不規則データに埋もれた信号の遅延時間の最尤推定*

大住 晃**・談議 康晴***

Maximum Likelihood Time-Delay Estimation of Signals in Random Data*

Akira OHSUMI** and Yasuharu DANGI***

A fast method of Newton-Raphson-based algorithm is presented for maximum likelihood estimation of the time-delay as well as the attenuation parameter of received signals in observation data corrupted by white Gaussian noise. Based on the mathematical method described by an Itô stochastic differential equation for the noisy observation data, the likelihood-ratio function is derived instead of the usual likelihood function, and the Cramér-Rao lower bounds for the time-delay and attenuation estimates are evaluated in a modified form using the likelihood-ratio function to show the uncertainty relation between these two estimates. Unbiasedness of these two estimates are theoretically demonstrated. Simulation results that confirm the effectiveness of the proposed method are given.

1. 緒 言

近年交通制御や信号伝送に関連して、アクティブあるいは、パッシブに発信された信号の到達時間遅れの推定問題が重要となってきた。既知時刻に発信された信号が受信される際に到達時間遅れを生じ、しかもその信号が不規則雑音に埋もれているような場合には、その信号の遅延時間を受信データを眺めただけでは容易に知ることはできない。本論文では、不規則データに埋もれている既知波形信号の発信時刻からの到達時間遅れの推定問題(time delay estimation problem)を考察する。

本問題に関連した研究は、1981年にIEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processingに特集号¹⁾が組まれて以来、信号処理の一分野として急速に進展をみせ、種々の方法が開発されている。その多くの研究は、既知信号波形を参照信号としてこれと受信不規則データとの相関が最大となる時刻によって遅延時間を知るという方法に立脚しているが^{2), 3)}、この方法によれば膨大な

計算量を必要とする割には正確な遅延時間を決定することは期待できない。この方法に対して脚光を浴びつつあるのが最尤推定法である⁴⁾。最尤法は周知のように、推定値の不偏性や有効性、さらには推定誤差分散の下界値などの議論が可能となる理由から魅力ある手法である。この方法を用いた研究のほとんどは、尤度関数を導入する必然性から離散時間表現する数学モデルに立脚して議論を展開しているが、本論文では連続時間表現モデルに基づき尤度関数に代わって尤度比関数を用いた議論を展開する。

2. 問題の定式化

伝送(発信)信号を $s(t)$ とし、この信号が次のように観測されるとする。

$$y_0(t) = \alpha^* s(t - D^*) + \gamma(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

ここで、 $\gamma(t)$ は正規性白色雑音過程で $y_0(t)$ は観測値である。 α^* は発信時の信号の減衰率を表わす係数であり、 D^* は信号の遅延時間である(*印は真値であることを表わす)。問題は観測データ $\{y_0(t), 0 \leq t \leq T\}$ に基づいて D^* 、あるいは D^* と α^* とを同時に推定することである。ただし、本論文では、観測データ中に信号は必ず含まれており、信号 $s(t)$ の形は既知で(少なくとも)2回連続微分可能であり、波形幅は T に比べて十分に短いものと仮定し、スカラ過程の場合のみを考慮する。数学的な議論をより厳密にするために、

* 原稿受付 1994年7月13日

** 京都工芸繊維大学 工学学部 Faculty of Engineering and Design, Kyoto Institute of Technology; Matsugasaki, Sakyo ward, Kyoto city, Kyoto 606, JAPAN

*** 京都工芸繊維大学 大学院 工学科学研究科(現在、大阪ガス(株) Graduate School of Engineering and Design, Kyoto Institute of Technology; ditto

Key Words: time delay estimation, maximum likelihood estimate, Itô stochastic model, Cramér-Rao lower bound, uncertainty relation.

$y(t) = \int_0^t y_0(\tau) d\tau$ という過程を新しく導入し、観測モデルをつぎの伊藤型確率微分方程式によって記述しながら議論を始めることにする⁵⁾.

$$dy(t) = \alpha^* s(t-D^*) dt + dv(t), y(0) = 0 \quad (2)$$

ただし、 $v(t)$ は白色雑音 $\gamma(t)$ と $w(t) = \int_0^T \gamma(\tau) d\tau$ という関係によって導入されるウィナー過程で、その分散パラメータ R は既知であるとする.

D^* および α^* は未知量であるから、事実上観測データ $\{y(t), 0 \leq t \leq T\}$ は

$$H^1: dy(t) = \alpha s(t-D) dt + dv(t), \quad (3)$$

$$y(0) = 0$$

のような仮説のもとで生成されるものと考えよう. ただし、 D および α は真値 D^*, α^* にそれぞれ対応するパラメータである. この仮説に対して便宜的に仮説

$$H^0: dv(t) = dy(t), y(0) = 0 \quad (4)$$

を設定すれば、尤度比関数 $\Lambda(T; D, \alpha)$ はつぎのように与えられる⁶⁾.

$$\begin{aligned} \Lambda(T; D, \alpha) &:= \frac{p\{Y_T | H^1\}}{p\{Y_T | H^0\}} \\ &= \exp \left\{ \frac{\alpha}{R} \int_0^T s(t-D) dy(t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha^2}{2R} \int_0^T s^2(t-D) dt \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

$p\{Y_T | H^\nu\}$ ($\nu = 0, 1$) は仮説 H^ν のもとでの尤度関数である.

