プロダクト近似法を用いた任意の通過域角度をもつ 2次元 FIR ファンフィルタの設計*

朱 介眉**・高木 隆輔**・浜田 望**

Design of 2-D FIR Fan Filters with Arbitrary Pass-Angles Using Product Approximation*

Jiemei ZHU**, Ryusuke TAKAGI** and Nozomu HAMADA**

1. ま え が き

2次元デジタルフィルタの中ではファンフィルタは重要な役割を果たしており, 広い分野での利用がされている¹⁾. その設計法の研究も盛んに行われている^{2)~6)}.

本速報は様々な通過域角度を持つ2次元 FIR ファンフィルタ特性の近似にプロダクト近似法が有効に利用できることを示すものである. ここに言うプロダクト近似法はハイブリッド領域を用いて2段階の1次元フィルタ近似を行う方法であり, 1次元フィルタ近似にチェビシェフ近似を採用したものはプロダクトチェビシェフ近似と呼ばれている⁵⁾. 通常, 地震波や線状に配置されるセンサレイへの平面波が到来する場合, ファンフィルタを用いて, これらの受信信号を到来方向により選択することができる. そのとき, ファンフィルタの通過域角度によって, どれだけの広がりをもつ到来波方向を受信するか変えることができる. よって, ファンフィルタの特性においては, 通過域角度 (Fig. 1 (e)) は重要である. ファンフィルタの設計において様々な通過域角度を持つフィルタを設計するとき, 個々の通過域角度に対して最適近似を行うにはかなりの手間を要する. しかし, プロダクト近似ではその適用に工夫を施すことで任意の通過域角度に対する近似結果を容易に得ることができる.

2. 近似法

以下にプロダクト近似法を利用する本方法の全体の流れを示す.

* 原稿受付 1995年6月5日

** 慶應義塾大学 理工学部 Faculty of Science and Technology, Keio University; 3-14-1, Hiyoshi, Kohoku ward, Yokohama city, Kanagawa 223, JAPAN

Key Words: FIR filter, fan filters, variable filters, product Chebyshev approximation, linear programming.

2.1 第1段階近似

90°の通過域角度を持つファンフィルタの所望特性 (Fig. 1 (a))

$$D(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1, & |\omega_1| > |\omega_2|, \\ 0, & \text{その他}, \end{cases} \quad -\pi \leq \omega_1, \omega_2 \leq \pi \quad (1)$$

に対し一つの変数 (ここでは一般性を失うことなく, これを ω_2 とする) ω_2 に関する近似 (零位相とする)

$$\sum_{n_2=0}^{N_2} \mathcal{F}(\omega_1, n_2) \cos \omega_2 n_2 \approx D(\omega_1, \omega_2) \quad (2)$$

を行う. ここに $\mathcal{F}(\omega_1, n_2)$ はハイブリッド領域 (ω_1, n_2) における特性と呼ばれる. しかし, すべての $\omega_1 (|\omega_1| < \pi)$ について上記の近似問題を解くわけにはいかないの, 実際には次の方法を採用する.

段階1 a ω_1 を $[0, \pi]$ 内の M 個の点 $\omega_{1k} (k=1 \sim M)$ に固定し, そこでの各所望特性 $D(\omega_{1k}, n_2)$ に関する1次元近似

$$\sum_{n_2=0}^{N_2} F(\omega_{1k}, n_2) \cos \omega_2 n_2 \approx D(\omega_{1k}, \omega_2) \quad (3)$$

を行う. この近似問題は (1) 式の特性より, いずれの ω_{1k} においてもカットオフ周波数が $\omega_2 = \omega_{1k}$ である理想ローパスフィルタの近似となる.

段階1 b 各 n_2 において, 上記近似結果 $F(\omega_{1k}, n_2)$ から補間法によりすべての ω_1 の連続関数 $\mathcal{F}(\omega_1, n_2)$ を求める. これを (2) 式左辺 $\mathcal{F}(\omega_1, n_2)$ の近似とする (Fig. 1 (b)).

2.2 第2段階近似

段階2 a まず, 最初にフィルタの通過域角度の変更を行う. 所望通過域角度を $2\theta (\leq 90^\circ)$ とするとき, 90° ファンフィルタに対する通過域角度の広がり係数

$$\alpha = \tan(\theta) \quad (4)$$

Fig. 1 Flow diagram of the design method

を定義する. $\mathcal{F}(\omega_1, n_2)$ の ω_1 に対するスケール変換 $\omega_1 = \alpha\Omega_1$ を行うことで, 通過域角度 2θ ファンフィルタのハイブリッド領域近似

$$\mathcal{G}(\Omega_1, n_2) = \mathcal{F}(\omega_1, n_2)|_{\omega_1 = \alpha\Omega_1} \quad (5)$$

が与えられる (Fig. 1 (c)).

段階 2 b 各 n_2 に対して $\mathcal{G}(\Omega_1, n_2)$ を所望特性とする誤差

$$E = \|\mathcal{G}(\Omega_1, n_2) - \hat{\mathcal{G}}(\Omega_1, n_2)\|_{\infty}, \quad \Omega_1 \in [-\pi, \pi] \quad (6)$$

を最小とするように 1 次元近似

$$\hat{\mathcal{G}}(\Omega_1, n_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1} a(n_1, n_2) \cos \Omega_1 n_1 \approx \mathcal{G}(\Omega_1, n_2) \quad (7)$$

を行う. そうすると, 零位相 FIR フィルタの係数 $a(n_1, n_2)$ が得られる (Fig. 1 (d)).

