自己相似パターンに誘導された条件付き分布に関する 不変特徴の存在と検出*

亀島 鉦二**

Existence and Detection of Invariant Feature Associated with Conditional Distribution Induced by Self-Similar Patterns*

Kohji KAMEJIMA**

A method is presented for detecting self-similar patterns. A version of conditional distribution is introduced to self-similar patterns for representing computable morphological feature. The morphological feature associated with accurately observed attractor is proved to yield a subset that is invariant with respect to self-similarity mapping. The invariant feature is demonstrated to activate an imaging process for generating proximately located attractor. An algorithm was developed for computing invariant feature and verified through simulation study.

1. はじめに

単純な操作の繰り返しで複雑な形態を造りだすことが知られている^{12),13)}。また、単一形態の繰り返しが新たなイメージを造りだすことも知られている^{3),4)}。これらの事実は、形成手続きを“アルファベット”としてさまざまなパターンを記述できることを示唆している。このような生成的な形態表現は、言語的指示によるデザイン^{11),15)}、対話にともなうイメージの形成^{5),7)}、情景の命題的解析^{8),14)}などの領域で重要な役割を果たすと期待される。

本研究は画像にもとづいて形態の形成手続きを推定することを目的とする。ただし、画像は縮小写像群のアトラクターとして形成されるものと仮定する。この仮定はそれほど制限的ではない。たとえば、縮小写像群はフラクタル・アトラクターを造りだすことが証明されている⁵⁾。また、このようなパターン形成の一つの具体的手順として、写像のランダム選択による形態生成アルゴリズムが求められている¹⁾。このような形態形成に対する逆問題は画像圧縮の分野でも考察されている²⁾。ただし画像圧縮では画像の内容を問わず濃淡分布の忠実な再生が問題となるため、写像のタイプを対象形態に適合するよう指

定することが通例である²⁾。この場合には、処理領域と類似の統計量を持つ相似領域を探索することにより写像パラメータが決定されることになる。

さて、形成されたアトラクターにふたたび縮小写像群を施しても同じパターンが得られる。すなわち、アトラクターは縮小写像群に関して不変である。この点に着目して、本研究では、形態形成手続きを手掛かりに対象を検出することを目指す。検出を行う以上何らかの目的が設定されるはずである。そこで本論文では、検出対象のクラスが縮小写像群の集合として事前に表現されているものとする。このような“辞書が利用できる”状況では、問題は2次元分布としての観測画像の縮小写像群に関する不変性を効率よくテストすることに帰着する。

2. 問題の定式化

2次元平面 R^2 内の有界かつ滑らかな境界を持つ開集合 Ω を画面とよび、 Ω の部分集合からなる Borel 集合族 $\mathcal{F}$ の要素を画像とよぶ。すなわち本研究では可視性と可測性を同一視する、 $\mathcal{F}$ 上には確率測度 $P: \Omega \rightarrow [0,1]$ が与えられているものとする。また、 Ω から Ω への1対1縮小写像全体を M と書き、形態形成手続き $\nu = \{\mu_i, i=1,2,3,\dots, \mu_i \in M\}$ を M の部分集合と考える。すなわち、形態の“手続き型アルファベット”を M とし、形態形成手続き全体を M の部分集合からなる Borel 集合族 $\mathcal{N}$ と同一視する。このような形態形成手続きに対して次の

* 原稿受付 1995年8月10日

** 大阪工業大学 工学部 Faculty of Engineering, Osaka Institute of Technology; 5-16-1 Omiya, Asahi, Osaka 535, JAPAN

Key Words: invariant feature, self-similarity, conditional distribution, pattern detection, pattern description.

命題が成立する.

【命題 1】 $\nu = \{\mu_i \in M\} \in \mathcal{N}$ は Ω 内でアトラクターを持つ.

(証明) 各 $\mu_i \in M$ は完備な距離空間 R^2 上で縮小写像であるから

$$\bigcup_{\mu_i \in \nu} \mu_i(\Xi) = \Xi, \quad (1)$$

なる有界閉集合が Ξ が存在する. またこの Ξ は

$$\Xi_{t+1} = \bigcup_{\mu_i \in \nu} \mu_i(\Xi_t) \quad (2a)$$

$$\Xi_0 = \Omega \quad (2b)$$

なる集合列 $\{\Xi_t, t=0,1,2,\dots\}$ の極限点として与えられる. (2) 式よりすべての $t \geq 0$ に対して $\Xi_t \subset \Omega$ であるから, 極限点の一意性より $\Xi \subset \Omega$ となる. $\square$

この命題により, アトラクターとして形成されたパターン Ξ は形成手続き ν と同一視することができる. ただし, アトラクターがいつもはっきりした境界を持つとは限らない. たとえば写像群 $\nu \in \mathcal{N}$ が開集合条件

$$\exists O \subset \Omega: \bigcup_{\mu_i \in \nu} \mu_i(O) \subset O, \mu_i(O) \cap \mu_j(O) = \emptyset \quad (3)$$

をみたす場合には, $\nu \in \mathcal{N}$ はフラクタル・アトラクターを持つことになる⁶⁾. このことは, 有限の分解能を持つ撮像系を通して観測されたアトラクターには不確実性が含まれることを意味する.

