LMI による 2 慣性共振系の制御*

杉江 俊治**・濱本 研一**

Controller Design of Two Mass-Spring System via LMI*

Toshiharu SUGIE** and Kenichi HAMAMOTO**

This paper gives a controller design method of 2 mass-spring system which satisfies the given H^∞ control performance and pole assignment in the prescribed region in the presence of physical parameter perturbations. In addition, its effectiveness is demonstrated by experiments.

1. はじめに

近年注目されている制御系の設計手法として線形行列不等式 (LMI) を用いた手法が挙げられる。これまでに、LMI を用いて状態フィードバック制御則を設計する手法に関しては、それぞれの設計仕様について (例えば H^∞ ノルム条件, H^2 ノルム条件, 極配置) は, 参考文献 1), 2) 等で述べられている。LMI によって状態フィードバック制御則を求める問題は, (1) 大域的最適解を求められること, (2) 多数の設計仕様を容易に扱えること, などの利点がある。また LMI の設計手法では, 対象となるシステムのあらかじめ指定した物理パラメータの変動に対するロバスト性も, 行列ポリティープ^{3), 1)}などによって, 保証することができる。このような LMI の実用化のためには, 種々の制御対象に対する具体的な設計例の積み重ねと実験検証が重要であると思われるが, そのような報告はいままでほとんどなされていない。

そこで本論文では, 2 慣性共振系を制御対象として, (ア) システムの物理パラメータの変動に対するロバスト性, (イ) H^∞ 制御仕様, (ウ) 指定した領域への極配置, という三つの設計仕様を与え, これらを満足する状態フィードバック制御則を LMI に基づいて具体的に設計し, 実験によってその有効性を検証する。その際, 制御対象を, ディスクリプタ表現形式で定式化したときの各制御仕様 (H^∞

ノルム条件と極配置) の LMI を与えると同時に, 極配置については円領域に比べ自由度のある楕円領域の極配置 LMI を示す。

なお, 本文で使っている言葉, 記号は, 特に断りのない場合は以下のとおりである。

$\lambda(M)$: 行列 M の固有値

$\|G\|_\infty$: 伝達関数行列 G の H^∞ ノルム,

$G \in \mathcal{RH}_\infty$ のとき, 次式で定義される。

$$\|G\|_\infty \triangleq \sup_{\omega} \sigma_{\max}(G(j\omega))$$

ここで, $\sigma_{\max}(M)$ は行列 M の最大特異値, $\mathcal{RH}_\infty$ はプロパー安定な実係数の有理行列の集合である。

2. 制御対象と設計仕様

2.1 2 慣性共振系とモデル化

本論文では Fig. 1 に示されるような, モータが入力信号を受け回転し, 板バネでつながれた円盤負荷の位置を制御するシステムを考える。

各定数を θ_1 : モータの回転角 [rad], θ_2 : 円盤負荷の回転角 [rad], j_1 : モータの慣性モーメント [Nms²/rad], j_2 : 円盤負荷の慣性モーメント [Nms²/rad], d_1 : モータの粘性係数 [Nms/rad], d_2 : 円盤負荷側の粘性係数 [Nms/rad], k : バネ定数 [Nm/rad], τ_0 : モータからのトルク入力 [Nm], ν : クーロン摩擦力 [Nm], とおく。このとき, 系の運動方程式は

$$\begin{cases} j_1 \ddot{\theta}_1 + d_1 \dot{\theta}_1 + k(\theta_1 - \theta_2) = \tau_0 - \nu \\ j_2 \ddot{\theta}_2 + d_2 \dot{\theta}_2 + k(\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

* 原稿受付 1995 年 7 月 4 日

** 京都大学 工学部 Faculty of Engineering, Kyoto University; Gokanoshio, Uji city, Kyoto 611, JAPAN

Key Words: LMI, parameter perturbation, H^∞ control, pole assignment in ellipsoid domain, descriptor.

