むだ時間を持つ連続値形制御対象の線形離散値系への変換*

森川 洋一**・神谷 祐二***

A System Configuration to Convert a Continuous Plant with Time Delay into a Linear Discrete Plant*

Yoichi MORIKAWA** and Yuji KAMIYA***

1. はじめに

入力または出力端にむだ時間を持つ制御対象に対するフィードバック制御系設計法として、スミス法がよく知られている¹⁾。しかし、スミス法によって設計される系は1自由度系となるために、入出力特性とロバスト性を同時に満足させることはできないなど、種々の制約を受ける。本速報は、スミス法を適用するが、 n 次でサンプリング周期の k 倍のむだ時間を持つ1入出力連続値形制御対象を、 $(n+k)$ 次で全状態変数を直接取り出すことのできる線形離散値形制御対象、と見なすことができるシステム構成を提案している。この結果、このシステム構成によって得られた系に対しては、制御対象の全状態変数を用いる線形制御系設計法を適用することが可能になる。

2. スミスコントローラ

漸近安定で入力または出力端にむだ時間を持つ、 n 次で1入力1出力の連続値形制御対象をゼロ次ホールド装置とサンプラで離散化した離散値形制御対象の入出力パルス伝達関数は $M(z)(1+\Delta(z))z^{-k}$ で与えられるとする。ここで、 $\Delta(z)$ は不確かさ、 $M(z)z^{-k}$ は制御対象のノミナルモデルであり、むだ時間はサンプリング周期の k 倍とする。今、ノミナルモデルとスミスコントローラから補償器を除いて構成される Fig. 1 に示される系を考える。Fig. 1 の系において $J(z)$ と $F(z)$ の間の関係は

$$F(z) = M(z)(1+\Delta(z)z^{-k})\{-J(z)\} + \tilde{D}(z) \quad (1)$$

で示され、 $\tilde{D}(z) = -D(z) - M(z)\Delta(z)z^{-k}V(z)$ 、として得られる。さらに、 $J(z)$ と $F(z)$ の間に適当な補償器

$K(z)$ を接続して Fig. 2 に示されるフィードバック系を構成するとき、 $U(z)$ から $J(z)$ までのパルス伝達関数は相補感度関数と呼ばれ、(2) 式で与えられる。

Fig. 2 The considered feedback system

$$T(z) = \frac{J(z)}{U(z)} = \frac{M(z)K(z)}{1+M(z)K(z)} \quad (2)$$

$\Delta(z)=0$ としたとき、 $\tilde{D}(z)$ から $F(z)$ までのパルス伝達関数は感度関数と呼ばれ、(3) 式で与えられる。

$$S(z) = \frac{F(z)}{\tilde{D}(z)} = \frac{1}{1+M(z)K(z)} \quad (3)$$

(2)、(3) 式から、むだ時間を持たないノミナルモデル $M(z)$ に対し、(4) 式の評価関数のもとで H^∞ 制御理論における混合感度問題の解として、補償器 $K(z)$ を得るとき、Fig. 2 の系においてはロバスト安定性と低感度特性の双方が考慮されることになる。

$$\left\| \begin{matrix} W_s(z)S(z) \\ W_T(z)T(z) \end{matrix} \right\|_\infty \quad (4)$$

すなわち、Fig. 3 の系は、ロバスト安定であり、不確かさ $\Delta(z)$ や外乱 $D(z)$ の影響が $F(z)$ に現れないようにという意味で低感度となっている。Fig. 3 においては、スミスコントローラおよびノミナルモデルの部分は計算機中に構築され、従ってノミナルモデル $M(z)z^{-k}$ から $(n+k)$ 個の全状態変数を取り出すことができる。Fig. 3 の系において、 $V(z)$ から $Y(z)$ までの入出力パルス伝達関数は

* 原稿受付 1995 年 10 月 4 日

** 北見工業大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Kitami Institute of Technology; 165, Koen-cho, Kitami city, Hokkaido 090, JAPAN

*** 北見工業大学 工学部 Faculty of Engineering, Kitami Institute of Technology; ditto

Key Words: time delay, Smith controller, H^∞ control theory, sensitivity, robust stability.