段階 2 c これからフィルタのインパルス応答 $h(n_1, n_2)$ は次式より計算される.

$$h(n_1, n_2) = \begin{cases} a(n_1, n_2), & n_1 = 0, n_2 = 0 \\ \frac{1}{2} a(n_1, n_2), & n_1 = 0, n_2 \neq 0 \\ \frac{1}{2} a(n_1, n_2), & n_1 \neq 0, n_2 = 0 \\ \frac{1}{4} a(n_1, n_2), & n_1 \neq 0, n_2 \neq 0 \end{cases} \quad (8)$$

この結果から, 近似した通過域角度 2θ のファンフィルタ (Fig. 1 (e)) の周波数応答

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=-N_1}^{N_1} \sum_{n_2=-N_2}^{N_2} h(n_1, n_2) e^{-j\omega_1 n_1} e^{-j\omega_2 n_2} \quad (9)$$

が与えられる.

この方法の有利な点は, 2.1 の第 1 段階近似は θ の値に関係なく行われるので, 異なる θ を持つファンフィルタの近似に対しては 2.2 の第 2 段階近似のみを行えばよいということである. よって, 結局 1 次元フィルタ近似 (段階 2 b) を各 n_2 に対して, すなわち N_2 回行うことに帰着される.

上記の近似法は本速報で提案した方法の原理を示したもので, 実際に (2), (3) および (7) 式の近似を具体的にどのアルゴリズムで解くかについては以下に述べる.

・1 次元近似問題 (段階 1 a, 段階 2 b)

プロダクト法に限らずフィルタ近似ではチェビシェフ近似が一般によく用いられている. とくに, Parks-McClellan 法⁷⁾ が有利であり, 本研究でもこれを用いた. また, 通過域にリップル特性を持たせないように線形計画法⁸⁾ を利用した方法もあり, 結果を得ているが, ここでは紙数の関係上省略する. いずれを採用するかは設計者に委ねられている. また, いずれの近似法を適用する際にも, 明らかに所望特性 (Fig. 1 (a)) に対して過渡域を設定している.

・ハイブリッド領域での補間 (段階 1 b)

ω_{1k} の個数 M を大きくすれば補間式として何を採用するか特に注意する必要はないが, ここでは信号処理などでよく用いられている Cubic スプライン補間⁹⁾ を用いた. これは近似精度と計算量の両者において有利であるためである.

3. 設計例

2.1の第1段階近似で述べた段階1aにおいて、 ω_{1k} を区間 $[0, \pi]$ 内に $\pi/100$ の等間隔にとり ($M = 101$), Parks-McClellan 近似を用いた。また段階1bにおいて Cubic スプライン補間を行った結果である $\mathcal{F}(\omega_1, n_2)$ (フィルタのサイズを $2N_1 + 1 = 2N_2 + 1 = 31$ とする) を Fig. 2 に示す。ただし、 90° の通過域角度を持つファンフィルタでは ω_{1k} が π に近いとき、過渡域の設定を行う周波数域がなくなるので、通過域設定が可能である近似結果をそれ以上の ω_{1k} においてそのまま採用した。よって、 $\mathcal{F}(\omega_1, n_2)$ は Fig. 2 からわかるように $\omega_1 \approx \pi$ において一定値となっている。2.2の第2段階近似において、フィルタの所望通過域角度 2θ を 60° とするスケール変換後のハイブリッド領域近似 $\mathcal{Q}(\Omega_1, n_2)$ の結果を Fig. 3 に示す。段階1aと段階1bに Parks-McClellan 近似を用いたときの近似フィルタ特性は Fig. 4 に示すとおりである。

他の所望通過域角度に対しても、本手法が有効である。

Fig. 2 Approximated function of 90 degrees on hybrid domain

Fig. 3 2θ approximated function of scale transformation

Fig. 4 Approximated frequency response

4. あとがき

本速報では、任意の通過域角のファンフィルタをプロダクト近似法によって容易に求める方法を提案した。本手法は 90° のファンフィルタのプロトタイプハイブリッド領域での係数から任意の通過域角度のファンフィルタが1次元FIR近似法によって効率よく設計できるものである。

参考文献

- 1) 武部：デジタルフィルタの設計，東海大学出版会 (1986)
- 2) J. H. McClellan : The Design of Two Dimensional Digital Filters by Transformations ; Proc. 7th Ann. Princeton Conf. Inf. Sci. & Syst., pp. 247~251 (1973)
- 3) R. Ansari : Efficient IIR and FIR Fan Filters ; IEEE Trans. Circuits and System, Vol. CAS-34, No. 8, pp. 941~945 (1987)
- 4) M. P. Ekstrom, R. E. Twogood and J. W. Woods : Two-Dimensional Recursive Filter Design-Spectral Factorization Approach ; IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Process., Vol. ASSP-28, No. 1, pp. 16~26 (1980)
- 5) S. E. Weinstein : Approximations of Functions of Several Variables : Product Chebyshev Approximation, I ; J. Approx. Th., Vol. 2, No. 4, pp. 433~447 (1969)
- 6) 朱，浜田：ハイブリッド領域近似を利用する2次元フィルタの設計；電子情報通信学会論文誌 (A), Vol. 77-A, No. 4, pp. 607~615 (1994)
- 7) J. H. McClellan, T. W. Parks and L. R. Rabiner : A Computer Program for Designing Optimum FIR Linear Phase Digital Filters ; IEEE Trans. Audio and Electro-Acoustics, Vol. AU-21, No. 6, pp. 506~526 (1973)
- 8) K. Steiglitz : Optimal Design of FIR Digital Filters with Monotone Passband Response ; IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Process., Vol. ASSP-27, No. 6, pp. 643~649 (1979)
- 9) H. S. Hou and H. C. Andrews : Cubic Splines for Image Interpolation and Digital Filtering ; IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Process., Vol. ASSP-26, No. 6, pp. 508~517 (1978)