論文

周波数応答に基づいたロバスト制御のためのシステム同定*

杉江 俊治**・田内 豊**

System Identification for Robust Control Based on Frequency Response*

Toshiharu SUGIE** and Yutaka TANAI**

This paper is concerned with system identification for robust control in the frequency domain. We propose a new method for identification of both the nominal plant model and its additive uncertainty bound. The method produces the model that minimizes the L^∞ norm of the modeling error using the set-membership method. A numerical example is given to demonstrate the validity of the proposed identification method.

1. はじめに

近年の H^∞ 制御をはじめとするロバスト制御理論の発展により、制御系の設計に際してモデルに不確かさを考慮することが可能になった。そのため、不確かさを考慮したモデリングが重要になり、システム同定の分野においても、実験データから同定対象の公称値を求めるだけでなく、不確かさを定量化する研究が盛んに行われるようになった。

ところで、モデルの不確かさを定量化するためには、まず不確かさの表現法を考えなくてはならない。現在様々な表現方法が使われているが、例えば Goodwin¹⁾ らは不確かさを確率的なものとしてとらえる方法を紹介している。また、ロバスト制御では加法的な不確かさ

$$G(s) = G_0(s) + \Delta(s) W(s) \quad (1)$$

や乗法的な不確かさ

$$G(s) = G_0(s) (1 + \Delta(s) W(s)) \quad (2)$$

などがよく用いられている。ただし、 G_0 は公称モデル、 $W(s)$ は不確かさの周波数に依存した上限、 $\Delta(s)$ はノルムの上限が与えられるノンパラメトリックな不確かさである。

そして、こうした不確かさの表現法をもとにした同定法が、時間領域と周波数領域双方について議論されてい

る。とくに、(1)、(2) 式の不確かさを持つシステムについては、Kosut²⁾ らや Younce³⁾ らがセットメンバシップ同定法により、 G_0 のパラメータの存在領域を導き出す方法を提案している。さらに Zhou⁴⁾ らは補間問題を用いて、 G_0 を凸計画問題により求める方法を紹介している。しかし、これらの方法は G_0 の極や、(1)、(2) 式の $W(s)$ の項などの多くの事前情報を必要としている。

そこで本論文では、周波数応答をもとにして、ロバスト制御に適した (1) 式の加法的な不確かさを持つシステムを同定する手法を提案する。このとき、 $W(s)$ などの事前情報を利用することなく、モデルを導出する方法を考える。具体的には、セットメンバシップ同定法を利用し、 L^∞ ノルムを評価関数として $G_0(s)$ と $W(s)$ を求める方法を与える。さらに非線形計画法の数値解法を用いた数値例により、最小 2 乗法との比較を含め、本手法の有効性を検証する。

本論文で扱うシステムは、1 入力 1 出力の線形時不変システムであり、伝達関数 $G(s)$ の L^∞ ノルムを次で定義しておく。

$$\|G(s)\|_\infty := \sup_{\omega} |G(j\omega)| \quad (3)$$

2. 問題設定

まず問題設定を行う。従来の周波数応答データをもとにしてパラメトリックな伝達関数を同定する方法が参考文献 5) にまとめられているが、従来法はすべて最小 2 乗法によるものである。ところが、ロバスト制御のためのモデルとしては、 L^∞ ノルムを評価したほうが適切で

* 原稿受付 1995 年 2 月 16 日

** 京都大学 工学部 Faculty of Engineering, Kyoto University; Gokanoshio, Uji city, Kyoto 611, JAPAN

Key Words: system identification, robust control, frequency response, set-membership identification, additive uncertainty.