今アトラクター Ξ を含む画像が観測されるとし, (2) 式をみたす写像群 $\nu \in \mathcal{N}$ を特定する問題を考える. (1) 式はアトラクターを構成する任意の2点 $\omega_1, \omega_2 \in \Xi$ がどれか一つの写像 $\mu_i \in \nu$ により結び付けられていることを表す. 関数当てはめの観点から見ると, 形態形成過程では“独立変数”すなわちパターンの構成点 $\omega \in \Xi$ と“従属変数”すなわち写像 $\mu_i \in \nu$ の結び付きは非決定論的である. この点で形態形成過程は“各時点で変動が一意に定まる”時系列データの生成過程と本質的に異なる. 言い換えれば, この本質的非決定性 (intrinsic stochasticity) に対処することが形態形成過程の同定に当たって先ず考慮されなければならない点である. ところで, アトラクター Ξ と形成手続き ν を同一視することにより, ν は $\mathcal{F}$ 可測となる. このことは, アトラクターとして形成されたパターンに対して条件付き分布が定義できることを意味する⁹⁾. この点に着目して, 本研究ではパターン自体をミクロに分析することを避け, パターンにより誘導される条件付き分布のマクロな分析を通して形成手続き ν を同定するアプローチを取る.

3. 条件付き分布と形態特徴

次式で定義された集合を形態事象と呼ぶ.

$$\Lambda = \{\omega \in \Omega | \omega \in \bigcup_{\mu_i \in \nu} \mu_i(\Omega)\} \quad (4)$$

この集合に対して次の Dirichlet 問題を考える.

$$\Delta \varphi(\omega) = \rho \varphi(\omega), \omega \in \Lambda \quad (5a)$$

$$\varphi(\omega') = 1, \omega' \in \partial \Lambda \quad (5b)$$

ただし ρ は正定数である. 以下, 境界値問題 (5) 式の解は次式により画面全体に延長されるものとする.

$$\varphi(\omega) = 0, \omega \in \Omega - (\Lambda \cup \partial \Lambda) \quad (5c)$$

境界値問題 (5) 式は領域 Λ の内部で正定解を持つことから

$$\Delta \varphi(\omega) \geq 0, \text{ a.e. in } \Lambda \quad (6)$$

となる. すなわち分布 $\varphi(\omega)$ は Λ 内で劣調和である. したがってほとんどすべての $\omega \in \Lambda, \omega' \in \partial \Lambda$ に対して分布 φ は次の最大原理をみたす.

$$0 \leq \varphi(\omega) \leq \varphi(\omega') < \infty \quad (7)$$

(7) 式より, 分布 $\varphi(\omega)$ は点 ω の境界への接近の程度を表す尺度を与えることになる. この意味で, 以下, $\varphi(\omega)$ を境界配置 $\partial \Lambda$ により条件付けられた分布とよぶことにする. 境界が視覚認識の重要な手掛かりとなることから, このような条件付き分布の導入は妥当なものと思われる. この条件付き分布 $\varphi(\omega)$ を用いて次の集合を定義する.

$$\tilde{\Theta} = \{\tilde{\theta} \in \Lambda | \nabla \varphi(\tilde{\theta}) = 0, \varphi(\tilde{\theta}) > 0\} \quad (8)$$

このとき形態事象に関して次の命題が成立する.

【命題 2】 形態事象は空でない $\tilde{\Theta}$ を持つ.

(証明) 形態事象 Λ に対して次の集合を考える.

$$\Theta^0 = \{\theta \in \Lambda | \varphi(\theta) \leq \varphi(\omega), \omega \in \Lambda\} \quad (9)$$

最大原理 (7) 式より Θ^0 は空ではない. したがって $\Theta^0 \subset \tilde{\Theta}$ なる $\tilde{\Theta}$ は空ではない. $\square$

定義より, $\tilde{\Theta}$ は領域 Λ に関して一意に定まる. また, とくに $\rho > 0$ の場合には $\varphi(\omega) > 0, \omega \in \Lambda - \partial \Lambda$ となることから $\Delta \varphi(\tilde{\theta}) > 0, \tilde{\theta} \in \tilde{\Theta} \subset \Lambda$ が成立するため, $\tilde{\Theta}$ は離散集合である. すなわち集合は領域 Λ を特徴づける計算可能情報である. この意味で, 以下, $\tilde{\Theta}$ を形態特徴とよぶ.

4. 主要な結果

(1) 式で与えられるアトラクター Ξ に対する形態特徴を考える. ただし Ξ のフラクタル性を考慮して, アトラクター Ξ を“わずかに膨らんだ滑らかな領域 Ξ^ϵ ”に置き換える. 具体的には, フラクタル・アトラクターに対する条件付き分布 φ を次式で表現する.

$$\Delta\varphi(\omega) = \rho\varphi(\omega), \omega \in \Xi^\varepsilon \quad (10a)$$

$$\varphi(\omega) = 1, \omega \in \partial\Xi^\varepsilon \quad (10b)$$

$$\varphi(\omega) = 0, \omega \in \Omega - (\Xi^\varepsilon \cup \partial\Xi^\varepsilon) \quad (10c)$$

ここに

$$\Xi^\varepsilon = \{\omega \in \Omega | m^* \chi_\Xi > 0\} \quad (11a)$$

であり, m は例えば次式で与えられる軟化作用素である.

$$m(\xi) = m_0 \exp\left(-\frac{1}{1 - \left|\frac{\xi}{\varepsilon}\right|^2}\right), \text{ for } \left|\frac{\xi}{\varepsilon}\right| < 1 \quad (11b)$$

(11a) 式で合成積は自己相似パターン上の不変測度¹⁾ χ_Ξ にもとづいて

$$m^* \chi_\Xi(\omega) = \int_\Omega m(\omega - \xi) d\chi_\Xi(\xi) \quad (11c)$$

のように定義する. Ω 内での縮小写像群が不変測度を持つこと, および不変測度の台が対応するアトラクターに一致すること¹⁾から,

$$m^* \chi_\Xi(\omega) > 0 \text{ for } \min_{\xi \in \Xi} |\omega - \xi| < \varepsilon \quad (11c)'$$

