quad (A6)$$

と表わすことができる。このような P_{cl} を用いて、

$$\tilde{A}_c = P_{121} P_2^{-1} A_c P_2 P_{121}^{-1} \quad (A7)$$

$$\tilde{B}_c = P_{121} P_2^{-1} B_c \quad (A8)$$

$$\tilde{C}_c = C_c P_2 P_{121}^{-1} \quad (A9)$$

と定義して、 A_c, B_c, C_c の座標変換を行う。このとき、

$$P_f = P_1, \quad Z = P_{121} P_2^{-1} P_{121}^T \quad (A10)$$

とおき、 $\bar{P}_{cl}$ を次式で定義する。

$$\bar{P}_{cl} := \begin{bmatrix} P_f & R \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix} \\ [Z \ 0] R^T & Z \end{bmatrix} \quad (A11)$$

このとき、次式が成立することが容易に確かめられる。

$$\bar{P}_{cl} > 0 \quad (A12)$$

$$\bar{Q}_{cl} := -\bar{A}_{cl} \bar{P}_{cl} - \bar{P}_{cl} \bar{A}_{cl}^T > 0 \quad (A13)$$

ただし、 $\bar{A}_{cl}$ は次式で定義される。

$$\bar{A}_{cl} := \begin{bmatrix} A + BX_D C & B \tilde{C}_c \\ \tilde{B}_c C & \tilde{A}_c \end{bmatrix} \quad (A14)$$

ここで、次のような拡大行列 $\tilde{P}_{cl}, \tilde{Q}_{cl}$ を定義する。

$$\tilde{P}_{cl} := \begin{bmatrix} \bar{P}_{cl} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n \times 2n} \quad (A15)$$

$$\tilde{Q}_{cl} := \begin{bmatrix} \bar{Q}_{cl} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n \times 2n} \quad (A16)$$

さて、記述の簡単のため、次の行列を定義する。

$$S := R \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^T \quad (A17)$$

このとき、 $\bar{P}_{cl} > 0$ により

$$P_f - S = P_f - R \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix} Z^{-1} [Z \ 0] R^T > 0 \quad (\text{A18})$$

である。したがって、次の行列が定義できる。

$$P_g := (P_f - S)^{-1} > 0 \quad (\text{A19})$$

ここで、次の正則な行列を定義する。

$$T := \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ P_g & -P_g R \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n \times 2n} \quad (\text{A20})$$

また、 P_f , Z をもちいて、次の行列を定義する。

$$M_f := X_D C P_f + \tilde{C}_c [Z \ 0] R^T \quad (\text{A21})$$

$$M_g := X_D^T B^T P_g - \tilde{B}_c^T \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0 \end{bmatrix} R^T P_g \quad (\text{A22})$$

$$\begin{aligned} L^T := & P_g \left(R \begin{bmatrix} I_{n_c} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{B}_c C P_f + S A^T + S C^T X_D^T B^T \right. \\ & \left. + R \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{C}_c^T B^T + Q_f \right) + P_g R \begin{bmatrix} I_{n_c} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{A}_c [Z \ 0] R^T \end{aligned} \quad (\text{A23})$$

以上の定義を行うことによって、次式が成立する。

$$\hat{P}_{cl} = T \tilde{P}_{cl} T^T \quad (\text{A24})$$

$$\hat{Q}_{cl} = T \tilde{Q}_{cl} T^T \quad (\text{A25})$$

T は正則であるので $\hat{P}_{cl} \geq 0$, $\hat{Q}_{cl} \geq 0$ であり、次式が成立する。

$$\text{rank } \hat{P}_{cl} = \text{rank } \hat{Q}_{cl} = n + n_c \quad (\text{A26})$$

ここで、 U_f , U_g を次のようにして定義する。

$$U_f := R^{-T} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-n_c} \end{bmatrix}, \quad U_g := -P_g^{-1} U_f \quad (\text{A27})$$

このとき、

$$\hat{P}_{cl} \begin{bmatrix} U_f \\ U_g \end{bmatrix} = \hat{Q}_{cl} \begin{bmatrix} U_f \\ U_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A28})$$

$$(M_f - X_D C P_f) U_f = 0 \quad (\text{A29})$$

$$(M_g - X_D^T B^T P_g) U_g = 0 \quad (\text{A30})$$

が成立する。これらの式より次式が成立する。

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_{cl} \\ \hat{Q}_{cl} \\ \hat{M}_{cl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_f \\ U_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A31})$$