あると思われる。そこで、次のような問題を考える。

まず、同定すべきプラントの伝達関数を次の加法的不確かさを持つ形で表現する。

$$G(s) = G_\theta(s) + \Delta(s) W_\eta(s) \quad (4)$$

ただし、

$$G_\theta(s) = \frac{B_\theta(s)}{A_\theta(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n}{1 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \quad (5)$$

$$\theta = [a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n]^T \quad (6)$$

$$W_\eta(s) = \frac{E_\eta(s)}{F_\eta(s)} = \frac{e_0 + e_1 s + \dots + e_m s^m}{1 + f_1 s + \dots + f_m s^m} \quad (7)$$

$$\eta = [f_1, \dots, f_m, e_0, e_1, \dots, e_m]^T \quad (8)$$

$$\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1 \quad (9)$$

である。

このとき、同定実験により得られた N 個の周波数応答データ

$$G(j\omega_k), \quad 1 \leq k \leq N \quad (10)$$

に適合し、評価関数

$$J = \|W_0(s)(G(s) - G_\theta(s))\|_\infty \quad (11)$$

を最小にするパラメータ θ と、(9) 式を満足し

$$J_\eta = \|W_1(s)\{W_\eta(s) - (G(s) - G_\theta(s))\}\|_\infty \quad (12)$$

を最小にする η を求めよ。ただし、 $W_0(s)$, $W_1(s)$ は事前に与えられる周波数重みである。

(注意1) 本論文ではノイズなどの影響は考慮していない。しかし、現実のプラントでは、元来の非線形性などのため、一般に高次のモデルでもモデル化誤差は不可避免であり、一方、制御系設計には次数の低い公称モデル G_θ が必要である。このため、本問題の定式化では不確かさの上限 W_η でモデル化誤差を吸収する立場にたっており、周波数応答にデータ誤差が存在しない問題設定でも、実用上の意味は十分にあると思われる。

なお、いったん G_θ と W_η が求まれば、仮に各周波数において $|d(j\omega)|$ の大きさのノイズが含まれていた場合でも、たとえば $W_\eta(j\omega)$ のゲインが $[G - G_\theta + d](j\omega)$ のゲインより大きければ、(4) 式のモデルは妥当性を失わない。

(注意2) 評価関数 J_η については、詳しくは 3.2 で説明するが、簡単に言えば、不確かさの上界をできるだけ実際の不確かさに近づけるためのものである。設計の観点からすれば保守的でない上界 W_η を求めることは非常に重要な同定問題である。

3. モデルの同定

ここでは、2. の問題設定のもとで、周波数応答より (4) 式のモデルを求める手法を与える。

3.1 公称モデルの同定

まず、公称モデル G_θ を評価関数 J のもとで求めることを考える。ここでは、Kosut²⁾らのセットメンバシップ同定法によるパラメータ θ の同定法を利用する。ただし、Kosut らの方法は、同定実験により得られた時間応答データを用いて、それに適合するパラメータ θ の存在領域を求めることを目的としている。しかし、ここで提案する手法は、評価関数 J を最小にする単一のパラメータを求めるためにセットメンバシップ同定法を利用している。以下でその様子を詳しく説明する。

ある値 γ が与えられているとし、次の集合を定義する。

$$\Theta_\gamma^* = \{\theta : \|W_0(s)(G(s) - G_\theta(s))\|_\infty \leq \gamma\} \quad (13)$$

この集合をデータより求めるために、次の集合を定義する。

$$\begin{aligned} \Theta_{\gamma,k} &= \{\theta : |G(j\omega_k)A_\theta(j\omega_k) - B_\theta(j\omega_k)|^2 \\ &\leq \gamma^2 |W_0^{-1}(j\omega_k)A_\theta(j\omega_k)|^2\}, \quad (14) \\ k &= 1, \dots, N \end{aligned}$$

$$\Theta_\gamma[N] = \bigcap_{k=1}^N \Theta_{\gamma,k} \quad (15)$$

このとき L^∞ ノルムの定義から、明らかに

$$\Theta_\gamma^* \subset \Theta_\gamma[N] \subset \Theta_{\gamma,k} \quad (16)$$