となる. すなわち, (11) 式はアトラクター Ξ を幅 ε だけ拡大して軟化領域を得たことを意味する. この条件付き分布 φ に対して形態特徴を次式で定義する.

$$\tilde{\Theta} = \{\tilde{\theta} \in \Xi^\varepsilon | \nabla\varphi(\tilde{\theta}) = 0, \varphi(\tilde{\theta}) > 0\} \quad (12)$$

このように自己相似パターンに対して拡張された形態特徴にもとづいて生成手続きを求める. アトラクター Ξ の写像群 ν に関する不変性 (1) 式は, 必ずしも Ξ 上の離散集合の不変性を意味しない. ただし条件付き分布 φ にもとづく形態特徴 $\tilde{\Theta}$ は, 写像群 ν に関して不変な部分集合を持つ. この不変特徴の存在条件は次のように得られる.

【定理 1】 (不変特徴の存在) ν をアトラクター Ξ を生成する縮小写像群とし, 形態特徴 $\tilde{\Theta}$ が次式をみたすと仮定する.

$$\tilde{\Theta} \subset (\Xi - \partial\Xi) \quad (13)$$

このとき, 任意の $\delta > 0$ に対して軟化パラメータ $\varepsilon > 0$ が存在し, 次の性質を持つ離散集合 $\Theta \subset \tilde{\Theta}$

$$\Theta = \{\theta \in \tilde{\Theta} | \theta \in \bigcup_\nu \langle \mu_i(\theta) \rangle_\delta\} \quad (14)$$

を空でないようにすることができる. ただし $\langle \mu_i(\theta) \rangle_\delta$ は

$$\langle \mu_i(\theta) \rangle_\delta = \bigcup_{\theta \in \Theta} \langle \mu_i(\theta) \rangle_\delta \quad (15a)$$

$$\langle \theta \rangle_\delta = \{\omega \in \Omega | \varphi(\theta) < \varphi(\omega) < \varphi(\theta) + \delta\} \quad (15b)$$

なる領域を表す.

(注意 1) φ の連続性および $\varphi(\theta), \theta \in \Theta \subset \tilde{\Theta}$ の極小性より, (15) 式で定義される $\langle \theta \rangle_\delta$ は点 $\theta \in \tilde{\Theta}$ の近傍領域を表す. したがって, 性質 (14) 式は集合 $\tilde{\Theta}$ 内に写像群 ν に関して近似的に不変な部分集合 Θ が存在することを意味する. いいかえれば, 定理 1 は $\Xi^\varepsilon \approx \Xi$ と見なせる程度に正確に形態が観測された場合には, 離散集合 $\tilde{\Theta}$ 上で再帰的に定義された不変特徴 Θ が存在すると主張する. この結果, 観測パターンの縮小写像群に関する不変性は離散情報 $\tilde{\Theta}$ 上での計算によりテストできることになる.

上記不変特徴はアトラクター生成過程を起動することができる. 結果として得られる形態の配置に関しては次の評価が成り立つ.

【定理 2】 (不変拡張の存在) Λ を特徴パターン

$$\tilde{\Theta} = \{\tilde{\theta} \in \Lambda | \nabla\varphi(\tilde{\theta}) = 0, \varphi(\tilde{\theta}) > 0\} \quad (16)$$

を持つ領域とし, ν を縮小写像群とする. このとき条件

$$\exists \Theta \neq \emptyset: \Theta = \{\theta \in \tilde{\Theta} | \theta \in \bigcup_\nu \mu_i(\theta)\} \quad (17a)$$

$$\Theta \cap \mu_i(\theta) \neq \emptyset, \text{ for all } \mu_i \in \nu \quad (17b)$$

がみたされるならば ν は条件

$$\Lambda \cap \Xi = \bigcup_\nu \mu_i(\Xi) \cap \Theta \neq \emptyset \quad (18)$$

をみたすアトラクター Ξ を生成する.

(注意 2) アトラクターは再帰的に定義されるため, その形態を確定するためにはすべての構成点を生成してみなければならない. このようにアトラクターの事前評価は容易ではないが, 条件 (18) 式は観測形態 Λ および計算可能情報 Θ と生成されるべきアトラクターの関連を規定する. この意味で定理 2 は不変特徴 Θ にもとづいてアトラクターの存在領域をある程度見積れると主張する. 実際, 非冗長性条件 (17b) 式をテストすることにより, 例えば不動点 1 点のみを共有するなど, “極端にかけ離れた” アトラクターを排除することができる.

5. 形態特徴の変換

定理の証明に先だって, 縮小写像群のもとでの形態特徴のふるまいについて考察する. まず縮小性より次の連続性が導かれる.

【補題 1】 縮小写像 $\mu: \Omega \rightarrow \Omega$ は $B_\delta(\omega)$ を $B_\delta(\mu(\omega))$ 内部に写す. ただし

$$B_\delta(\omega) = \{\xi \in \Omega | |\xi - \omega| < \delta\} \quad (19)$$

であり, σ は写像の縮小係数を表す.

(証明) 任意の $\xi \in B_\delta(\omega)$ に対して評価

$$|\mu(\xi) - \mu(\omega)| \leq \sigma |\xi - \omega| \leq \sigma \delta \quad (20)$$

が成り立つことから, 直ちに $\mu[B_\delta(\omega)] \subset B_\delta(\mu(\omega))$ が導かれる. $\square$

写像の連続性と分布の連続性をあわせると, 特徴点の再生過程が次のように得られる.

【補題 2】 縮小写像 $\mu: \Omega \rightarrow \Omega$ により領域 A の形態特徴点は領域 $\mu(A)$ の形態特徴点に写る.