$[U_f^T \ U_g^T]^T$ は列フルランクであるので

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \hat{P}_{cl} & \hat{Q}_{cl} & \hat{M}_{cl} \end{bmatrix}^T \leq n + n_c \quad (\text{A32})$$

となつて (6) 式が成立する。

付録 1.2 十分条件

次に十分条件を証明する。証明の手順は、まず、条件をみたすパラメータが存在するとき、ある行列 (X_A , X_B , X_C , X_D) が存在することを示す。つぎに、 X_A , X_B , X_C ,

X_D) が安定化補償器になっていることを示す。

$\hat{P}_{cl} \geq 0$ のとき次が成立する⁷⁾。

$$P_f > 0, \quad P_g > 0 \quad (\text{A33})$$

このとき、 $S := P_f - P_g^{-1}$ とすると $\text{rank } \hat{P}_{cl} = n + n_c$ であるから $\text{rank } S = n_c$ となり、次をみたす正則な $R \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbf{R}^{n_c \times n_c}$ が存在する。

$$S = R \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^T \quad (\text{A34})$$

ここで、次のように U_f , U_g を定義する。

$$U_f = R^{-T} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-n_c} \end{bmatrix}, \quad U_g = -P_g^{-1} U_f \quad (\text{A35})$$

このとき、次式が成立する。

$$\ker \hat{P}_{cl} = \text{span} \begin{bmatrix} U_f \\ U_g \end{bmatrix} \quad (\text{A36})$$

(6) 式より次がいえる。

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_{cl} \\ \hat{Q}_{cl} \\ \hat{M}_{cl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_f \\ U_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A37})$$

なぜなら、(6) 式は $\hat{Q}_{cl}$ と $\hat{M}_{cl}$ の行ベクトルは $\hat{P}_{cl}$ の $n + n_c$ 本の独立な行ベクトルに一次従属であることを意味しているからである。(A37) 式より次が成立する。

$$(M_f - X_D C P_f) U_f = 0 \quad (\text{A38})$$

$$(M_g - X_D^T B^T P_g) U_g = 0 \quad (\text{A39})$$

したがって Z の正則性と U_f を考えることによって、

$$M_f - X_D C P_f = X_C [Z \ 0] R^T \quad (\text{A40})$$

をみたす $X_C \in \mathbf{R}^{m \times n_c}$ が存在する。同様に U_g を考えることによって

$$M_g - X_D^T B^T P_g = -X_B^T \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0 \end{bmatrix} R^T P_g \quad (\text{A41})$$

をみたす $X_B \in \mathbf{R}^{n_c \times p}$ が存在する。ここで、次の行列を定義する。

$$\begin{aligned} \Phi := & P_g \left(R \begin{bmatrix} I_{n_c} \\ 0 \end{bmatrix} X_B C P_f + S A^T + S C^T X_D^T B^T \right. \\ & \left. + R \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix} X_C^T B^T + Q_f \right) \end{aligned} \quad (\text{A42})$$

このとき、 U_f , U_g に関して (A37) 式、 M_f , M_g に関して (A40), (A41) 式を使って多少面倒ではあるが単純な計算を経て次式が得られる。

$$\Phi U_f = -Q_g U_g, \quad U_g^T \Phi = -U_f^T Q_f \quad (\text{A43})$$

この式と (A37) 式より次式を得る。

$$(\Phi - L^T) U_f = 0, \quad U_g^T (\Phi - L^T) = 0 \quad (\text{A44})$$

U_f , U_g を代入して、 R , P_g , Z が正則であることから、

次をみたす $X_A \in \mathbf{R}^{n_c \times n_c}$ が存在する.

$$-P_g R \begin{bmatrix} I_{n_c} \\ 0 \end{bmatrix} X_A [Z \ 0] R^T = \Phi - L^T \quad (\text{A45})$$

つぎに, X_A, X_B, X_C, X_D が実は安定化補償器になっていることは, $\hat{P}_{cl}$ と $\hat{Q}_{cl}$ のランクおよび, (A20) 式で定義される正則な T に対して $T^{-1}\hat{P}_{cl}T^{-T} \geq 0$, $T^{-1}\hat{Q}_{cl}T^{-T} \geq 0$ を計算することによってわかる.

付録1.3 安定化補償器のパラメータ表現

[必要条件] n_c 次の補償器を適当な座標変換をした $K(s) = \tilde{C}_c(sI - \tilde{A}_c)^{-1}\tilde{B}_c + D_c$ は, $\tilde{A}_c, \tilde{B}_c, \tilde{C}_c, D_c$ について (A1), (A21), (A22), (A23) 式を満たしている. したがって, $\tilde{A}_c, \tilde{B}_c, \tilde{C}_c, D_c$ は R, Z に対して (11)~(14) 式を満たしてなくてはならない.