本論文では、 (D^*, α^*) に対する最尤推定値 $(\hat{D}, \hat{\alpha})$ を求めるのが目的であるが、仮説 H^0 のもとでの尤度 $p\{Y_T | H^0\}$ には未知パラメータが含まれないことから、尤度 $p\{Y_T | H^1\}$ を (D, α) に関して最大にすることと尤度比関数 $\Lambda(T; D, \alpha)$ を最大にすることは等価である. さらに $\Lambda(T; D, \alpha)$ に代わってその対数尤度比関数

$$\begin{aligned} L(T; D, \alpha) &:= \ln \Lambda(T; D, \alpha) \\ &= \frac{\alpha}{R} \int_0^T s(t-D) dy(t) - \frac{\alpha^2}{2R} \int_0^T s^2(t-D) dt \end{aligned} \quad (6)$$

を用いることにする. したがって、最尤推定値 $(\hat{D}, \hat{\alpha})$ は

$$(\hat{D}, \hat{\alpha}) = \arg \left\{ \max_{(D, \alpha)} L(T; D, \alpha) \right\} \quad (7)$$

として求められる.

3. 最尤推定値の不偏性

(7) 式によって得られる推定値 $\hat{D}, \hat{\alpha}$ は近似的に不偏 (unbiased) である. 本節ではこのことを示す. まず最初に、 $\hat{D}$ が不偏であることを示す. α を固定し、 $L(T; \hat{D}, \alpha)$ を D のまわりで展開すると次式を得る.

$$\begin{aligned} L(T; \hat{D}, \alpha) &= L(T; D, \alpha) + \frac{\partial L(T; D, \alpha)}{\partial D} (\hat{D} - D) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L(T; D, \alpha)}{\partial D^2} (\hat{D} - D)^2 \\ &\quad + o((\hat{D} - D)^2) \end{aligned} \quad (8)$$

これより $\partial L(T; D, \alpha) / \partial D$ が零でないとは仮定すると

$$\begin{aligned} \hat{D} - D &= \left[\frac{\partial L(T; D, \alpha)}{\partial D} \right]^{-1} \\ &\quad \cdot \{L(T; \hat{D}, \alpha) - L(T; D, \alpha)\} \\ &\quad + o(\hat{D} - D) \end{aligned} \quad (9)$$

が得られる. ところで、信号は微分可能であるから

$$\begin{aligned} s(t - \hat{D}) - s(t - D) &= \frac{\partial s(t - D)}{\partial D} (\hat{D} - D) \\ &\quad + o(\hat{D} - D) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} s^2(t - \hat{D}) - s^2(t - D) &= 2s(t - D) \\ &\quad \cdot \frac{\partial s(t - D)}{\partial D} (\hat{D} - D) \\ &\quad + o(\hat{D} - D) \end{aligned} \quad (11)$$

となる. (10), (11) を (6) 式に代入し、さらに (3) 式を用いると、

$$\begin{aligned} L(T; \hat{D}, \alpha) - L(T; D, \alpha) &= \frac{\alpha}{R} \int_0^T [s(t - \hat{D}) - s(t - D)] dy(t) \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{2R} \int_0^T [s^2(t - \hat{D}) - s^2(t - D)] dt \\ &= \frac{\alpha}{R} \int_0^T (\hat{D} - D) \frac{\partial s(t - D)}{\partial D} dv(t) \\ &\quad + o(\hat{D} - D) \end{aligned} \quad (12)$$

となり、ここで条件付期待値演算 $\mathcal{E}_{(D, \alpha)}\{\cdot\}$ を行うと、確率積分の性質から (付録参照)

$$\mathcal{E}_{(D, \alpha)}\{L(T; \hat{D}, \alpha) - L(T; D, \alpha)\} = o(\hat{D} - D) \quad (13)$$

が得られる. よって (9) 式より、すべての (D, α) に対して

$$\mathcal{E}_{(D, \alpha)}\{\hat{D}\} = D + o(\hat{D} - D) \quad (14)$$

となる. すなわち、推定値 $\hat{D}$ は位数 $o(\hat{D} - D)$ で不偏である.

つぎに、推定値 $\hat{\alpha}$ が不偏であることを示す. $\hat{D}$, $\hat{\alpha}$ が最尤推定値であることから, $\partial L(T; D, \alpha) / \partial \alpha|_{(D, \alpha) = (\hat{D}, \hat{\alpha})} = 0$ である. よって, (6) 式より

$$\hat{\alpha} = \left[\int_0^T s^2(t - \hat{D}) dt \right]^{-1} \int_0^T s(t - \hat{D}) dy(t) \quad (15)$$

が得られるから, すべての D , α に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(D, \alpha)} \{\hat{\alpha}\} &= \mathcal{E}_{(D, \alpha)} \left\{ \left[\int_0^T s^2(t - \hat{D}) dt \right]^{-1} \right. \\ &\quad \cdot \left. \int_0^T s(t - \hat{D}) \{ \alpha s(t - D) dt + dv(t) \} \right\} \\ &= \alpha \mathcal{E}_{(D, \alpha)} \left\{ \left[\int_0^T s^2(t - \hat{D}) dt \right]^{-1} \right. \\ &\quad \cdot \left. \int_0^T s(t - \hat{D}) s(t - D) dt \right\} \end{aligned}$$