(証明) 条件付き分布 φ が境界形状に関して一意に定まることに注意して次の条件付き分布 φ_μ を考える.

$$\Delta\varphi_\mu(\omega) = \rho\varphi_\mu(\omega), \omega \in \mu(\Xi^\varepsilon) \quad (21a)$$

$$\varphi_\mu(\omega) = 1, \omega \in \mu(\partial\Xi^\varepsilon) \quad (21b)$$

$$\varphi_\mu(\omega') = 0, \omega' \in \Omega - (\mu(\Xi^\varepsilon) \cup \mu(\partial\Xi^\varepsilon)) \quad (21c)$$

領域 A の分布 φ に関する形態特徴を $\tilde{\theta}$ とすると, $\Delta\varphi(\tilde{\theta}) > 0$, $\tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}$ より, 任意の $\tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}$ に対して $\delta > 0$ が存在し,

$$\tilde{\theta} \in B_\delta(\tilde{\theta}) \text{ and } \{\tilde{\theta} - \tilde{\theta}\} \cap B_\delta(\tilde{\theta}) = \emptyset \quad (22a)$$

$$\omega \in B_\delta(\tilde{\theta}) \Rightarrow \varphi(\tilde{\theta}) < \varphi(\omega) \quad (22b)$$

とすることができ. 補題 1 より領域 $B_\delta(\tilde{\theta})$ の μ による写像 $\mu[B_\delta(\tilde{\theta})]$ が $B_\delta(\mu[\tilde{\theta}])$ の内部に写されること, および写像の一意性より $\tilde{\theta} \in \{A - \partial A\} \Rightarrow \mu[\tilde{\theta}] \in \{\mu[A] - \mu[\partial A]\}$ となることから, 上記 δ に対して $\epsilon > 0$ が存在し $B_\epsilon(\mu[\tilde{\theta}]) \subset \{\mu[A] - \mu[\partial A]\} \cap B_\delta(\mu[\tilde{\theta}])$ とすることができ. ここで写像 μ および分布 φ_μ の一意性より

$$\mu[\tilde{\theta}] \in B_\epsilon(\mu[\tilde{\theta}]) \quad (23a)$$

$$\omega \in \{B_\epsilon(\mu[\tilde{\theta}]) - \mu[\tilde{\theta}]\} \Rightarrow \varphi_\mu(\mu[\tilde{\theta}]) < \varphi_\mu(\omega) \quad (23b)$$

が得られるが, φ_μ の連続微分可能性より, (23) 式は特徴点 $\mu[\tilde{\theta}]$ の定義にほかならない. $\square$

分布 φ を固定し, 領域を移動する問題を考える. まず特徴点が写像の不動点に一致する場合には, 自明な再生過程が次のように構成される.

【補題 3】 縮小写像 $\mu: \Omega \rightarrow \Omega$ の不動点 ω^* が領域 A の形態特徴点ならば ω^* は領域 $\mu(A)$ の条件付き分布 $\varphi^\circ(\omega)$ に関する形態特徴点である. ただし $\varphi^\circ(\omega)$ は次の“境界値保存型”Dirichlet 問題の解である.

$$\Delta\varphi^\circ(\omega) = \rho\varphi^\circ(\omega), \omega \in \mu(\Xi^\varepsilon) \quad (24a)$$

$$\varphi^\circ(\omega) = \varphi(\omega), \omega \in \mu(\partial\Xi^\varepsilon) \quad (24b)$$

$$\varphi^\circ(\omega) = 0, \omega \in \Omega - (\mu(\Xi^\varepsilon) \cup \mu(\partial\Xi^\varepsilon)) \quad (24c)$$

特徴点は, 定義より, 境界形態の影響を受けて移動する. したがって特徴点は写像群に関して一般には不変ではない. ただしその再生過程は, 写像による移動と境界条件変化にもとづく移動との合成として, 次のように構成できる.

【補題 4】 $\nu = \{\mu_i\} \in \mathcal{N}$ とし, 次の 1 パラメータ方程式群で定義される条件付き分布のクラス $\{\varphi^\alpha(\omega), 0 \leq \alpha \leq 1\}$ を考える.

$$\Delta\varphi^\alpha(\omega) = \rho\varphi^\alpha(\omega), \omega \in \Xi^\varepsilon - \bigcup_i \mu_i(\partial\Xi^\varepsilon) \quad (25a)$$

$$\varphi^\alpha(\omega^\circ) = (1 - \alpha) + \alpha\varphi(\omega^\circ), \omega^\circ \in \bigcup_i \mu_i(\partial\Xi^\varepsilon) \quad (25b)$$

$$\varphi^\alpha(\omega) = 1, \omega \in \partial\Xi^\varepsilon \quad (26a)$$

$$\varphi^\alpha(\omega) = 0, \omega \in \Omega - (\Xi^\varepsilon \cup \partial\Xi^\varepsilon) \quad (26b)$$

この条件付き分布 $\varphi^\alpha(\omega)$ に関する形態特徴は, もし存在すれば, $\tilde{\theta}$ および $\bigcup_i \mu_i(\tilde{\theta})$ を結ぶパス上を移動する.