Fig. 1 Two mass-spring system

と記述できる. (1) 式で $v=0$ とすると制御対象のディスクリプタ形式によるシステムの表現は次のようになる.

$$\begin{aligned} E_p \dot{x}(t) &= A_p x(t) + B_p u(t) \\ y(t) &= C_p x(t) \end{aligned} \quad (2)$$

ただし, $x(t) = [\theta_1 \ \dot{\theta}_1 \ \theta_2 \ \dot{\theta}_2]^T$, $u(t) = \tau_0$, $y(t) = \theta_2$,

$$E_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k & -d_1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & -k & -d_2 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$C_p = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \quad (5)$$

である.

2.2 積分型サーボ系の構成

ここでは目標値との定常偏差をなくすために, Fig. 2 に示す積分型サーボ系^{3),4)}を構成することを考える. この系に対する拡大偏差系は以下のように示される. $v(t)$ を積分器の状態変数とすると,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_p \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}_p \tilde{x}(t) + \tilde{B}_p \tilde{u}(t) \\ e(t) &= \tilde{C}_p \tilde{x}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで, $\tilde{E}_p$, $\tilde{A}_p$, $\tilde{B}_p$, $\tilde{C}_p$ は

$$\tilde{E}_p = \begin{bmatrix} E_p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\tilde{A}_p = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ -C_p & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_p = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_p = [-C_p \ 0] \quad (8)$$

Fig. 2 Integral type servo system

であり, $\tilde{x}(t) = [\hat{x}(t) \ \hat{v}(t)]^T$, $\tilde{u}(t)$ は拡大系の状態, 制御入力である. ただし, $\hat{x}(t), \hat{v}(t), \tilde{u}(t)$ は定常値との偏差, $e(t)$ は目標値 r と $y(t)$ の偏差である. またこのときの状態フィードバック制御則は

$$\tilde{u}(t) = K \tilde{x} = [F \ G] \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

となる.

ここでの問題は以下に述べる設計仕様を満たす状態フィードバックゲイン K を LMI に基づいて求めることである.

2.3 設計仕様

設計仕様として以下のものを考える.

(ア) 物理パラメータの変動

変動に対するロバスト性に関しては, 変動を係数行列のパラメータ変動として考え, 係数行列を行列ポリトープ^{1),3)}の形でとることによって保証する.

今回, 円盤負荷の慣性モーメント j_2 と板バネのバネ定数 k が変動する場合を考える.

$$\begin{aligned} j_{2,\min} &\leq j_2 \leq j_{2,\max} \\ k_{\min} &\leq k \leq k_{\max} \end{aligned} \quad (10)$$

本論文では, 今回の設計仕様のように円盤負荷慣性モーメントとバネ定数が変動する場合に, 保守性を少なくするためにディスクリプタ表現形式を用いてシステムを記述することにした⁵⁾.

(イ) H^∞ 制御仕様

Fig. 2 の w から y までの伝達関数 G_{yw} の $\|G_{yw}\|_\infty$ を最適化し, 出力側の低感度化をはかる. このシステムを (6) 式のようにディスクリプタ形式で表し, 外乱入力 w を加えると,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_p \dot{\tilde{x}} &= (\tilde{A}_p + \tilde{B}_p K) \tilde{x} + \tilde{B}_w w \\ y &= \tilde{C}_p \tilde{x}(t) + \tilde{D}_w w \end{aligned} \quad (11)$$

となる. ただし, ここで K は状態フィードバックゲインで,

$$\tilde{B}_w = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1]^T, \quad \tilde{D}_w = 1 \quad (12)$$

である。

(ウ) 指定領域への極配置

閉ループ系の極を指定領域に配置することにより、過渡応答の整形を目的とする。ここでは楕円領域と極の実数部をある値以下にするような領域に同時に含まれるように極を配置することを考える。つまり、閉ループ系の極を $\lambda = x + iy \in C$ とすると x, y について

$$\frac{(x+c_i)^2}{r_a^2} + \frac{y^2}{r_b^2} < 1, \quad \text{かつ } x < \phi (< 0) \quad (13)$$