が成り立つ。

実際に周波数応答データから $\Theta_{\gamma,k}$ を求めるには、 $\Theta_{\gamma,k}$ を次の2次形式に書き換える。

$$\Theta_{\gamma,k} = \{\theta : \theta^T \Gamma_k \theta + 2\beta_k^T \theta + \alpha_k \leq 0\} \quad (17)$$

$$\alpha_k = |G(j\omega_k)|^2 - \gamma^2 |W_0^{-1}(j\omega_k)|^2 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \beta_k &= \Re[\alpha_k j\omega_k, \alpha_k (j\omega_k)^2, \dots, \alpha_k (j\omega_k)^n, -g, \\ &\quad -g(-j\omega_k), \dots, -g(-j\omega_k)^n]^T \quad (19) \end{aligned}$$

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} \alpha_k \Gamma_A & \Gamma_B \\ \Gamma_B^T & \Gamma_C \end{bmatrix} \quad (20)$$

ただし、

$$g = G(j\omega_k) \quad (21)$$

$$\Gamma_A = \Re \left(\begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \dots & s_{1,n} \\ s_{1,2} & s_{2,2} & \dots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1,n} & s_{2,n} & \dots & s_{n,n} \end{bmatrix} \right) \quad (22)$$

$$\Gamma_B = -\Re \left(g \times \begin{bmatrix} s_{1,0} & s_{1,1} & s_{1,2} & \dots & s_{1,n} \\ s_{2,0} & s_{2,1} & s_{2,2} & \dots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,0} & s_{n,1} & s_{n,2} & \dots & s_{n,n} \end{bmatrix} \right) \quad (23)$$

$$\Gamma_C = \Re \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{0,0} & s_{0,1} & \cdots & s_{0,n} \\ s_{1,0} & s_{1,1} & \cdots & s_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,0} & s_{n,1} & \cdots & s_{n,n} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$s_{p,q} = j^p (-j)^q (\omega_k)^{p+q} \quad (25)$$

とおいた。ここで、 $\Re$ は実数部をとることを意味する。また、この式を求める過程については付録を参照されたい。

以上の関係を用いれば周波数応答より、パラメータ領域 $\Theta_{\gamma,k}$ を 2 次形式で表現できる。また、 $\Theta_{\gamma}[N]$ が空集合にならない程度まで γ を最小化すれば、評価関数 J を最小にするパラメータ θ を求めることができる。つぎに、以上で述べてきたことをもとにして、二分法によるパラメータ θ を求める手順を示す。

Step 1 適当な初期値 θ_0 と $\gamma_{\min}, \gamma_{\max}$ を選ぶ。ただし、 $\gamma_{\min}$ は $\Theta_{\gamma_{\min}}[N]$ が空集合となるように、 $\gamma_{\max}$ は $\theta \in \Theta_{\gamma_{\max}}[N]$ が存在するようにとる。

Step 2 $(\gamma_{\max} - \gamma_{\min})$ が望みの精度以下ならば終了。そうでなければ、 $\gamma = (\gamma_{\min} + \gamma_{\max})/2$ とおく。そして、 $\Theta_{\gamma,k}$, $k = 1, \dots, N$ を制約条件とし、 θ_0 を初期値として、制約付き非線形計画法の数値解法を用いて $\theta \in \Theta_{\gamma}[N]$ を求める。

Step 3 $\theta \in \Theta_{\gamma}[N]$ が得られた場合には $\gamma_{\max} = \gamma$, 得られなかった場合には $\gamma_{\min} = \gamma$ とし、Step 2 に戻る。