(証明) 解 $\varphi^\alpha(\omega)$, $0 \leq \alpha \leq 1$ が方程式 (10) 式およびシステム

$$\Delta\varphi_i(\omega) = \rho\varphi_i(\omega), \omega \in \mu_i(\Xi^\varepsilon) \quad (27a)$$

$$\varphi_i(\omega') = 1, \omega' \in \partial\mu_i(\Xi^\varepsilon) \quad (27b)$$

$$\varphi_i(\omega') = 0, \omega' \in \Omega - (\mu_i(\Xi^\varepsilon) \cup \partial\mu_i(\Xi^\varepsilon)) \quad (27c)$$

を結ぶホモトピーになっていることに注意する. すなわち

$$\varphi^\alpha(\omega): \varphi_i(\omega) \rightarrow \varphi(\omega), \quad (28)$$

$$\text{for } \alpha: 0 \rightarrow 1, \text{ and } \omega \in \mu_i(\Xi^\varepsilon)$$

である. 解 $\varphi^\alpha(\omega)$ の境界値 $\varphi^\alpha(\omega^\circ)$ に関する連続性より, ベクトル場 $\nabla\varphi^\alpha$ のみたす方程式が次のように得られる.

$$\frac{d\nabla\varphi^\alpha}{d\alpha} = \frac{\partial\nabla\varphi^\alpha}{\partial\alpha} + \nabla[\nabla\varphi^\alpha] \frac{d\tilde{\theta}^\alpha}{d\alpha} \quad (29a)$$

ただし $\tilde{\theta}^\alpha$ は

$$\nabla\varphi^\alpha(\tilde{\theta}^\alpha) = 0, \text{ and } \varphi^\alpha(\tilde{\theta}^\alpha) > 0 \quad (29b)$$

をみたす点である. (29a) 式で $d\nabla\varphi^\alpha/d\alpha = 0$ とおくことにより, $\tilde{\theta}^\alpha$ のパス Q が次のように表現される.

$$Q: \frac{d\tilde{\theta}^\alpha}{d\alpha} = -\left(\frac{1}{\rho\varphi^\alpha}\right) \frac{\partial\nabla\varphi^\alpha}{\partial\alpha}, 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (30)$$

(25) 式より, $\varphi^\alpha(\omega) > 0$, $\omega \in \Xi^\varepsilon$ であるから, 微分方程式 (30) は境界条件

$$\tilde{\theta}^0 \in \tilde{\Theta}, \tilde{\theta}^1 \in \bigcup_{\nu} \mu_i(\tilde{\Theta}) \quad (31)$$

に関して一意解を持つ。補題 1 および補題 3 より、集合 $\tilde{\Theta}$ および $\bigcup_{\nu} \mu_i(\tilde{\Theta})$ は、任意の形態事象 Ξ^ε および写像群 $\nu \in \mathcal{N}$ に対して空ではない。したがって、 $\tilde{\theta}^\alpha$ が存在するならば、 $\tilde{\Theta}$ および $\bigcup_{\nu} \mu_i(\tilde{\Theta})$ を結ぶパス $\mathcal{Q}$ 上になければならない。□

境界条件変化にもとづく特徴点の移動は写像群に関する情報のみでは決定できない。ただし、特徴点定義の基盤となる分布が滑らかに形成されることから、その移動量を次のように見積ることができる。

【補題 5】 パス $\mathcal{Q}$ の存在半径は軟化拡張の幅 ε に関して連続、すなわちパス $\mathcal{Q}$ の両端を $\tilde{\theta}^0, \tilde{\theta}^1$ とすると

$$|\tilde{\theta}^1 - \tilde{\theta}^0| \leq C\varepsilon \quad (32)$$

なる定数 C が存在する。

(証明) (10), (25) および (27) 式より領域 $\mu_i(\Xi^\varepsilon)$ の内部で分布 φ^α が φ と φ_i の線形結合、すなわち $\varphi^\alpha = \alpha\varphi + (1-\alpha)\varphi_i$ となっていることに注意すると

$$\begin{aligned} |\tilde{\theta}^1 - \tilde{\theta}^0| &= \left| \int_0^1 \frac{\nabla \varphi_i(\tilde{\theta}^\alpha) - \nabla \varphi(\tilde{\theta}^\alpha)}{\rho \varphi^\alpha} d\alpha \right| \\ &\leq \frac{\sup_{\omega \in \mu_i(\Xi^\varepsilon)} |\nabla \varphi_i(\omega) - \nabla \varphi(\omega)|}{\rho \inf_{\omega \in \mu_i(\Xi^\varepsilon)} \varphi^\alpha(\omega)} \end{aligned} \quad (33)$$

が得られる。ここで $\varphi^\alpha(\omega)$ の正定性、すなわち

$$\inf_{\omega \in \mu_i(\Xi^\varepsilon)} \varphi^\alpha(\omega) \geq \frac{1}{C_0} \quad (34)$$

なる正定数 C_0 の存在に着目すると次の評価が得られる。

$$|\tilde{\theta}^1 - \tilde{\theta}^0| \leq \frac{C_0}{\rho} \sup_{\omega \in \mu_i(\Xi^\varepsilon)} |\nabla \varphi_i(\omega) - \nabla \varphi(\omega)| \quad (35)$$

また 1 階微分 $\nabla \varphi(\omega)$ は境界条件 $\varphi(\omega^\circ)$ に関して連続であるから

$$\begin{aligned} \sup_{\omega \in \mu_i(\Xi^\varepsilon)} |\nabla \varphi_i(\omega) - \nabla \varphi(\omega)| \\ \leq C_1 \sup_{\omega^\circ \in \partial \mu_i(\Xi^\varepsilon)} |1 - \varphi(\omega^\circ)| \end{aligned} \quad (36)$$

なる正定数 C_1 が存在し、さらに解 $\varphi(\omega^\circ)$ は ω° に関して連続であるから

$$|1 - \varphi(\omega^\circ)| \leq C_2 \inf_{\substack{\omega' \in \partial \Xi^\varepsilon \\ \omega^\circ \in \partial \mu_i(\Xi^\varepsilon)}} |\omega' - \omega^\circ| \quad (37)$$