[十分条件] (A40) 式をみたす X_C は次式で表わされる.

$$X_C = (M_f - X_D C P_f) R^{-T} \begin{bmatrix} Z^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

また, (A41) 式をみたす X_B は次式で表わされる.

$$X_B = -[I_{n_c} \ 0] R^{-1} P_g^{-1} (M_g^T - P_g B D_c)$$

さらに, (A45) 式をみたす X_A は次式で表わされる.

$$X_A = -[I_{n_c} \ 0] R^{-1} P_g^{-1} (\Phi - L^T) R^{-T} \begin{bmatrix} Z^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

すなわち, 定理で定められる補償器 A_c, B_c, C_c, D_c は $X_A = A_c, X_B = B_c, X_C = C_c, X_D = D_c$ として, (A40), (A41), (A45) 式をみたすことにより, 安定化補償器となっている.

付録2 定理2 (条件の等価性) の証明

$[\mathcal{P} \neq \phi \Rightarrow \mathcal{L} \neq \phi]$

次をみたす $U_f, U_g \in \mathbf{R}^{n \times (n-n_c)}$ が存在する.

$$\ker \hat{P}_{cl} = \ker \hat{Q}_{cl} = \text{span } W_2 \quad (\text{A46})$$

$$W_2 := \begin{bmatrix} U_f \\ U_g \end{bmatrix} \quad (\text{A47})$$

さらに, $S := P_f - P_g^{-1}$ とすると, 次をみたす正則な $R \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbf{R}^{n_c \times n_c}$, $V \in \mathbf{R}^{(n-n_c) \times (n-n_c)}$ が存在する.

$$S = R \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^T, \quad U_f = R^{-T} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-n_c} \end{bmatrix} V \quad (\text{A48})$$

ここで, $U_g = -P_g^{-1} U_f$ であることに注意して

$$W_1 = \begin{bmatrix} R^{-T} & 0 \\ 0 & -P_g^{-1} R^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_{n_c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A49})$$

とすると, 次式が成立する.

$$\text{span } W_1 + \text{span } W_2 = \mathbf{R}^{2n} \quad (\text{A50})$$

ここで, 補題Aを使うと, $W_1^T \hat{Q}_{cl} W_1 > 0$ より $Q_f > 0$ がいえる. 同様に, $Q_g > 0$ についても適当な W_1 を選ぶことによっていえる. ここで, 両辺から列フルランクな行列を左右からかけても正定性はいえる. すなわち, (16), (17) 式が成立する.

$[\mathcal{L} \neq \phi \Rightarrow \mathcal{P} \neq \phi]$

次の集合を定義する.

$$\mathcal{S} := \{(P_f = P_f^T, P_g = P_g^T, U_f, U_g, X_D) \in \mathbf{R}^{n \times n} \times \mathbf{R}^{n \times n} \times \mathbf{R}^{n \times (n-n_c)} \times \mathbf{R}^{n \times (n-n_c)} \times \mathbf{R}^{m \times p} \mid (\text{A51}) \sim (\text{A53}) \text{ 式が成立}\}$$

$$(P_f, P_g) \in \mathcal{L} \quad (\text{A51})$$

$$\ker \hat{P}_{cl} = \text{span} \begin{bmatrix} U_f \\ U_g \end{bmatrix} \quad (\text{A52})$$

$$U_f^T A U_g + U_g^T A^T U_f + U_f^T B X_D C U_g + U_g^T C^T X_D^T B^T U_f > 0 \quad (\text{A53})$$

以後 $[\mathcal{L} \neq \phi \Rightarrow \mathcal{P} \neq \phi]$ の証明を $[\mathcal{L} \neq \phi \Rightarrow \mathcal{S} \neq \phi]$, $[\mathcal{S} \neq \phi \Rightarrow \mathcal{P} \neq \phi]$ の順で行う.