3.2 不確かさの同定

パラメータ θ が求められたとして、次に $W_{\eta}(s)$ を決定することを考える。

まず、準備として伝達関数 $H(s)$ を

$$H(s) = G(s) - G_{\theta}(s) \quad (26)$$

とおく。この関係のもとで、 $H(s)$ の周波数応答は実験により得られた周波数応答データと θ をもとにして、

$$H(j\omega_k) = G(j\omega_k) - G_{\theta}(j\omega_k) \quad (27)$$

として求める。以下ではこのデータをもとにして $W_{\eta}(s)$ を同定することを考える。

(4), (9) 式から $W_{\eta}(s)$ は次の条件を満たさなくてはならない。

$$\|H(s)W_{\eta}^{-1}(s)\|_{\infty} \leq 1 \quad (28)$$

この条件を満足する $W_{\eta}(s)$ のパラメータ η の領域を次で表わす。

$$\mathcal{S}^* = \{\eta : \|H(s)W_{\eta}^{-1}(s)\|_{\infty} \leq 1\} \quad (29)$$

この領域を求めるために 3.1 と同様に次を定義する。

$$\mathcal{S}_k = \{\eta : |H(j\omega_k)F_{\eta}(j\omega_k)|^2 \leq |E_{\eta}(j\omega_k)|^2\} \quad (30)$$

$$\mathcal{S}[N] = \bigcap_{k=1}^N \mathcal{S}_k \quad (31)$$

また、 $\mathcal{S}_k$ は 2 次形式で表わすと次のようになる。

$$\mathcal{S}_k = \{\eta : \eta^T P_k \eta + 2 b_k^T \eta + 1 \leq 0\} \quad (32)$$

$$P_k = \begin{bmatrix} \Gamma_A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{|H(j\omega_k)|^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_C \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$b_k = \Re[j\omega_k, \dots, (j\omega_k)^n, 0, \dots, 0]^T \quad (34)$$

以上を用いて領域 $\mathcal{S}_k, \mathcal{S}[N]$ を求めることができる。ただし、ここで得られるパラメータ領域は (28) 式を満足するものであり、必要以上にゲインの大きな $W_{\eta}(s)$ も含んでしまう。しかし、 $W_{\eta}(s)$ は H^{∞} 制御に適用することを考えると、できるだけゲインの小さなものが望ましい。 $W_{\eta}(s)$ を (28) 式の条件を満足しながらできるだけゲインの小さなものにする一つの方法は、領域 $\mathcal{S}[N]$ の $W_{\eta}(s)$ の中で $H(s)$ に最も近いものを選ぶことであろう。そこで、(28) 式の条件のもとで、次の評価関数を最小にする η を求めることを考える。

$$J_{\eta} = \|W_1(s)(W_{\eta}(s) - H(s))\|_{\infty} \quad (35)$$

ただし、 $W_1(s)$ は周波数重みである。また、この評価は $H(s)$ の周波数応答データが与えられていることから、領域

$$\mathcal{R}_{\rho} = \{\eta : \|W_1(s)(H(s) - W_{\eta}(s))\|_{\infty} \leq \rho\} \quad (36)$$

を 3.1 の θ を求める方法をそのまま利用して求めることができる。また、 ρ を最小化するにあたっては、次で定義される領域

$$\mathcal{R}_{\rho,k} = \{\eta : |H(j\omega_k)F_{\eta}(j\omega_k) - E_{\eta}(j\omega_k)|^2 \leq \rho^2 |W_1(j\omega_k)F_{\eta}(j\omega_k)|^2\} \quad (37)$$

$$\mathcal{R}_{\rho}[N] = \bigcap_{k=1}^N \mathcal{R}_{\rho,k} \quad (38)$$

の存在性を調べると共に、領域

$$\mathcal{S}[N] \cap \mathcal{R}_{\rho}[N] \quad (39)$$

の存在性も調べる必要がある。

以上のことを用いて、 η を求める。手順としては θ を求める手順とほぼ同じである。異なる点は、Step 2 の非線形計画法を用いる段階で、制約条件 $\mathcal{S}_k, k = 1, \dots, N$ が新たに加わることである。