なる正定数 C_2 が存在する。したがって

$$|\tilde{\theta}^1 - \tilde{\theta}^0| \leq \frac{C_0}{\rho} C_1 C_2 \varepsilon \quad (38)$$

なる評価が成立する。□

アトラクターは特徴点を写像群により拡張したものと見なすことができる。この拡張範囲の見積りとして、次の事前評価が導かれる。

【補題 6】 ν を R^2 での縮小写像群とし、 Θ^* を ν の不動点集合、すなわち

$$\Theta^* = \{\omega_{\mu_i}^* | \mu_i[\omega_{\mu_i}^*] = \omega_{\mu_i}^*, \mu_i \in \nu\} \quad (39)$$

とする。このとき次の性質をみたす有界集合 $\tilde{\Lambda}_\nu$ が存在する。

$$\Lambda \subset \tilde{\Lambda}_\nu \quad (40a)$$

$$\eta[\tilde{\Lambda}_\nu, \Theta^*] \leq \text{diam}[\Lambda \cup \Theta^*] \quad (40b)$$

$$\bigcup_{\nu} \mu_i(\Lambda) \subset \tilde{\Lambda}_\nu \quad (40c)$$

ここに $\eta(\cdot, \cdot)$ は Hausdorff 距離を表し、 $\text{diam}(\cdot)$ は集合の直径を表す。

(証明) 領域 $\tilde{\Lambda}_\nu$ を

$$\tilde{\Lambda}_\nu = \bigcup_{\nu} \tilde{\Lambda}[\mu_i] \quad (41a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}[\mu_i] = \left\{ \omega \in \Omega \mid |\omega - \omega_{\mu_i}^*| \leq \max_{\xi \in \Lambda} |\xi - \omega_{\mu_i}^*|, \right. \\ \left. \mu_i[\omega_{\mu_i}^*] = \omega_{\mu_i}^*, \mu_i \in \nu \right\} \end{aligned} \quad (41b)$$

と定義する。定義より $\Lambda \subset \tilde{\Lambda}_\nu$, $\Theta^* \subset \tilde{\Lambda}_\nu$ であり、かつ写像の縮小性

$$|\mu_i[\omega] - \mu_i[\omega_{\mu_i}^*]| < |\omega - \omega_{\mu_i}^*|, \text{ for any } \mu_i \in \nu \quad (42)$$

より

$$\mu_i[\Lambda] \subset \tilde{\Lambda}_\nu, \text{ for any } \mu_i \in \nu \quad (43)$$

が得られる。ここで

$$\Theta^* \subset \tilde{\Lambda}_\nu \Rightarrow \max_{\theta \in \Theta^*} \left\{ \min_{\xi \in \tilde{\Lambda}_\nu} |\theta - \xi| \right\} = 0 \quad (44)$$

に注意すると

$$\begin{aligned} \eta[\tilde{\Lambda}_\nu, \Theta^*] &= \max_{\xi \in \tilde{\Lambda}_\nu} \left\{ \min_{\theta \in \Theta^*} |\xi - \theta| \right\} \\ &= \max_{\mu_i \in \nu} \left\{ \max_{\xi \in \tilde{\Lambda}[\mu_i]} \left\{ \min_{\theta \in \Theta^*} |\xi - \theta| \right\} \right\} \\ &\leq \max_{\mu_i \in \nu} \left\{ \max_{\xi \in \Lambda} \{ |\xi - \omega_{\mu_i}^*| \} \right\} \\ &= \max_{\xi \in \Lambda} \left\{ \max_{\theta \in \Theta^*} |\xi - \theta| \right\} \\ &\leq \max_{\xi, \theta \in \Lambda \cup \Theta^*} |\xi - \theta| \\ &= \text{diam}[\Lambda \cup \Theta^*] \end{aligned} \quad (45)$$

が導かれる。□

6. 定理の証明

以上の準備のもとに定理の証明を行う。

6.1 定理1の証明

特徴点 $\tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}$ にまず写像 ν を施し、ついでパス Q に沿って移動させる $\nu-Q$ 変換を考える。このとき仮定 (13) 式および補題2により集合 $\tilde{\Theta}$ の写像 $\bigcup \mu_i(\tilde{\Theta})$ は Ξ に含まれ、補題5によりパス Q に添った移動範囲は高々 $C\varepsilon$ に留まることになる。さて $\Delta\varphi(\omega) > 0$, $\omega \in \Xi^\varepsilon$ より、任意の $\delta > 0$ および $\tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}$ に対して領域 $\langle \tilde{\theta} \rangle_\delta$ は空ではない。したがって $B_{C\varepsilon}(\tilde{\theta}) \subset \langle \tilde{\theta} \rangle_\delta$, $\forall \tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}$ となるように $\varepsilon > 0$ を定めることにより、 $\tilde{\Theta}$ は Ξ 内点の $C\varepsilon$ 近傍に $\nu-Q$ 変換されることになる。ところで領域 Ξ の写像群 ν に関する自己相似性より、この $\nu-Q$ 変換により形態特徴 $\tilde{\Theta}$ は再生されなければならない。つまり $\nu-Q$ 変換により生成される点の内パス Q の途中で消滅しないものを Θ とすると、 $\Theta \neq \emptyset$ かつ $\tilde{\Theta} \subset \Theta$ でなければならない。これは (14) 式の成立を意味する。