が成り立つように K を選ぶ。ここで、 c_i : 楕円の中心、 r_a : x 方向の径、 r_b : y 方向の径、 ϕ : 実部の制限値、で与えられる定数である (Fig. 3 の斜線部)。

Fig. 3 Pole assignment region

以下では (ア) を満たすすべてのパラメータ変動に対して、(イ)、(ウ) の仕様を満足する制御則を設計する。

3. LMI による設計

ここでは設計の数学的準備として LMI について説明し、各制御仕様についてどのように記述されるかを示す。

また LMI では例えば可安定対 (A, B) に対する安定化状態フィードバックゲイン K は次のようにパラメトライズされる²⁾。

$$K = YX^{-1}, \quad X > 0, \quad X = X^T \\ (AX + BY) + (AX + BY)^T < 0 \quad (14)$$

このパラメタリゼーションを使って、各制御仕様を満たす状態フィードバック制御則が求められることを示す。

3.1 H^∞ ノルム条件

【定理 1】 (11), (12) 式で与えられるシステムに対して、閉ループ系が安定かつ、 w から y への伝達関数 G_{yw}

に対して $\|G_{yw}\|_\infty < \gamma$ となる K が存在するための必要十分条件は

$$\begin{bmatrix} J(X, Y) & \tilde{B}_w & \tilde{E}_p X \tilde{C}_p^T \\ \tilde{B}_w^T & -\gamma I & \tilde{D}_w^T \\ \tilde{C}_p X \tilde{E}_p^T & \tilde{D}_w & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

$$J(X, Y) = \tilde{A}_p X \tilde{E}_p^T + \tilde{E}_p X \tilde{A}_p^T \\ + \tilde{B}_p Y \tilde{E}_p^T + \tilde{E}_p Y^T \tilde{B}_p^T \quad (16)$$

を満たす正定対称行列 X と変数 Y が存在することである (ただし、 I は単位行列)。また、このときの状態フィードバックゲイン K は

$$K = YX^{-1} \quad (17)$$

となる。

(証明) 付録 2.1 参照 □

3.2 指定する領域への極配置

(13) 式で表されるような楕円形領域を考える。このとき、次の補題を考える。

【補題 1】 行列 M の固有値 $\lambda(M)$ が (13) 式で表される楕円領域に存在するための必要十分条件は、

$$\begin{bmatrix} c(MP + PM^T) + dP & aPM^T + bMP \\ aMP + bPM^T & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

を満たす、ある適当な正定対称行列 P が存在することである。ただし、

$$a = \frac{r_b + r_a}{2}, \quad b = \frac{r_b - r_a}{2}, \quad (a > b), \\ c = c_i r_b^2, \quad d = (c_i^2 - r_a^2) r_b^2 \quad (19)$$

である。

(証明) 付録 1. 参照 □

これを (11) 式のシステムについて考えると、次の定理が成り立つ。

【定理 2】 (11) 式で表されるシステムに対し、閉ループ系の極を指定した (13) 式で表されるような楕円領域に配置する状態フィードバック制御則 $\tilde{u} = K\tilde{x}$ が存在するための必要十分条件は、次式を満たす正定対称行列 X と変数 Y が存在することである。

$$\begin{bmatrix} c(M + M^T) + d\tilde{E}_p X \tilde{E}_p^T & aM^T + bM \\ aM + bM^T & -\tilde{E}_p X \tilde{E}_p^T \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

ただし、

$$M = \tilde{A}_p X \tilde{E}_p^T + \tilde{B}_p Y \tilde{E}_p^T \quad (21)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_b + r_a}{2}, \quad b = \frac{r_b - r_a}{2}, \quad (a > b), \\ c &= c_i r_b^2, \quad d = (c_i^2 - r_a^2) r_b^2 \end{aligned} \quad (22)$$

(証明) 付録 2.2 参照 $\square$

このとき H^∞ ノルム条件の LMI の場合と同様にして (17) 式より, 状態フィードバック制御則が求められる.