4. 数値例と考察

ここでは、以上で述べてきたことを例題で示す。まず、準備として、従来から行われている最小 2 乗法による方法を述べておく。

4.1 最小2乗法による伝達関数の同定

周波数応答からパラメトリックな伝達関数を求めるために、従来は最小2乗評価

$$\sum_{k=1}^N |W_0(j\omega_k)|^2 \left| G(j\omega_k) - \frac{B_\theta(j\omega_k)}{A_\theta(j\omega_k)} \right|^2 \quad (40)$$

が評価関数として用いられてきた⁵⁾。ただし、このままではこの評価関数はパラメータ θ に対して非線形であるために、簡単に解を得ることができない。そこで様々な工夫がなされている。たとえば、最も簡単な方法は、評価関数を

$$\sum_{k=1}^N |W_0(j\omega_k)|^2 |G(j\omega_k) A_\theta(j\omega_k) - B_\theta(j\omega_k)|^2 \quad (41)$$

とすることにより、パラメータ θ に対して線形にして求める方法である。ただし、これは上式を変形すると

$$\sum_{k=1}^N |W_0(j\omega_k)|^2 |A_\theta(j\omega_k)|^2 \left| G(j\omega_k) - \frac{B_\theta(j\omega_k)}{A_\theta(j\omega_k)} \right|^2 \quad (42)$$

となることから分かるように、重み $|A_\theta(j\omega_k)|^2$ がかかってしまうことに注意する必要がある。

4.2 数値例

つぎに、数値例を示す。真のプラントとして次式の8次のモデルが得られているとする。

$$G_T(s) = \frac{1}{s^2 + 0.6s + 1} + 0.05 \prod_{i=1}^3 \frac{\omega_i^2}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2} \quad (43)$$

ただし、 $\omega_1 = 2.0$, $\omega_2 = 4.5$, $\omega_3 = 6.0$, $\zeta_1 = 0.07$, $\zeta_2 = 0.05$, $\zeta_3 = 0.03$ である。公称モデルを2次系かつ厳密にプロパーなものとして次の形式で求める。

$$G_\theta(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{1 + a_1 s + a_2 s^2} \quad (44)$$

また、重み関数は $W_0(s) = 1$ とする。まず、 $G_T(s)$ の周波数応答データを、 10^{-2} から 10^2 の間を対数グラフ上で等間隔に100等分した周波数点 ω_k , ($k = 1, \dots, 100$) において与えた。このデータを用いて、最初に(41)式の最小2乗法を用いて公称モデルを求めた。

$$G_{LS}(s) = \frac{0.743}{1 + 0.369s + 0.424s^2} \quad (45)$$

また、提案する手法を用いた場合は、

$$G_\infty(s) = \frac{1.198 + 0.432s}{1 + 0.708s + 1.124s^2} \quad (46)$$

が得られた。ここで、 θ を求めるために、非線形計画法の制約付き最適化手法の一つである逐次2次計画法⁶⁾を用いた。ただし、非線形計画法の初期値としては(41)式の最小2乗法により得られた値を用いている。また、

このとき $\gamma = 0.32$ であった。以上のそれぞれのゲイン線図を Fig. 1 に示す。+ がデータとして与えた周波数応答、実線が提案手法、点線が最小2乗法により求めたモデルである。さらに、Fig. 2 に $G_T(s) - G_{LS}(s)$ (---) と $G_T(s) - G_\infty(s)$ (—) のゲイン線図を示す。モデル化誤差の最大値が最小2乗法のときより小さくなっているのがわかる。

つぎに、以上で求めた θ を用いて、 $W_\eta(s)$ を求める。 $W_\eta(s)$ の構造は2次の形

$$W(s) = \frac{e_0 + e_1 s}{1 + f_1 s + f_2 s^2} \quad (47)$$

とした。また、重み関数は $W_1(s) = 1$ とする。

公称モデルのときと同様に逐次2次計画法によりパラメータ η を求めた。

$$W(s) = \frac{-0.148 - 0.929s}{1 + 2.616s + 0.089s^2} \quad (48)$$

このとき、 $\rho = 0.53$ である。また $W_\eta(s)$, $H(s)$ のゲイン線図を Fig. 3 に示す。+ がデータとして与えた応答、実線(—)が $W_\eta(s)$ 破線(---)が $H(s)$ である。 $W_\eta(s)$ が $H(s)$ の上界となっているのがわかる。

Fig. 1 Gain plots of G_T , G_{LS} and G_∞ .