Fig. 1 The considered system

Fig. 3 The system which can be regarded as the nominal model without time delay

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{V(z)} &= \frac{M(z)(1 + \Delta(z))z^{-k}(1 + K(z)M(z))}{1 + K(z)M(z) + K(z)M(z)\Delta(z)z^{-k}} \\ &= M(z) \left[1 + \frac{\Delta(z)(1 + K(z)M(z) - K(z)M(z)z^{-k})}{1 + K(z)M(z) + K(z)M(z)\Delta(z)z^{-k}} \right] z^{-k} \\ &= M(z)(1 + \bar{\Delta}(z))z^{-k} \end{aligned} \quad (5)$$

として与えられ、Fig. 3の系は不確かさ $\bar{\Delta}(z)$ を含むが、 $(n+k)$ の全状態変数を利用できる新たな $(n+k)$ 次の線形離散値形制御対象と見なされ得ることを示している。この結果、この新たな線形離散値形制御対象に対しては、むだ時間を全く考慮する必要はなく、全状態変数を用いる線形制御系設計法を適用することができる。

3. シミュレーション

むだ時間を持つ制御対象に対し、LQ問題を適用した結果をシミュレーションによって示す。20 msのむだ時間および不確かさを持つ制御対象を(6)式で、制御対象のノミナルモデルを(7)式で与える。

$$M(s)(1 + \Delta(s))e^{-sL} = \frac{1}{s^2 + 0.8s + 0.8} e^{-20 \times 10^{-3}s} \quad (6)$$

$$M(s)e^{-sL} = \frac{1}{s^2 + s + 1} e^{-20 \times 10^{-3}s} \quad (7)$$

重み関数を(8)式および(9)式で与え、MATLABを利用して(10)式の補償器を得た。

$$W_s(s) = \frac{0.7(s+10)}{s+0.01} \quad (8)$$

$$W_T(s) = \frac{0.01(s+100)}{s+10000} \quad (9)$$

$$K(s) = \frac{1.04 \times 10^3 s^3 + 1.04 \times 10^7 s^2 + 1.04 \times 10^7 s + 1.04 \times 10^7}{s^4 + 4.39 \times 10^2 s^3 + 4.62 \times 10^4 s^2 + 1.45 \times 10^6 s + 1.44 \times 10^4} \quad (10)$$

各々の要素は5 msのサンプラとゼロ次ホールド装置を用いて離散化した。その結果、ノミナルモデルの状態方程式は(11)式として得られた。(11)式のノミナルモデルに対して、(12)式の評価関数を最小にするLQ問題の最適解は(13)式のように得られた。

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ x_4^{(k+1)} \\ x_5^{(k+1)} \\ x_6^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.99987 \times 10^{-1} & 4.98750 \times 10^{-3} & 1.244791 \times 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ -4.98750 \times 10^{-3} & 9.95000 \times 10^{-1} & 4.98750 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ x_4^{(k)} \\ x_5^{(k)} \\ x_6^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^{(k)} \quad (11)$$

Fig. 5 The optimal system for the plant with time delay

$$J_d = \sum_{i=0}^{\infty} (x^T(i)Q_d x(i) + u^T(i)R_d u(i)) \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.53165 \times 10^{-3} \\ 9.35179 \times 10^{-3} \\ 4.68193 \times 10^{-5} \\ 4.69394 \times 10^{-5} \\ 4.70590 \times 10^{-5} \\ 4.71781 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Fig. 4 はノミナルモデルに対する最適制御系を示す。この際、ノミナルモデルの出力フィードバックループを表すことが必要であり、 $F = [f_1 + 1, f_2]$ である。次に Fig. 3 の系と Fig. 4 の系を組み合わせることによって、Fig. 5 の系を構成することができる。Fig. 6 において、A は Fig. 4 の系の、B は Fig. 5 の系のそれぞれステップ応答を示している。このシミュレーション結果は、ノミナルモデルに対する最適制御系と提案された系に対する最適制御系のそれぞれのステップ応答の差異は、極めて小さいことを示している。これは、むだ時間を持つ制御対象

Fig. 4 The optimal system for the nominal model

Fig. 6 A and B show the step responses of the systems in Fig. 4 and Fig. 5, respectively

に対して提案された系を構成する時、線形制御形設計法を適用することが可能となることを意味する。

4. おわりに

n 次でサンプリング周期の k 倍のむだ時間を持つ連続値形制御対象を、 $(n+k)$ 次ですべての状態変数を利用できる線形離散値形制御対象と見なすことの可能な系の構成を示した。提案された系に対しては線形制御系設計法が適用可能であることを、LQ 問題を例として取り上げ、そのシミュレーションによって示した。

参考文献

- 1) 渡部：むだ時間システムの制御，計測自動制御学会 (1993)