となる. ここで, $s(t - D)$ を $D = \hat{D}$ のまわりで展開すると

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(D, \alpha)} \{\hat{\alpha}\} &= \alpha + \alpha \left[\int_0^T s^2(t - \hat{D}) dt \right]^{-1} \\ &\quad \cdot \int_0^T s(t - \hat{D}) \frac{\partial s(t - \hat{D})}{\partial D} dt \\ &\quad \cdot \mathcal{E}_{(D, \alpha)} \{D - \hat{D}\} + o(D - \hat{D}) \end{aligned} \quad (16)$$

となり, 右辺第2項は(14)式により $o(D - \hat{D})$ 位数であるから, 結局これよりすべての D , α に対して

$$\mathcal{E}_{(D, \alpha)} \{\hat{\alpha}\} = \alpha + o(D - \hat{D}) \quad (17)$$

すなわち, 推定値 $\hat{\alpha}$ は位数 $o(D - \hat{D})$ で不偏である.

4. 推定誤差分散の下界値

3. で推定値 $\hat{D}$, $\hat{\alpha}$ は近似的に不偏であることが示されたので, ここではそれらに対する下界値を評価する. 便宜上 θ を未知パラメータとする. したがって, $\theta = [D, \alpha]'$ ('は転置), $\theta = D$ あるいは $\theta = \alpha$ である. 尤度関数 $p\{Y_T | \theta\}$ は確率密度関数であるから, すべての θ に対して $1 = \int p\{Y_T | \theta\} dY_T$ である[†]. よって, 両辺を θ で微分することによって, つぎの関係式が得られる.

[†] 記号 $\int p\{Y_T | \theta\} dY_T$ は形式的な表現である. これは, 時間区間 $[0, T]$ を $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N+1} < t_N = T$ と分割するとき, 観測値 $\{y_i; i = 0, 1, \dots, N-1\}$ ($y_i = y(t_i)$) に対して

$$\begin{aligned} \int p\{Y_T | \theta\} dY_T &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int p\{y_0, y_1, \dots, y_{N-1} | \theta\} \\ &\quad \cdot dy_0 \dots dy_{N-1} \end{aligned}$$

と定義することである⁵⁾.

$$\begin{aligned} 0 &= \int \frac{\partial \ln p\{Y_T | \theta\}}{\partial \theta} p\{Y_T | \theta\} dY_T \\ &= \mathcal{E}_\theta \left\{ \frac{\partial \ln p\{Y_T | \theta\}}{\partial \theta} \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

θ は観測雑音には関係しないから, $p\{Y_T | H^1\} = p\{Y_T | \theta, H^1\}$ と記述すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p\{Y_T | \theta\} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \frac{p\{Y_T | \theta, H^1\}}{p\{Y_T | H^0\}} \\ &= \frac{\partial \ln \Lambda(T; \theta)}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (19)$$

となる. よって(18)式より次式を得る. すなわち, すべての θ に対して

$$\mathcal{E}_\theta \left\{ \frac{\partial \ln \Lambda(T; \theta)}{\partial \theta} \right\} = 0 \quad (20)$$

を得る. ここで, $\phi(\theta)$ を任意のベクトル値関数とすれば, (20) 式より

$$\mathcal{E}_\theta \left\{ \phi(\theta) \left(\frac{\partial \ln \Lambda(T; \theta)}{\partial \theta} \right)' \right\} = 0 \quad (21)$$

がすべての θ に対して成り立つ. θ の推定値を $\hat{\theta}(Y_T)$ とし, その期待値 $\mathcal{E}_\theta \{\hat{\theta} | Y_T\}$ が $\phi(\theta)$ であるとする

$$\mathcal{E}_\theta \{\hat{\theta}(Y_T)\} = \int \hat{\theta}(Y_T) p\{Y_T | \theta\} dY_T = \phi(\theta) \quad (22)$$

であるから, これより

$$\int \hat{\theta}(Y_T) \left(\frac{\partial \ln p\{Y_T | \theta\}}{\partial \theta} \right)' p\{Y_T | \theta\} dY_T = J_\phi(\theta)$$

すなわち, (19) 式によりすべての θ に対して

$$J_\phi(\theta) = \mathcal{E}_\theta \left\{ \hat{\theta}(Y_T) \left(\frac{\partial \ln \Lambda(T; \theta)}{\partial \theta} \right)' \right\} \quad (23)$$

が得られる. ただし, $J_\phi(\theta) := ((\partial/\partial \theta) \phi'(\theta))'$ は $\phi(\theta)$ のヤコビアンマトリクスである. (21) 式に留意すれば

$$J_\phi(\theta) = \mathcal{E}_\theta \left\{ [\hat{\theta}(Y_T) - \phi(\theta)] \left(\frac{\partial \ln \Lambda(T; \theta)}{\partial \theta} \right)' \right\} \quad (24)$$

となる. ところで

$$M_\theta := \mathcal{E}_\theta \left\{ \left(\frac{\partial \ln \Lambda(T; \theta)}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \ln \Lambda(T; \theta)}{\partial \theta} \right)' \right\} \quad (25)$$