(注意) 一般に LMI ((18) 式) の極配置の領域として, Table 1 に示されるようなものがある. これらの LMI は (18) 式の a, b, c, d をそれぞれ適当に与えることによって実現することができる (特に表記しなかったが, vertical strip もできる).

Table 1 Domain of pole assignment

左半面 (open left half plane)
$a = b = d = 0, c = 1$
極の実数部が $-\phi (\phi > 0)$ 以下 (ϕ degree of stability)
$a = b = 0, c = 1, d = 2\phi$
円内配置 中心 $-c_i$, 半径 r (disc)
$a = 1, b = 0, c = c_i, d = c_i^2 - r^2$
極の虚数部の絶対値が $\delta (> 0)$ 以下 (horizontal strip)
$a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = 0, d = -\delta^2$
楕円内配置 (ellipsoid)
(19) 式参照
放物線内配置 ($x = -\alpha^2 y^2 - c_i^2$) (parabola)
$a = \frac{\alpha}{2}, b = -\frac{\alpha}{2}, c = \frac{1}{2}, d = c_i^2$

3.3 設計手順

複数の制御仕様を満たす状態フィードバック制御則の設計とは, 3.1, 3.2 で与えた LMI の式を満たす共通の解 X, Y が存在するかどうかを吟味することである. 存在すればその解 X, Y を使って, 仕様を満たす状態フィードバック制御則 K を求めることができる.

次にパラメータ変動に対しても, 得られた状態フィードバック制御則が仕様を満足しているかどうかについて考察する.

状態空間表現されたシステムの場合には, 変動する物理パラメータを持つ各係数行列の端点行列によって与えられる各制御仕様の LMI を満たす共通解を見つければよ

いことが知られている (端点条件). その一方で, ディスクリプタ形式を用いた場合, 同様の方法を一般に用いることはできない. しかし, 本論文が対象にしている 2 慣性共振系では, E_p, A_p に含まれる変動パラメータは互いに独立である. よって H^∞ ノルム条件の LMI の場合は参考文献 6) の定理 3 の証明と同様の手順により, 端点条件だけでロバスト性を保証できることが証明される. 極配置 LMI の場合は本論文で与えている E_p が対角行列であることを考慮すると, 端点条件のみでロバスト性を保証できる (付録 3. 参照).

上述の考察から, 本論文では端点の LMI を満足する状態フィードバック制御則を求め, 設計を行った.

4. 実験検証

4.1 実験装置概略および同定実験

今回用いる 2 慣性共振系の実験装置は Fig. 1 の形で表される. このモータに変速機が直結しており, モータの実際に出力できるトルクは 5.3[Nm] までである. システムの状態に関しては実際に観測できる値がモータ, 円盤の回転角のみなので, それぞれの角度を差分することで得られた値を, デジタルフィルタにかけることによって, モータの角速度と円盤の角速度を近似する. デジタルフィルタとして, 次の伝達関数で表される一次のローパスフィルタを用いた.

$$G_{\text{filt}}(s) = \frac{a}{s+a} \quad (a: \text{折れ点周波数}) \quad (23)$$

a は試行錯誤の結果, 600[rad/s] と定めた.

今回の実験したステップ応答の目標値は 90° で, サンプリングタイムは 1[ms] である.