6.2 定理2の証明

次のように定義される集合列 $\hat{\Theta}_t$, $t=1,2,3,\dots$ を考える。

$$\hat{\Theta}_{t+1} = \bigcup \mu_i(\hat{\Theta}_t) \quad (46a)$$

$$\hat{\Theta}_0 = \Theta \quad (46b)$$

仮定 (17a) 式より、 $\hat{\Theta}_0 \neq \emptyset$ かつすべての $t \geq 0$ に対して $\hat{\Theta}_t \subset \hat{\Theta}_{t+1}$ である。また、補題6よりすべての $t \geq 0$ に対して $\hat{\Theta}_t$ は有界である。したがって集合列 $\hat{\Theta}_t$ は収束する。この極限を Ξ と書くと、極限点の唯一性から、 Ξ は写像群 ν のアトラクターに一致する、すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\Theta}_t = \Xi = \bigcup \mu_i(\Xi) \quad (47)$$

となり、(46b) および (47) 式より条件 (18) 式の成立が導かれる。

7. 形態検出への応用

上記定理1, 2にもとづいて形態検出系を構成してみる。ここで考察する問題は次のように述べられるものとする。

【形態検出問題】事前に設定された写像群のクラス ν にもとづいて取得された2値画像 A を生成する写像群 $\nu \in \mathcal{V}$ を有限手順で決定せよ。

以下、観測は十分精度より行われ、近似 $A \approx \Xi^\varepsilon$ が成立するものとする。この場合の上記問題に対する検出系の設計戦略は以下のとおりである。

Step 1 観測 A にもとづいて分布 φ を生成し、形態特徴 $\tilde{\Theta}$ を得る。このプロセスは事前情報を必要と

しない。ただし有限手順の要請から、(5) 式で得られる分布 φ を領域 A の内部で次のように逐次近似する。

$$\frac{\partial \varphi(\omega)}{\partial t} = \Delta \varphi(\omega) - \rho \varphi(\omega), \omega \in A \quad (48a)$$

$$\varphi(\omega) = 1, \omega \in \Omega - A \quad (48b)$$

ここでは楕円方程式を拡散方程式に置き換えるとともに、境界条件を“形態が検出されない領域での分布の拘束”に置き換えている。

Step 2 形態特徴 $\tilde{\Theta}$ がアトラクター内にある、すなわち定理1の前提 (13) 式がみたされると仮定し、不変特徴 Θ を検出する。具体的にはすべての $\nu \in \mathcal{V}$ に対して条件 (14) 式の成立を調べる。このとき、特徴点 $\tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}$ に対して領域 $\langle \tilde{\theta} \rangle_\delta$ は $\tilde{\theta}$ の近傍 $B_{\delta'}[\tilde{\theta}]$ で近似する。この条件 (14) 式にもとづく写像群の選択は、各 $\nu \in \mathcal{V}$ に対して次のアルゴリズムを実行することにより達成される。

$$\Theta_{\tau+1}^\nu = \{\omega \in \Theta_\tau^\nu \mid \omega \in \bigcup_{\theta \in \tilde{\Theta}_\tau} B_{\delta'}[\mu[\theta]], \mu \in \bigcup \nu\} \quad (49a)$$

$$\Theta_0^\nu = \tilde{\Theta} \quad (49b)$$

アルゴリズム (49) 式により生成される集合列 $\{\Theta_\tau^\nu\}$ は τ に関して単調減少であり、集合 $\tilde{\Theta}$ が有界ならば有限回数で定常状態の集合 $\{\Theta^\nu\}$ に達する。 $\{\Theta^\nu\} = \emptyset$ ならば、“事前情報 ν では検出できず”と判断してプロセスを停止し、 $\{\Theta^\nu\} \neq \emptyset$ ならば $\Theta \in \{\Theta^\nu\}$ と判断して Step3 に進む。

Step 3 定理2にもとづくアトラクターの事前予測を行い、適切な写像群を選択する。具体的には各 $(\tilde{\Theta}^\nu, \nu)$ に対して条件 (17b) 式のテストを行い、 A と共通領域を持つアトラクターを生成する写像群を検出結果とする。条件 (17b) 式のテストに成功する対 $(\tilde{\Theta}^\nu, \nu)$ が存在しない場合には“適切な写像群は検出されず”として処理を終える。

Step1~3 を実装したソフトウェアを作成し、シミュレーションを行った。シミュレーションに当たっては画面を 32×32 画素に離散化し、この格子点上で形態および条件付き分布を表現した。具体的には、モンテ・カルロ法によりフラクタル・アトラクターの構成点を発生させ最近接格子点を軟化拡張点とともに拡散方程式 (48) 式を差分近似することにより条件付き分布を求めた。本実験では、 $\rho \delta x^2 = \rho \delta y^2 = 1$ と定めた上で (48) 式にしたがう場 φ の発展を10回繰り返し、この段階で格子点間での分布値を比較することにより形態特徴 $\tilde{\Theta}$ を検出した。すなわち隣接する周囲画素での分布値を上回らない分布値

を持つ点を特徴点と定めた。これに対応して近傍 $B_{\delta'}[\tilde{\theta}]$ のサイズ, δ' を 1 画素に設定した。これは、特徴点決定のあいまいさと不変特徴計算の許容誤差をバランスさせたことを意味する。

本シミュレーションでは、縮小率 [Reduction:%], 回転角 [Rotation:°], 左右反転 [Flip: 有=1, 無=0], 左右移動 [U:%], 上下移動 [V:%] を組み合わせて縮小画像を構成した。事前に設定した画像群 $\mathcal{V}$ は SIERPINSKI, CARPET, FERNs, TREES, ROAD および FERN の 6 通りである。このうち、例えば FERN は次の構成を持つ。

```
FERN=((((Reduction 84)(Rotation 4)(Flip 1)(U 4)
(V 17))((Reduction 33)(Rotation-65)(Flip -1)(U
30)(V -60))((Reduction 33)(Rotation-65)(Flip 1)
(U -30)(V -52))((Reduction 9)(Rotation 0)(Flip
1)(U 0)(V -80)))
```