とし, かつこれが正則であるとする,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\theta \left\{ \left[\frac{\partial \ln \Lambda(T; \theta)}{\partial \theta} \right] \cdot \left[\hat{\theta}(Y_T) - \phi(\theta) \right]' \left(\frac{\partial \ln \Lambda(T; \theta)}{\partial \theta} \right)' \right\} \\ = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_\theta \{ [\hat{\theta}(Y_T) - \phi(\theta)] [\hat{\theta}(Y_T) - \phi(\theta)]' \} & J_\phi(\theta) \\ J_\phi'(\theta) & M_\theta \end{bmatrix} \quad (26) \end{aligned}$$

が非負定値であることから、つぎの不等式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\theta \{ [\hat{\theta}(Y_T) - \phi(\theta)] [\hat{\theta}(Y_T) - \phi(\theta)]' \} \\ \geq J_\phi(\theta) M_\theta^{-1} J_\phi'(\theta) \quad (27) \end{aligned}$$

紙数の都合上証明は省くが、 M_θ はつぎのようにも書ける。

$$M_\theta = -\mathcal{E}_\theta \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \ln \Lambda(T; \theta)}{\partial \theta} \right)' \right\} \quad (28)$$

もし $\phi(\theta) = \theta$ 、あるいは $\phi(\theta)$ が不偏推定値、すなわち $\mathcal{E}_\theta \{ \phi(\theta) - \theta \} = 0$ ならば、このとき $J_\phi(\theta) = I$ (単位マトリクス) となるから、不等式 (27) 式はつぎのようになる。

$$\mathcal{E}_\theta \{ [\hat{\theta}(Y_T) - \theta] [\hat{\theta}(Y_T) - \theta]' \} \geq M_\theta^{-1} \quad (29)$$

(19) 式の関係が成り立っていることから、マトリクス M_θ は Fisher の情報マトリクスであり、(27) 式は尤度関数 $p\{Y_T | \theta\}$ の代わりに尤度比関数 $\Lambda(T; \theta)$ で表現した Cramér-Rao の不等式である。

とくに、 α が既知で $\theta = D$ の場合には、(29) 式は

$$\mathcal{E}_D \{ |\hat{D} - D|^2 \} \geq \frac{1}{M_D} \quad (30)$$

となり、最尤推定値 $\hat{D}$ の推定誤差分散の下界値は $1/M_D$ で与えられる。ただし

$$M_D := -\mathcal{E}_D \left\{ \frac{\partial^2 \ln \Lambda(T; D)}{\partial D^2} \right\} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \ln \Lambda(T; D) &= \frac{\alpha}{R} \int_0^T s(t-D) dy(t) \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{2R} \int_0^T s^2(t-D) dt \quad (32) \end{aligned}$$

であり、これらより M_D はつぎのように与えられる。

$$M_D = \frac{\alpha^2}{R} \int_0^T \left[\frac{\partial s(t-D)}{\partial D} \right]^2 dt \quad (33)$$

また同様に、 D が既知で $\theta = \alpha$ のときには

$$\mathcal{E}_\alpha \{ |\hat{\alpha} - \alpha|^2 \} \geq \frac{1}{M_\alpha} \quad (34)$$

$$M_\alpha = \frac{1}{R} \int_0^T s^2(t-D) dt \quad (35)$$

となる。下界値 $1/M_\alpha$ は α には依存しないことが分かる。また (33), (35) 式より明らかなように、観測雑音の分散パラメータ R が大きくなればなる程、それらの下界値 $1/M_D$, $1/M_\alpha$ も大きくなる。これらの観察はわれわれの直感とは矛盾しない。

さて、それぞれの推定誤差分散の値を計算すると、すべての D, α に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_D \{ |\hat{D} - D|^2 \} \cdot \mathcal{E}_\alpha \{ |\hat{\alpha} - \alpha|^2 \} \\ \geq \frac{1}{M_D} \frac{1}{M_\alpha} =: \mu_{D\alpha} \quad (36) \end{aligned}$$

が得られる。さらに (33), (35) 式を用いると $\mu_{D\alpha}$ に対しては

$$\mu_{D\alpha} \geq c_0 R^2 \quad (37)$$

という下界値が存在することが示せる。ただし、 c_0 は $\int_0^T s^2(t-D) dt \leq c_1$, $\int_0^T [\partial s(t-D)/\partial D]^2 dt \leq c_2$ となる定数 c_1, c_2 を用いると $c_0 = 1/c_1 c_2$ によって与えられる正定数である。(36), (37) 式の関数は、二つの未知パラメータ D, α に対する推定精度は同時には無制限に向上させ得ないという不確定性関係を示している。下界値 $1/M_D$ あるいは $1/M_\alpha$ は 5. で述べる逐次推定値 $\hat{D}^{(k)}$ をそれらの計算に用いることによって近似的に求めることが可能である。