次に 2.1 で与えた制御対象の各定数の値を同定する. 円盤負荷と板バネは状態フィードバックゲインの変動に対する性能を検証するために 2 種類用意した. 負荷側の粘性係数 d_2 と各板バネのバネ定数 k はトルク $\tau_0 = 0$ [Nm] のときの振動の周期 T と減衰 a から同定した. クーロン摩擦係数 ν はモータに一定のトルクを与えてやることで得た ($\nu = 0.54$ [Nm]). モータの慣性モーメント j_1 および粘性係数 d_1 は, 板バネを外してモータを回転させることによって同定する. j_1, d_1 は ν 以上の一定なトルクでモータを回したときに得られた計測値と 2.1 の (1) 式の第一式を $\theta_2 = 0$ とし, そのときの $\tau = \tau_0 - \nu$ から θ_1 までの伝達関数 $G_{\theta_1 \tau}$ のステップ応答とがもっとも一致する値とした. また, 入力線形化のため ν は無視する. ここで, ν は大きいにもかかわらず無視しているために, シミュレーションと実験結果の整合性から d_1 は同定値の 7 倍を公称値と定めた.

同定の結果, 各定数の値は Table 2 のとおりである.

Table 2 Physical parameters

j_1	4.50×10^{-3}	[Nms ² /rad]	—	—
d_1	1.05×10^{-1}	[Nms/rad]	d_2	5.70×10^{-3} [Nms/rad]
$j_{2,\min}$	9.00×10^{-4}	[Nms ² /rad]	$j_{2,\max}$	2.76×10^{-3} [Nms ² /rad]
$k_{\min}$	7.24	[Nm/rad]	$k_{\max}$	9.16 [Nm/rad]

4.2 状態フィードバック制御則の設計

制御仕様の極配置領域の決定は次のようにした。

極配置する領域は、Fig. 3 の斜線部のようにおいた。設計では Fig. 3 の ϕ 、交点の高さ j を小さくし、 η の値は大きくする。また中心 c_i は上のことが達成できるような値にする。加えて今回の実験機の能力に制限（最大トルク 5.3[Nm]）があるので、実験可能な状態フィードバックゲインが得られる範囲で極配置領域を定めた。

これらを考慮して、制御仕様に対して求められた結果は次のとおりである。

ただし、 $\|G_{yw}\|_{\infty} < \gamma$ の最適値を γ_{opt} とする。

状態フィードバック

ゲイン F : $[-388 \ -1.76 \ 182 \ -5.06]$

積分器のゲイン G : 2.07×10^3

γ の最適値 γ_{opt} : 2.50

極配置の領域

ϕ : -16 , 中心 : -30 , η : -250 , 交点 : 288

Fig. 4 がパラメータが変動した時の極位置をプロットした図、Table 3 は変動の各端点での極を示した表で、Fig. 5 がこのときの感度関数 $S(s)$ のゲイン線図である。

Fig. 4 Pole location of closed loop system

Fig. 5 Gain plot of S

4.3 実験結果

このようにして設計された状態フィードバックゲインを用いてこの制御則がパラメータの変動に対して実際、ロバスト性を有しているのかを検証するために、先にも述べたように変動の各端点での実験を行った。実験は目標値 90° の位置決め制御の時の円盤負荷側回転角のステップ応答を行った。

まずこの系の特性および今回考えた変動の大きさを見る上で、モータ側のみ制御したときの負荷のステップ応答を Fig. 6 に示す。モータの応答は今回 LMI で設計した状態フィードバックゲインとほぼ同じ速さである。この図は対象としている系が振動的であり、かつ負荷とバネ定数の変動により系の特性が大きく変わることを示している。

つぎに LMI で得られた状態フィードバックゲインによるステップ応答を Fig. 7 に示す。図にはやはり Table 3 の 4 通りの端点に対応した応答を示しているが、変動にかかわらずほぼ同様の応答を示していることがよくわかる。先に示した、システムと変動の特性を考えると、今回 LMI で設計し得られた状態フィードバック制御則のシミュレーション、および実験で得られた結果は満足のいくものであるといえる。付け加えておくと、極配置の選び方によって LMI の解の性能が変わることがあった。実際、