Fig. 2 Gain plots of $(G_T - G_{LS})$ and $(G_T - G_\infty)$.

 Fig. 3 Gain plots of $(G_T - G_\infty)$ and W_η

5. おわりに

本論文では、周波数応答よりロバスト制御に適した加法的不確かさを持つシステムを同定する一手法を提案した。具体的には、与えられた周波数応答に適合する伝達関数を、セットメンバシップ同定法を利用し、 L^∞ ノルムを評価関数として求める手法を与えた。そして、非線形計画法の数値解法を用いた数値例により本手法の有効性を示した。

本手法は制約として与えられる不等式が、凸でないものも含むので、非線形計画法を用いる必要がある。そのため、基本的に局所解しか得られない。このようなとき、良い解を得るためには初期値が重要になるが、いくつかの例題について検討したところ、今回のように最小2乗法により求めた解を初期値とした場合は、良好な結果が得られている。

参 考 文 献

- 1) G. C. Goodwin, M. Gevers and B. Ninness : Quantifying the Error in Estimated Transfer Function with Application to Model Order Selection ; IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-37, No. 7, pp. 913~928 (1992)
- 2) R. L. Kosut, M. K. Lau and S. P. Boyd : Set-Membership Identification of Systems with Parametric and Non-parametric Uncertainty ; IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-37, No. 7, pp. 929~941 (1992)
- 3) R. C. Yoonce and C. E. Rohrs : Identification with Non-parametric Uncertainty ; IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-37, No. 6, pp. 715~728 (1992)
- 4) T. Zhou and H. Kimura : Time Domain Identification for Robust Control ; Systems and Control Letters, Vol. 20, No. 3, pp. 167~173 (1993)
- 5) R. Pintelon, P. Guillaume, Y. Rolain, J. Schoukens and H. Van hamme : Parametric Identification of Transfer Functions in Frequency Domain—a Survey ; IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-39, No. 11, pp. 2245~2260 (1994)
- 6) 茨木, 福島 : 最適化の手法, 情報数学講座 14, 共立出版 (1993)

付 録

2 次形式の導出

θ の定義より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} G(j\omega)A_\theta(j\omega) - B_\theta(j\omega) \\ = G(j\omega) \\ + [G(j\omega)j\omega, G(j\omega)(j\omega)^2, \dots, G(j\omega)(j\omega)^n, \\ -1, -j\omega, \dots, -(j\omega)^n]\theta \end{aligned} \quad (A1)$$

上式より,

$$\begin{aligned} |G(j\omega)A_\theta(j\omega) - B_\theta(j\omega)|^2 \\ = (G(j\omega)A_\theta(j\omega) - B_\theta(j\omega)) \\ \times (G(-j\omega)A_\theta(-j\omega) - B_\theta(-j\omega)) \\ = \theta^T \tilde{\Gamma} \theta + 2\beta^T \theta + |G(j\omega)|^2 \end{aligned} \quad (A2)$$

となる。ただし,

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} = [G(j\omega)j\omega, G(j\omega)(j\omega)^2, \dots, G(j\omega)(j\omega)^n, \\ -1, -j\omega, \dots, -(j\omega)^n]^T \\ \times [G(-j\omega)(-j\omega), G(-j\omega)(-j\omega)^2, \\ \dots, G(-j\omega)(-j\omega)^n, \\ -1, -(-j\omega), \dots, -(-j\omega)^n] \end{aligned}$$