最後に、最尤推定値 $\hat{\alpha}$ は近似的に有効 (efficient) であることを示す。(15) 式で与えられる最尤推定量に対する推定誤差分散は、(2) 式を用いるとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{ |\hat{\alpha} - \alpha^*|^2 \} \\ = \mathcal{E} \left\{ \left| \left[\int_0^T s^2(t-\hat{D}) dt \right]^{-1} \cdot \int_0^T s(t-\hat{D}) s(t-D^*) dt - 1 \right| \alpha^* \right. \\ \left. + \left[\int_0^T s^2(t-\hat{D}) dt \right]^{-1} \int_0^T s(t-\hat{D}) dv(t) \right|^2 \right\} \quad (38) \end{aligned}$$

右辺中の $s(t-D^*)$ を $\hat{D}$ のまわりで展開すると、期待値演算の中の $\{ \}$ の項は

$$\left[\int_0^T s^2(t-\hat{D}) dt \right]^{-1} \cdot \int_0^T s(t-\hat{D}) \frac{\partial s(t-\hat{D})}{\partial D} dt \cdot (D^* - \hat{D}) + o(D^* - \hat{D})$$

と近似できるから、(38) 式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{|\hat{\alpha} - \alpha^*|^2\} &= \mathcal{E}\left\{ \left[\int_0^T s^2(t-\hat{D}) dt \right]^{-1} \int_0^T s(t-\hat{D}) dv(t) \right. \\ &\quad \left. + O(D^* - \hat{D}) \right\}^2 \\ &= \left[\int_0^T s^2(t-\hat{D}) dt \right]^{-2} R \int_0^T s^2(t-\hat{D}) dt \\ &\quad + O((D^* - \hat{D})^2) \end{aligned}$$

すなわち

$$\mathcal{E}\{|\hat{\alpha} - \alpha^*|^2\} = R \left[\int_0^T s^2(t-\hat{D}) dt \right]^{-1} + o(D^* - \hat{D}) \quad (39)$$

となり、これはいかなる α にも依存しない。計算が多少煩雑になるので詳しくは述べないが、(39) 式右辺第 1 項は $1/M_a + O(\hat{D} - D)$ となることからは位数 $o(D^* - \hat{D}) + O(\hat{D} - D)$ で有効推定値になっている。

5. 推定アルゴリズム

最尤推定値 $\hat{D}, \hat{\alpha}$ を (7) 式のように求めるにあたっては、数値計算に頼らざるを得ない。本論文では Newton-Raphson アルゴリズムを用いることにする。

【遅延時間推定アルゴリズム】

まず減衰係数 α^* が既知の場合の遅延時間の推定アルゴリズムを導く。簡単のために $L(T; D, \alpha^*)$ を $L(T; D)$ と書くと、対数尤度関数 $L(T; D)$ を最大にするアルゴリズムはつぎの繰返し演算により与えられる¹³⁾。

$$\hat{D}^{(k+1)} = \hat{D}^{(k)}$$

$$- \left[\frac{\partial^2 L(T; D)}{\partial D^2} \right]_{D=\hat{D}^{(k)}}^{-1} \frac{\partial L(T; D)}{\partial D} \Big|_{D=\hat{D}^{(k)}} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (40)$$

ここで、(6) 式より

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(T; D)}{\partial D} \Big|_{D=\hat{D}^{(k)}} &= \frac{\alpha^*}{R} \int_0^T \frac{\partial s(t-D)}{\partial D} dy(t) \\ &\quad - \frac{\alpha^{*2}}{R} \int_0^T \frac{\partial s(t-D)}{\partial D} s(t-D) dt \quad (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 L(T; D)}{\partial D^2} \Big|_{D=\hat{D}^{(k)}} \\ &= \frac{\alpha^*}{R} \int_0^T \frac{\partial^2 s(t-D)}{\partial D^2} dy(t) \\ &\quad - \frac{\alpha^{*2}}{R} \int_0^T \left\{ \frac{\partial^2 s(t-D)}{\partial D^2} s(t-D) \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial s(t-D)}{\partial D} \right]^2 \right\} dt \quad (42) \end{aligned}$$

である。

【遅延時間と減衰率の同時推定アルゴリズム】

D^* および α^* を同時に推定するに際しては、 $(\hat{D}^{(k)}, \hat{\alpha}^{(k)})$ を最尤推定値 $(\hat{D}, \hat{\alpha})$ に対する逐次推定値とすると、 $\hat{\alpha}$ が (15) 式で与えられることからこれらはつぎのアルゴリズムによって与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{D}^{(k+1)} &= \hat{D}^{(k)} - \left[\frac{\partial^2 L(T; D, \alpha)}{\partial D^2} \Big|_{(D, \alpha) = (\hat{D}^{(k)}, \hat{\alpha}^{(k)})} \right]^{-1} \\ &\quad \cdot \frac{\partial L(T; D, \alpha)}{\partial D} \Big|_{(D, \alpha) = (\hat{D}^{(k)}, \hat{\alpha}^{(k)})} \quad (43) \end{aligned}$$

$$\hat{\alpha}^{(k)} = \left[\int_0^T s^2(t-\hat{D}^{(k)}) dt \right]^{-1} \int_0^T s(t-\hat{D}^{(k)}) dy(t) \quad (44)$$

アルゴリズム (44) 式によって得られる推定値 $\hat{\alpha}^{(k)}$ は逐次的に不偏である。実際、(17) 式より

$$\mathcal{E}_{(D^*, \alpha^*)} \{\hat{\alpha}^{(k)}\} = \alpha^* + o(D^* - \hat{D}^{(k)}) \quad (45)$$