Table 3 Pole location of extreme cases

case1 $\begin{pmatrix} j_{2,\max} \\ k_{\min} \end{pmatrix}$	$-1.83 \times 10^2 \pm 1.94 \times 10^2 i$ $-1.73 \times 10^1 \pm 2.72 \times 10^1 i$ -1.63×10^1	case3 $\begin{pmatrix} j_{2,\max} \\ k_{\max} \end{pmatrix}$	$-1.75 \times 10^2 \pm 1.90 \times 10^2 i$ $-2.48 \times 10^1 \pm 2.54 \times 10^1 i$ -1.82×10^1
case2 $\begin{pmatrix} j_{2,\min} \\ k_{\min} \end{pmatrix}$	-2.08×10^2 $-8.98 \times 10^1 \pm 1.99 \times 10^2 i$ $-1.70 \times 10^1 \pm 9.20 i$	case4 $\begin{pmatrix} j_{2,\min} \\ k_{\max} \end{pmatrix}$	-2.49×10^2 $-7.00 \times 10^1 \pm 2.19 \times 10^2 i$ $-1.65 \times 10^1 \pm 9.11 i$

Fig. 6 Step responses of two extreme cases (PD control for motor)

Fig. 7 Output step response via LMI

極配置を楕円領域のみで指定したときは、今回 LMI で得られた状態フィードバックゲインよりも過渡応答が遅く、 γ_{opt} の値も大きいものになった。

5. おわりに

本論文では 2 慣性共振系に与えられた制御仕様に対し、LMI を用いて状態フィードバック制御則の具体的な設計例を与えた。ディスクリプタ形式でシステムを記述することで、変動に対してロバスト、かつ保守性の少ない状態フィードバック制御則を、3. で示したディスクリプタ形式の LMI を使って求めた。今回設計仕様は、(ア) 円盤負荷とバネ定数の変動に対してロバスト性を持つこと、(イ) 低感度化を H^∞ ノルム条件によって行うこと、(ウ) 指定領域内に閉ループの極を配置することを与えた。そして、実際に 2 慣性共振系の位置決め制御の実験によってその有効性を検証した。

参考文献

- 1) S. Boyd et al: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM (1994)
- 2) 小原, 杉江: 凸最適化を用いた制御系設計; システム/制御/情報, Vol. 38, No. 3, pp. 138-146 (1994)
- 3) 増淵, 小原, 須田: 構造的変動を持つ制御対象に対する積分型ロバストサーボ系の設計; 計測自動制御学会論文集, Vol. 30, No. 9, pp. 1051-1059 (1994)
- 4) 藤崎, 池田: 2 自由度積分型最適サーボ系の構成; 計測自動制御学会論文集, Vol. 27, No. 8, pp. 907-914 (1991)
- 5) 平田, 劉, 美多: 2 慣性共振系に対する μ -synthesis を用いた制振制御; 第 22 回制御理論シンポジウム, pp. 81-86 (1993)
- 6) 増淵, 小原, 須田: 状態フィードバックによるディスクリプタシステムのロバスト安定化; 計測自動制御学会論文集, Vol. 30, No. 12, pp. 1553-1555 (1994)

付 録

付録 1. 楕円領域の極配置

(証明) 十分性:

行列 M^T の固有値, 固有ベクトルを λ, z とする。ここで

$$Z = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \quad (\text{A1})$$

として, (18) 式の両側から Z^*, Z をかけると,

$$\begin{bmatrix} c(\lambda + \bar{\lambda}) + d & a\lambda + b\bar{\lambda} \\ a\bar{\lambda} + b\lambda & -1 \end{bmatrix} z^* P z < 0 \quad (\text{A2})$$

を得る。\$P\$ は正定行列なので、\$z^* P z > 0\$ となる。よって、係数を (19) 式のようにおくと、行列の固有値は (13) 式で表される楕円内に存在する。