である。しかし、このままでは $\tilde{\Gamma}$ は成分に複素数を持つ行列になってしまう。そこで、次のように対称成分同士を加える。 $\tilde{\Gamma}$ の p 行 q 列の成分を $\tilde{\Gamma}_{p,q}$ と表記すると、

・ $p, q \leq n$ のとき

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{p,q} + \tilde{\Gamma}_{q,p} &= |G(j\omega)|^2 (j\omega)^p (-j\omega)^q \\ &\quad + |G(j\omega)|^2 (j\omega)^q (-j\omega)^p \\ &= 2|G(j\omega)|^2 \Re\{j^p (-j)^q \omega^{p+q}\} \end{aligned} \quad (A3)$$

・ $p \leq n, q \geq n+1$ のとき

$$q_n = q - (n+1) \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{p,q} + \tilde{\Gamma}_{q,p} &= G(j\omega)(j\omega)^p (-j\omega)^{q_n} \\ &\quad + G(-j\omega)(j\omega)^{q_n} (-j\omega)^p \\ &= 2\Re\{G(j\omega) \times j^p (-j)^{q_n} \omega^{p+q_n}\} \end{aligned} \quad (A4)$$

となる。

・ $p, q \geq n+1$ のとき

$$p_n = p - (n+1), q_n = q - (n+1) \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{p,q} + \tilde{\Gamma}_{q,p} &= (j\omega)^{p_n} (-j\omega)^{q_n} + (j\omega)^{q_n} (-j\omega)^{p_n} \\ &= 2\Re\{j^{p_n} (-j)^{q_n} \omega^{p_n+q_n}\} \end{aligned} \quad (A5)$$

となる。

以上より Γ の p 行 q 列あるいは q 行 p 列を

$$\Gamma_{p,q} = \Gamma_{q,p} = \frac{1}{2} (\tilde{\Gamma}_{p,q} + \tilde{\Gamma}_{q,p}) \quad (A6)$$

とおく。さらに、 β は

$$\begin{aligned}
2\beta^T &= G(-j\omega)[G(j\omega)j\omega, G(j\omega)(j\omega)^2, \dots, \\
&\quad G(j\omega)(j\omega)^n, -1, -j\omega, \dots, -(j\omega)^n] \\
&\quad + G(j\omega)[G(-j\omega)(-j\omega), G(-j\omega)(-j\omega)^2, \dots, \\
&\quad G(-j\omega)(-j\omega)^n, -1, -(-j\omega), \dots, -(-j\omega)^n] \\
&= \Re[|G(j\omega)|^2 j\omega_k, |G(j\omega)|^2 (j\omega_k)^2, \dots, \\
&\quad |G(j\omega)|^2 (j\omega_k)^n, -G(j\omega), -G(j\omega)(-j\omega_k), \dots, \\
&\quad -G(j\omega)(-j\omega_k)^n] \quad (A7)
\end{aligned}$$

とかけ、また、右辺の $|W_0^{-1}(j\omega)A_\theta(j\omega)|^2$ においても同様の手順により θ における2次形式を導出し、(14)式に代入することにより(17)式が得られる。

いくつかのパラメータを固定させたい場合、たとえば、伝達関数に積分特性を持たせたい場合などは、(A1)式を導出するときに、固定したいパラメータに値を導入しておけばよい。たとえば、 a_k を既知のパラメータとしたとき、

$$\begin{aligned}
&G(j\omega)A_\theta(j\omega) - B_\theta(j\omega) \\
&= G(j\omega) + a_k(j\omega)^k \\
&\quad + [G(j\omega)j\omega, G(j\omega)(j\omega)^2, \dots, G(j\omega)(j\omega)^{k-1}, \\
&\quad G(j\omega)(j\omega)^{k+1}, \dots, G(j\omega)(j\omega)^n, \\
&\quad -1, -j\omega, \dots, -(j\omega)^n]\theta \quad (A8)
\end{aligned}$$

$$\theta = [a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n] \quad (A9)$$

などとして、後は同様な計算をして求めた2次形式を用いればよい。