が成り立つから、 $k \rightarrow \infty$ のとき $\hat{D}^{(k)} \rightarrow D^*$ ならば $\mathcal{E}_{(D^*, \alpha^*)} \{\hat{\alpha}^{(k)}\} = \alpha^*$ となる。

6. シミュレーション例

伝送信号は周期 T_0 の正弦波で、時間区間 $[\tau_0, \tau_0 + T_0]$ においてのみ発信されるものとする。すなわち

$$s(t) = A \sin \frac{2\pi}{T_0} (t - \tau_0), \quad t \in [\tau_0, \tau_0 + T_0] \quad (46)$$

であり、パラメータ A, T_0 および τ_0 は既知で、 $[\tau_0, \tau_0 + T_0] \subset [0, T]$ とする。この種の信号は著者のひとりが参考文献 6) において、雑音に埋れた信号の検定問題で取り扱ったものと同じ形である。シミュレーションでは、 $A = -1, T_0 = 2, \tau_0 = 5$ [s] とし、計算機により創成した白色雑音過程 $\gamma(t)$ 中にこの信号を時間区間 $[7, 9]$ [s] に埋め込んで、観測データ $\{y_0(t)\}$ を時間差分幅を $\delta t = 0.01$ [s] として生成した。したがって、真の遅延時間は $D^* = 2$ [s] である。観測時間区間は

$[0, 10]$ [s] ($T = 10$) である。実験に当たっては数多くのシミュレーションを行ったが、以下では代表的な結果に限って述べる。

6.1 遅延時間推定のシミュレーション

真値 α^* は既知であるとする。Fig. 1 が観測過程 $y_0(t)$ である (ただし, $R = 0.01$ とする)。推定の初期値を $\hat{D}^{(0)} = 1.7$ [s] とし、アルゴリズム (40) 式によって推定した結果が Fig. 2 である。繰返し計算は、 $|\hat{D}^{(k)} - \hat{D}^{(k-1)}| \leq \varepsilon_1$ ($k = 1, 2, \dots$) が満たされたとき終了するものとし、シミュレーションでは $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ と設定した。この条件は $k = 6$ で満たされ、そのとき逐次推定値は $\hat{D}^{(k)} = 1.99890$ と得られた。推定誤差は僅かに 1.1×10^{-3} [s] という好結果が得られており、このことは推定値が不偏であることを支持しているとみることができる。任意の不偏推定値に対して評価される推定誤差分散の下界値は (33) 式により計算できるから、これを求めてみる。

Fig. 1 Sample path of the observation data $y_0(t)$ with noise intensity $R = 0.01$ (The true received signal is embedded by a dashed curve.)

Fig. 2 Convergence feature of the estimate $\hat{D}^{(k)}$

$$M_D = \frac{a^{*2}}{R} \int_0^T \left(\frac{2\pi A}{T_0} \right)^2 \cos^2 \frac{2\pi}{T_0} (t - \tau_0 - D) dt$$

$$= \frac{2\pi^2 \alpha^{*2} A^2}{RT_0} \quad (47)$$

であるから、 $\hat{D}$ の代わりに $\hat{D}^{(k)}$ を用いれば、(30) 式より

$$\mathcal{E}_D \{ |\hat{D}^{(k)} - D^*|^2 \} \geq \frac{RT_0}{2\pi^2 \alpha^{*2} A^2} \quad (48)$$

という評価が得られる。この下界値は D^* には依存せず 0.004 となる。ところで、逐次推定値の誤差分散は $|1.99890 - 2|^2 \cong 1.21 \times 10^{-6}$ であるから、不等式 (48) 式は成り立たない。このことは一見、5. で展開した下界値を求める理論が誤っているようにみえるが、実はそれは皮相な見方であって、推定誤差分散はただ一つの見本値のみについて計算されたのにすぎないからである。これは 1 見本過程についてのみの結果であるので、任意に設定した初期値 $\hat{D}^{(0)}$ に対する 32 本の見本過程の試行結果を Table 1 に示す。いずれの試行においても、繰返し回数はたかだか 7 回程度であり、その推定結果も良好であることがわかる。ちなみに、それらの推定値の見本平均は 1.99508 ± 0.07595 [s] で、分散は 5.768×10^{-3} であった。上述のように、理論上的下界値は 0.004 であ

Table 1 Results of the estimated time-delay $\hat{D}^{(k)}$ for 32 trials

Trial	Initial Value $\hat{D}^{(0)}$	Iteration Number k	Estimated $\hat{D}^{(k)}$
1	1.6	6	1.99890
2	1.6	7	2.03861
3	1.6	5	2.01545
4	1.7	5	1.96792
5	1.7	5	1.86006
6	1.7	3	1.96846
7	1.7	6	1.93404
8	1.7	7	1.92690
9	1.7	6	2.05844
10	1.7	5	1.87339
11	1.7	6	2.06234
12	1.7	5	1.94160
13	1.8	4	1.80460
14	1.8	4	1.99791
15	1.8	3	2.14798
16	1.8	5	2.00055
17	1.8	5	1.99954
18	1.8	6	2.05439
19	2.2	4	2.18146
20	2.3	5	2.01987
21	2.3	5	1.99507
22	2.3	3	2.01687
23	2.3	5	1.96533
24	2.3	4	2.03264
25	2.3	7	2.01032
26	2.3	4	1.88787
27	2.3	5	1.99463
28	2.3	4	2.04712
29	2.4	5	2.05864
30	2.4	7	2.05945
31	2.4	6	1.93177
32	2.4	6	1.99053