必要性：

p.d. を正定エルミート行列の集合とする。

\$M\$ の固有値 \$\lambda_i \in \mathbf{C}\$ が楕円領域内にあるとき、次の式が成り立つ。

$$\psi(\lambda_i, \bar{\lambda}_i) < 0 \quad (\text{A3})$$

ただし、

$$\begin{aligned} \psi(\lambda_i, \bar{\lambda}_i) = & d + c(\lambda_i + \bar{\lambda}_i) + ab(\lambda_i^2 + \bar{\lambda}_i^2) \\ & + (a^2 + b^2)\lambda_i \bar{\lambda}_i \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

である。また、(18) 式を満たす \$P \in \mathbf{p.d.}\$ が存在することと次の式を満たす \$P \in \mathbf{p.d.}\$ が存在することは同値である。

$$\begin{aligned} dP + c(MP + PM^T) + ab(M^2P + P(M^T)^2) \\ + a^2MPM^T + b^2PM^TP^{-1}MP < 0 \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

ここで、

$$HH^* = I, H^*MH = R, (R \text{ は上三角行列}) \quad (\text{A6})$$

$$D = \text{diag}(1, \delta^{-1}, \delta^{-2}, \dots, \delta^{-(n-1)}), \delta > 0 \quad (\text{A7})$$

となる \$H\$ と \$D\$ を (A5) 式左辺の両側から掛ける。\$T \triangleq DH^*PHD\$ とし、\$DRD^{-1} = \Lambda + \tilde{R}(\delta)\$ (\$\Lambda\$ は対角行列) に分解すると、(A5) 式の左辺は、(A8) 式を満たす項 \$f(\delta)\$ を \$O(\delta)\$ でまとめると、

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f(\delta) = 0 \quad (\text{A8})$$

$$\begin{aligned} dT + c(AT + T\bar{A}) + ab(A^2T + T\bar{A}^2) \\ + a^2AT\bar{A} + b^2T\bar{A}T^{-1}AT \\ + O(\delta) \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

となる。

\$H, D\$ の性質から、(A5) 式を成立させる \$P \in \mathbf{p.d.}\$ が存在することと (A9) 式を負定とする \$T \in \mathbf{p.d.}\$ と \$\delta\$ が存在することは同値である。そこで、\$T = \text{diag}(t_{ii}), t_{ii} > 0\$ とすると、(A9) 式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \psi_{11}t_{11} & & & 0 \\ & \psi_{22}t_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \psi_{nn}t_{nn} \end{bmatrix} + O(\delta) \quad (\text{A10})$$

ただし、\$\psi_{ii} = \psi(\lambda_i, \bar{\lambda}_i)\$ である。よって Gershgorin の定理より、(A3) 式が成り立っているときには、(A10) 式を負定とする適当な \$T_0 = \text{diag}(t_{ii}) > 0\$ と \$\delta_0\$ が存在することがいえる (\$O(\delta)\$ は対角成分を持たないので)。ゆえに

$$((18) \text{ 式の左辺}) = -Q_0 \quad (\text{A11})$$

となる \$Q_0 \in \mathbf{p.d.}\$ が存在する。(18) 式を満たす解 \$P_0\$ は \$T_0, \delta_0, H\$ から計算できる。またこのとき、\$\text{Re}(P_0) = (P_0 + \bar{P}_0)/2\$ も (18) 式を満たす。このことと (18) 式が線形形式であることから、任意の正定対称行列 \$Q\$ に対して、

$$((18) \text{ 式の左辺}) < -Q \quad (\text{A12})$$

とする適当な正定対称解 \$P\$ が存在する。 \$\square\$

付録 2. ディスクリプタ形式の LMI

ディスクリプタ形式のシステムが以下のように与えられたとする。

$$E\dot{x} = Ax + Bu + B_d w \quad (\text{A13})$$

$$z = C_z x + D_d w \quad (\text{A14})$$

ただし、\$E\$ は正則。

付録 2.1 \$H^\infty\$ ノルム条件

(A13) 式を書き換えると

$$\dot{x} = E^{-1}Ax + E^{-1}Bu + E^{-1}B_d w \quad (\text{A15})$$

となるから、これを (A14)、(A15) 式の \$w\$ から \$z\$ までの伝達関数 \$G_{zw}\$ の \$H^\infty\$ ノルム \$\|G_{zw}\|_\infty\$ を \$\gamma\$ 以下にするときの LMI は、