$[\mathcal{L} \neq \phi \Rightarrow \mathcal{S} \neq \phi]$

$\text{rank } \hat{P}_{cl} = n + n_c$ より, $\text{rank } (P_f - P_g^{-1}) = n_c$ であるから³⁾, 次をみたす行列 $R \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbf{R}^{n_c \times n_c}$ が存在する.

$$S := P_f - P_g^{-1} = R \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Z^{-1} [Z \ 0] R^T, \quad (\text{A54})$$

R : 正則, $Z > 0$

このとき,

$$P_g^{-1} = P_f - R \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Z^{-1} [Z \ 0] R^T > 0, \quad Z > 0 \quad (\text{A55})$$

であるから

$$\hat{P}_{cl} = \begin{bmatrix} P_f & R \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix} \\ [Z \ 0] R^T & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A56})$$

が成立する. このとき, (16), (17) 式はそれぞれ次のように書ける.

$$[B^\perp \ 0] (\bar{A} \hat{P}_{cl} + \hat{P}_{cl} \bar{A}^T) \begin{bmatrix} B^{\perp T} \\ 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A57})$$

$$[C^{\perp T} \ 0] \hat{P}_{cl}^{-1} (\bar{A} \hat{P}_{cl} + \hat{P}_{cl} \bar{A}^T) \hat{P}_{cl}^{-1} \begin{bmatrix} C^{\perp T T} \\ 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A58})$$

ただし,

$$\bar{A} := \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)} \quad (\text{A59})$$

このとき、次をみたす $\tilde{G}_c \in \mathbf{R}^{(m+n_c) \times (p+n_c)}$ が存在する⁴⁾。

$$(\bar{A} + \bar{B}\tilde{G}_c\bar{C})\bar{P}_{cl} + \bar{P}_{cl}(\bar{A} + \bar{B}\tilde{G}_c\bar{C})^T < 0 \quad (\text{A60})$$

ただし、 $\bar{B}$, $\bar{C}$ は以下で定義される。

$$\bar{B} := \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{n_c} \end{bmatrix}, \quad \bar{C} := \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_{n_c} \end{bmatrix} \quad (\text{A61})$$

ここで、 P_g , R を使って U_f , U_g を次のように定義する。

$$U_f := R^{-T} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-n_c} \end{bmatrix}, \quad U_g := -P_g^{-1}R^{-T} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-n_c} \end{bmatrix} \quad (\text{A62})$$

このとき、(A55) 式、 $\text{rank} [U_f^T \ U_g^T]^T = n - n_c$ であるから、(A52) 式が成立する。また、

$$\tilde{G}_c = \begin{bmatrix} X_D & X_C \\ X_B & X_A \end{bmatrix}, \quad X_D \in \mathbf{R}^{m \times p} \quad (\text{A63})$$

とすると、

$$\begin{aligned} 0 &> U_f^T [I_n \ 0] ((\text{A60}) \text{式左辺}) \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} U_f \\ &= -((\text{A53}) \text{式左辺}) \end{aligned} \quad (\text{A64})$$

であるので $-((\text{A53}) \text{式左辺}) < 0$ となっている。

[$\mathcal{S} \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{P} \neq \emptyset$]

次をみたす正則な $R \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbf{R}^{n_c \times n_c}$, $V \in \mathbf{R}^{(n-n_c) \times (n-n_c)}$ が存在する。

$$P_f - P_g^{-1} = R \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^T \quad (\text{A65})$$

$$U_f = R^{-T} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-n_c} \end{bmatrix} V, \quad U_g = P_g^{-1}U_f \quad (\text{A66})$$

(16), (A53) 式はそれぞれ次式と等価である。

$$B^+ (-AP_f - BX_D CP_f + (-AP_f - BX_D CP_f)^T) B^{+T} > 0 \quad (\text{A67})$$

$$U_f^T (-AP_f - BX_D CP_f + (-AP_f - BX_D CP_f)^T) U_f > 0 \quad (\text{A68})$$

このとき、次をみたす $X_c \in \mathbf{R}^{m \times n_c}$ が存在する。

$$Q_f := -(AP_f + BM_f) - (AP_f + BM_f)^T > 0 \quad (\text{A69})$$

ただし、 M_f は次式で定義される。

$$M_f := X_D CP_f + X_c [Z \ 0] R^T \quad (\text{A70})$$

また、(17), (A53) 式はそれぞれ次式と等価である。

$$\begin{aligned} C^{T+} (-A^T P_g - C^T X_D^T B^T P_g \\ + (-A^T P_g - C^T X_D^T B^T P_g)^T) C^{T+T} > 0 \end{aligned} \quad (\text{A71})$$

$$\begin{aligned} U_g^T (-A^T P_g - C^T X_D^T B^T P_g \\ + (-A^T P_g - C^T X_D^T B^T P_g)^T) U_g > 0 \end{aligned} \quad (\text{A72})$$