ることから、実際上の（見本）分散値の方がやはり大きくなる。

雑音の分散パラメータ R を大きくした場合 ($R = 0.05$) にも良好な結果が得られた。Fig. 3, 4 に観測データと推定の様子を示す。ほかのパラメータは Fig. 1, 2 の場合と同じである。この場合も $k = 6$ で、その推定値は $\hat{D}^{(k)} = 1.99782$ と良好であった。

Fig. 3 Sample path of the observation data $y_0(t)$ with noise intensity $R = 0.05$

Fig. 4 Convergence feature of the estimate $\hat{D}^{(k)}$

6.2 遅延時間と減衰係数の同時推定のシミュレーション

それぞれの真値を $D^* = 2$, $\alpha^* = 0.5$ とする。ほかのパラメータは上記シミュレーションの場合と同じである（ただし $R = 0.01$ とする）。推定の初期値は $\hat{D}^{(0)} = 1.7$ とし、 $\hat{\alpha}^{(0)}$ は (44) 式によって計算される値を用いた。 $\hat{\alpha}^{(k)}$ の収束の規範を $|\hat{\alpha}^{(k)} - \hat{\alpha}^{(k-1)}| \leq \varepsilon_2$ とし、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 10^{-5}$ と設定した。Fig. 5 が $\hat{\alpha}^{(k)}$ の収束の様子である。 $k = 6$ で $\hat{\alpha}^{(k)} = 0.55323$ となったが、図よりみてあまり良好な結果とはいえないが、一方 $\hat{D}^{(k)}$ は Fig. 2 と全く同じであった。この事実は、減衰係数 α^* の推定がどうであっても、遅延時間 D^* の推定は常にうまく実行できるのではないかという予測が成り立つように思われる

が、実はそうではない。Fig. 6 は、これとは反対の結果を示している。それぞれの収束値は $k = 6$ で $\hat{D}^{(k)} = 1.9313$, $\hat{\alpha}^{(k)} = 0.49323$ である。4.において述べたように、 D^* と α^* の推定精度は同時には向上させ得ないということを Fig. 6 が正に示していることが理解できる。 α の推定誤差分散の下界値を与える M_α は、 D, α には依存しない。すなわち、(35) 式を用いるとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \frac{1}{R} \int_{\tau_0+D}^{\tau_0+D+T_0} A^2 \sin^2 \frac{2\pi}{T_0} (t - \tau_0 - D) dt \\ &= \frac{A^2 T_0}{2R} \end{aligned} \quad (49)$$

Fig. 5 Estimation result of the attenuation parameter $\hat{\alpha}^{(k)}$

Fig. 6 Convergence features of the estimate $\hat{D}^{(k)}$ and $\hat{\alpha}^{(k)}$

7. 推定アルゴリズムに対する考察

7.1 局所最大(最小)値の問題

5. で述べた Newton-Raphson アルゴリズムに基づいた繰返し計算法で一番問題になるのは、最大化の規範となる尤度比関数 $L(T; \cdot)$ が局所最大または最小値を数多く持つのではないかという点である。Fig. 7 は α^* が既知とした場合の $L(T; D)$ のパラメータ D に対する変化の様子を示した図 ($T = 10, A = -1, R = 0.01, \alpha = \alpha^* = 0.5$) であるが、曲線は滑らかで、真値 $D^* (= 2)$ の近傍では単峰性を示している。したがって、推定値 $\hat{D}^{(k)}$ が真値に収束するためには、初期値 $\hat{D}^{(0)}$ を少なくとも中央の“山”の山腹あたりにとらなければならないことがわかる。実際、初期値 $\hat{D}^{(0)}$ を山裾のあたりにとれば、その近くの局所最小値のところへ収束してしまいうまいかなかった。

Fig. 7 A plot of the log-LR function $L(T; D)$

7.2 修正アルゴリズム

雑音の分散パラメータ R が比較的大きいときには、初期値 $\hat{D}^{(0)}$ が上述のように適切に選ばれていてもアルゴリズム (40) 式は良好に作動せず、真値には収束せずに Fig. 8 の破線に示すように振動現象を示した。シミュレーションにおけるパラメータは $R = 0.5$ であり、ほかは 6.1 のシミュレーションのそれと同じである。この発振現象を避けるために、緩和係数⁷⁾を導入し、(40) 式をつぎのように修正したアルゴリズムを用いる。

$$\hat{D}^{(k+1)} = \hat{D}^{(k)}$$

$$-\xi^{(k)} \left[\frac{\partial^2 L(T; D)}{\partial D^2} \right]_{D=\hat{D}^{(k)}}^{-1} \cdot \frac{\partial L(T; D)}{\partial D} \bigg|_{D=\hat{D}^{(k)}} \quad (50)$$