$$\begin{bmatrix} J_1(X, Y) & E^{-1}B_d & XC_z^T \\ B_d^T E^{-T} & -\gamma I & D_d^T \\ C_z X & D_d & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A16})$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} J_1(X, Y) = & E^{-1}AX + XA^T E^{-T} \\ & + E^{-1}BY + Y^T B^T E^{-T} \end{aligned} \quad (\text{A17})$$

である。ここで (A16) 式の左辺の左側から

$$U = \text{blockdiag} \begin{bmatrix} E & I & I \end{bmatrix} \quad (\text{A18})$$

を掛け、右側から U^T を掛けても、不等号は変化しない (I : 単位行列)。

ゆえにディスクリプタ形式の H^∞ ノルム条件の LMI は、(15) 式の形になる。

付録 2.2 楕円極配置

H^∞ ノルム条件の場合と同様の手順を踏むことにより、状態空間表現の LMI からディスクリプタ形式における楕円極配置の LMI が求められる。

付録 3. 極配置 LMI のロバスト性

$\tilde{E}_p, \tilde{E}_p^{-1}, \tilde{A}_p$ の変動は次のように与えられている。

$$\xi \in [0, 1], \quad \tilde{E}_p(\xi) = (1 - \xi)\tilde{E}_{p0} + \xi\tilde{E}_{p1} \quad (\text{A19})$$

$$\zeta \in [0, 1], \quad \tilde{E}_p^{-1}(\zeta) = (1 - \zeta)\tilde{E}_{p0}^{-1} + \zeta\tilde{E}_{p1}^{-1} \quad (\text{A20})$$

$$\eta \in [0, 1], \quad \tilde{A}_p(\eta) = (1 - \eta)\tilde{A}_{p0} + \eta\tilde{A}_{p1} \quad (\text{A21})$$

ただし、 $\tilde{E}_{pi}, \tilde{A}_{pj} (i, j = 0, 1)$ は端点行列。(20) 式に $\tilde{E}_p(\xi), \tilde{A}_p(\eta)$ を代入して得られる LMI を $\Phi(\xi, \eta)$ とすると、変動に対してロバストであるということは、

$$\Phi(\xi, \eta) < 0, \quad \forall \xi, \eta \in [0, 1] \quad (\text{A22})$$

が成立していることである。いま、 ξ に対応した ζ を用いると $\tilde{E}_p(\xi)\tilde{E}_p^{-1}(\zeta) = I$ が成立する。そこで

$$V(\zeta) \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{E}_p(\zeta)^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{E}_p(\zeta)^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A23})$$

で定義される $V(\zeta)$ を考えると、(A22) 式は

$$\Sigma(\zeta, \eta) \triangleq V(\zeta)\Phi V(\zeta)^{-1} < 0, \quad \forall \zeta, \eta \in [0, 1] \quad (\text{A24})$$

と同値である。 $\Sigma(\zeta, \eta)$ を計算すると、

$$\Sigma(\zeta, \eta) = \begin{bmatrix} c(\hat{M} + \hat{M}^T) + dX & a\hat{M}^T + b\hat{M} \\ a\hat{M} + b\hat{M}^T & -X \end{bmatrix} \quad (\text{A25})$$

となる。ただし、

$$\hat{M} = \tilde{E}_p(\zeta)^{-1}\tilde{A}_p(\eta)X + \tilde{E}_p(\zeta)^{-1}\tilde{B}_pY \quad (\text{A26})$$

になるので H^∞ ノルム条件と同様に、端点条件が成立していれば、(A24) 式が成立する。よって元の問題である (A22) 式は成立する。