同様に、次をみたす $X_b \in \mathbf{R}^{n_c \times p}$ が存在する。

$$Q_g := -(A^T P_g + C^T M_g) - (A^T P_g + C^T M_g)^T > 0 \quad (\text{A73})$$

ただし、 M_g は次式で定義される。

$$M_g := X_D^T B^T P_g - X_b^T [I_{n_c} \ 0] R^T P_g \quad (\text{A74})$$

最後に、次の L を選ぶと $(P_f, P_g, M_f, M_g, L, X_D) \in \mathcal{P}$ となっている⁸⁾。

$$L = -Q_f U_f (U_f^T Q_f U_f)^{-1} U_g^T Q_g \quad (\text{A75})$$

この L を選ぶと、 $U_g^T Q_g U_g = U_f^T Q_f U_f$ (正則) より、

$$\begin{bmatrix} Q_f & L \\ L^T & Q_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_f \\ U_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A76})$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} Q_f & L \\ L^T & Q_g \end{bmatrix} \\ &= n + \text{rank} (Q_f - L Q_g^{-1} L^T) \\ &= n + \text{rank} (Q_f - Q_f U_f (U_f^T Q_f U_f)^{-1} U_f^T Q_f) \\ &= n + \text{rank} (I_n - U_f (U_f^T Q_f U_f)^{-1} U_f^T Q_f) \end{aligned} \quad (\text{A77})$$

となる。ここで、

$$\tau = U_f (U_f^T Q_f U_f)^{-1} U_f^T Q_f \quad (\text{A78})$$

とおくと、

$$\tau = \tau^2 \quad (\text{A79})$$

が成り立つ (射影)。ここで、

$$\begin{aligned} \text{rank } \tau &= \text{rank } U_f (U_f^T Q_f U_f)^{-1} U_f^T Q_f \\ &= \text{rank } U_f (U_f^T Q_f U_f)^{-1} U_f^T \\ &= n - n_c \end{aligned} \quad (\text{A80})$$

であるので、

$$\text{rank} (I_n - \tau) = n_c \quad (\text{A81})$$

となる。よって、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} Q_f & L \\ L^T & Q_g \end{bmatrix} = n + n_c \quad (\text{A82})$$

が成り立つ。ここで、(A52), (A76) 式より、

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_{cl} \\ \hat{Q}_{cl} \\ \hat{M}_{cl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_f \\ U_g \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A83})$$

であるので、(6) 式が成立する。つぎに、

$$\Psi = Q_f^{1/2} U_f (U_f^T Q_f U_f)^{-1} U_g^T Q_g^{1/2} \quad (\text{A84})$$

とおくと、 $L = -Q_f^{1/2} \Psi Q_g^{1/2}$ である。また、 $U_g^T Q_g U_g = U_f^T Q_f U_f$ より $\Psi^T \Psi \leq I$ がいえるので次式が成立する。

$$\hat{Q}_{cl} = \begin{bmatrix} Q_f & L \\ L^T & Q_g \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{A85})$$

付録3 定理3 (H^2 補償器) の証明

[必要条件] (27) ~ (29) 式が成立すると仮定すると

(A5) 式において P_{12} が列フルランクとなるような $P_{cl} > 0$ が必ず選べる. 以後は, 安定化補償器と同様にパラメータを定義することによって容易に証明できる.

【十分条件】 安定化補償器の場合と同様に証明できる.

付録4 補題

【補題 A】 次を仮定する.

$$\text{span } W_1 + \text{span } W_2 = \mathbf{R}^n \quad (\text{A86})$$

$$\ker Q = \text{span } W_2 \quad (\text{A87})$$

$$Q \geq 0 \quad (\text{A88})$$

$$W_1 \in \mathbf{R}^{n \times k}, \quad W_2 \in \mathbf{R}^{n \times (n-k)}$$

$$Q \in \mathbf{R}^{n \times n}, \quad 0 < k < n$$

このとき, 次が成立する.

$$W_1^T Q W_1 > 0 \quad (\text{A89})$$

(証明) 条件がみたされるとき, 次式が成立する.

$$k = \text{rank } Q = \text{rank } Q W_1 \quad (\text{A90})$$

$Q \geq 0$ により, $Q^{1/2} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ が存在して $Q = Q^{1/2T} Q^{1/2}$ が成立する. よって,

$$\begin{aligned} k &= \text{rank } Q W_1 = \text{rank } (Q^{1/2T} Q^{1/2} W_1) \\ &\leq \text{rank } (Q^{1/2} W_1) \leq \text{rank } W_1 = k \end{aligned} \quad (\text{A91})$$

を得る. よって $\text{rank } (Q^{1/2} W_1) = k$ となり $Q^{1/2} W_1$ は列フルランクとなるから, 次式が得られる.

$$W_1^T Q W_1 = W_1^T Q^{1/2T} Q^{1/2} W_1 > 0 \quad (\text{A92})$$