緩和係数 $\xi^{(k)}$ はつぎのように選定される。

- (i) まず、 $\xi^{(0)} = 1$ とおき、(50) 式によって $\hat{D}^{(1)}$ を計算する。ついで、

- (ii) k ステップ目において、もし

$$\left[\frac{\partial L(T; D)}{\partial D} \right]_{D=\hat{D}^{(k)}} \cdot \left[\frac{\partial L(T; D)}{\partial D} \right]_{D=\hat{D}^{(k-1)}}^{-1} < 0 \quad (51)$$

ならば、 $\xi^{(k)} = \xi^{(k-1)}/2$ とおき、もしそうでないときは $\xi^{(k)} = 1$ とおく。

このように緩和係数 $\xi^{(k)}$ を選ぶことによって、推定値 $\hat{D}^{(k)}$ は Fig. 8 の実線で示すように $k = 12$ で $\hat{D}^{(k)} = 1.99517$ に収束した。

Fig. 8 Comparison of estimates $\hat{D}^{(k)}$

8. 結 言

本論文では、受信データの中の信号の遅延時間および信号の減衰率の推定法を Newton-Raphson アルゴリズムに基づいた最尤推定法により確立した。シミュレーションでは正弦波状信号に対して推定問題を考察し、良好な結果を得た。紙幅の都合上、観測雑音が有色雑音の場合や信号がパルス状の場合については触れられなかったが、これらについては今後の課題とする。予備的な実験では、観測雑音が白色過程で矩形波信号に対しては本論文で述べたアルゴリズムでは十分な精度は得られていない。これは、Fig. 7 に示したグラフを描くと対数尤度比関数 $L(T; D)$ が微妙に変動する現象が発生することによる。

おわりにあたり、筆頭著者は、生前温かい薫陶を受けた故砂原善文京都工芸繊維大学名誉教授に深甚の謝意を表し、併せて御冥福を祈ります。

参 考 文 献

- 1) Special Issue : Time Delay Estimation ; IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-29, No. 3 (1981)
- 2) G. C. Garter : Time Delay Estimation for Passive Sonar Signal Processing ; IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-29, No. 3, pp. 463~470 (1981)
- 3) G. Jacovitti and G. Scarano : Discrete Time Techniques for Time Delay Estimation ; IEEE Trans. Signal Processing, Vol. 41, No. 2, pp. 525~533 (1993)
- 4) B. Champagne, M. Eizenman and S. Pasupathy : Exact Maximum Likelihood Time Delay Estimation for Short Observation Intervals ; IEEE Trans. Signal Processing, Vol. 39, No. 6, pp. 1245~1257 (1991)
- 5) A. H. Jazwinski : Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press (1970)
- 6) 砂原, 大住ほか : 実時間データ処理による信号検定に関する研究 ; 計測と制御 (総合論文), Vol. 20, No. 2, pp. 197~213 (1981)
- 7) J. M. Ortega and W. C. Rheinbolts : Iterative Solution of Nonlinear Equation in Several Variables, Academic Press (1970)

付 録

(13) 式の導出

$\mathbf{CV}_t = \sigma \{v(s), 0 \leq s \leq t\}$ をウィーナー過程 $\{v(s), 0 \leq s \leq t\}$ ($0 \leq t \leq T$) によって生成される σ -代数とし, また同様に $\mathbf{Q}_t = \sigma \{y(s), 0 \leq s \leq t\}$ とすれば, $as(t-D)$ は既知確定関数であることから, (3) 式より $\mathbf{Q}_t = \mathbf{CV}_t$ の等価性は明らかである. したがって, $[0, T]$ 区間の観測データに対する σ -代数 $\mathbf{Q}_T$ の関数となる推定値 $\hat{D}$ は $\hat{D} = \hat{D}(\mathbf{Q}_T) = \hat{D}(\mathbf{CV}_T)$ と表現することができ, (12) 式最右辺の第1項に対して

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{E}_{(D, \alpha)} \left\{ \int_0^T [\hat{D}(\mathbf{CV}_T) - D] \frac{\partial s(t-D)}{\partial D} dv(t) \right\} \\
 &= \mathcal{E}_{(D, \alpha)} \left\{ [\hat{D}(\mathbf{Q}_T) - D] \int_0^T \frac{\partial s(t-D)}{\partial D} dv(t) \right\} \\
 &= \mathcal{E}_{(D, \alpha)} \left\{ [\hat{D}(\mathbf{Q}_T) - D] \right. \\
 & \quad \cdot \left. \mathcal{E} \left\{ \int_0^T \frac{\partial s(t-D)}{\partial D} dv(t) \middle| \mathbf{Q}_T \right\} \right\} \\
 &= \mathcal{E}_{(D, \alpha)} \{ \hat{D}(\mathbf{Q}_T) - D \} \\
 & \quad \cdot \mathcal{E}_{(D, \alpha)} \left\{ \mathcal{E} \left\{ \int_0^T \frac{\partial s(t-D)}{\partial D} dv(t) \middle| \mathbf{Q}_T \right\} \right\} \\
 &= \mathcal{E}_{(D, \alpha)} \{ \hat{D}(\mathbf{Q}_T) - D \} \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

となるので, (31) 式が得られる.