これらの画像群は、それぞれ Fig. 1 に示すアトラクターを持つ。これらのアトラクターを観測量として与え、上記 Step1~3 にしたがって不変特徴ならびに画像群を検出した。検出結果の一例を Fig. 2 に示す。図中 (a) は観測量 (observables), 形態特徴 (features), 再生アトラクター (restoration) および画像群のクラス (coding) を表し、(b) は画像群クラスの内訳を示す。ここでは観測アトラクターを生成する画像 (FERN) が検出されている。同様の結果が Fig. 1 のほかのアトラクターに対しても確かめられた。このことは定理 1 の仮定は有限の分解能を前提とするデジタル画像に対してもさほど制限的でないことを意味する。ただし定理 2 の結論が示唆するように、この検出は一意的ではない。実際、Fig. 2 の例では、類似のアトラクターを生成する画像 FERNs も Step1 で抽出された形態特徴上で不変特徴を生成している。現段階の検出手順ではこの多義性を完全に解消することはできないが、これらの実験例により、定理 2 の規定するパターン関連性

Fig. 1 Observed imagery are assumed to be generated as attractors of contraction mappings

(a) The detection scheme extracts discrete information (features) in given image (observables) to identify a set of mappings (coding) to generate attractors (restoration). In this case, a sample of FERN-attractor is provided as the observation.

(b) The scheme detects the generator of given attractor (FERN) as well as a set of mappings that yields similar pattern (FERNs).

Fig. 2 Simulation results

は、ある程度の画像候補の絞り込みを行う上で有効であると考えられる。

8. おわりに

自己相似パターンに関する条件付き分布にもとづいてひとつの不変特徴を定義した。形態が十分正確に観測されるならばこの不変特徴は固定された自己相似画像にもとづく有限手順で検出され、画像が非冗長的ならば不変特徴は観測形態と重なるアトラクターを生成する。これらの性質にもとづいて形態検出アルゴリズムを構成し、シミュレーションを通してその妥当性を確かめた。不変特徴の検出には特徴点の近傍領域を設定する必要があるが、これら近傍と特徴点は同一のパラメータで定義できる。この意味で不変特徴にもとづく形態検出過程は一貫したアルゴリズムとして表現できる。またこのアルゴリズムは近傍画素間の演算と離散化された形態特徴上での一様繰り返し計算に還元されるという意味で実際のでもある。このアルゴリズムは“事前に想定した形態が画像内に存在するか?”に対して答えを出すことができる。ただし形態は、その内部に他の形態を含みうるという意味で、通常

最小性をみたさない。これに対応して本アルゴリズムによる検出結果は一意的ではない。この多義性は、形態形成過程の本質的非決定性に起因するものであり、その解消には検出目的の形式化を必要とする。検出目的が命題的に与えられるような場合^{8),14)}には目的生成過程をダイナミカル・システムとして表現できるが¹⁰⁾、このようなダイナミックな情報環境と検出機構の統合は今後の課題である。本論文を草するにあたり、確率システム理論の形状情報処理への応用に関して御指導賜った京都工芸繊維大学名誉教授 故砂原善文先生に深甚の謝意を表す。

参考文献

- 1) M. F. Barnsley: *Fractals Everywhere*, Academic Press (1988)
- 2) M. F. Barnsley and L. P. Hurd: *Fractal Image Compression*, AK Peters (1993)
- 3) M. C. Escher(D. Geis Ed.): *29 Master Prints - Introduction by M. C. Escher*, Harry N. Abrams, Inc. (1983)
- 4) M. C. Escher: *Escher on Escher- Exploring the Infinite-*, Harry N. Abrams (1989)
- 5) G. Fauconnier: *Mental Spaces*, The MIT Press (1985)
- 6) J. E. Hutchinson: Fractals and self similarity; *Indiana Univ. Math. J.*, Vol. 30, No. 5, pp. 713-747 (1981)
- 7) K. Kamejima, I. Takeuchi, T. Hamada and Y. C. Watanabe: A direct mental image manipulation approach to interactive robot operation; *Proc. IEEE Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems*, pp. 673-678 (1988)
- 8) K. Kamejima, T. Hamada, M. Tsuchiya and Y. C. Watanabe: From self navigation to driver's associate: an application of mobile robot vision to a vehicle information system; *Vision-based Vehicle Guidance* (I. Masaki Ed.), Springer-Verlag, pp. 173-203 (1992)
- 9) K. Kamejima: On conditional probability induced by self-similarity patterns; *Proc. 26th ISCIE Symp. Stochastic Systems Theory and Its Applications*, pp. 95-100 (1995)
- 10) K. Kamejima: Open logic computation on self-referential symbols with application to environmental complexity evaluation; *Proc. 4th IEEE Int. Workshop on Robot and Human Communication*, pp. 135-140 (1995)
- 11) J. Lansdown: Chaos, design and creativity; *Fractals and Chaos* (A. J. Crilly, R. A. Earnshaw and H. Jones, Eds.), Springer-Verlag, pp. 211-224 (1991)
- 12) B. B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman (1983)
- 13) M. McGuire: *An Eye for Fractals-A Graphic and Photographic Essay*, Addison-Wesley (1991)
- 14) Y. C. Ogawa, K. Kamejima and Y. Nakano: Syntactic image analysis for environment understanding; *Proc. IEEE Int. Workshop on Industrial Applications of Machine Vision and Machine Intelligence*, pp. 266-271 (1987)
- 15) H. F. Smith: A garden of fractals; *Fractals in the Fundamental and Applied Science* (H.-O. Peitgen, J. M. Henriques and L. F. Pendo, Eds.), North-Holland, Amsterdam, pp. 407-424 (1991)