実験結果に基づく最適レギュレータの設計法*

岡田 昌史**・福島 宏明**・杉江 俊治**

LQ Optimal Controller Design Method based on Experimental Data*

Masafumi OKADA**, Hiroaki FUKUSHIMA** and Toshiharu SUGIE**

This paper gives an LQ optimal controller design method which is based on the iteration of experiment and controller re-design from the viewpoint of joint design of identification and control. This method provides us a systematic method of changing the weighting matrices to achieve better control performance based on the experimental data. Furthermore, the effectiveness of the proposed method is shown by experiments using an inverted pendulum system.

1. はじめに

これまでに提案されている制御則の多くは主に制御対象のモデルを用いて、ある評価関数を最適化する補償器を設計するものであり、これを実機に適用した場合モデル化誤差などの影響によって評価関数の値は大きくなり、閉ループ特性が劣化する場合が少なくない。そこで、実際に制御を行う場合には実験の応答を見ながら、設計者が評価関数（重み関数など）を試行錯誤的に変更し、これを繰り返すといった手順が踏まれる。このことから、この手順を系統的に行う設計法が望まれる。

そこで近年、この繰り返しを体系的に行うことを目的とした、補償器と同定の結合設計が注目されている^{1),2)}。この方法は、設計された補償器を用いて実験を行い、この応答からモデルを同定し、モデルおよび評価関数の更新を行った後に補償器を再設計するという手順を繰り返すもので、その方法もいくつか提案され、有効性も検証されている³⁾⁻⁸⁾。しかし、これらの方法では補償器の設計と同定が何度も行われるためその手順は複雑なものとなり、また補償器の次数も大きくなる傾向にあるといった問題点がある。そのため、補償器の構造を固定し簡単なアルゴリズムによって補償器のパラメータのみを変更す

るといった方法も必要と思われる。

一方、有効な制御則の一つに最適レギュレータによる状態フィードバック制御がある。この方法は設計アルゴリズムが容易であって補償器は定数行列となり、その有効性も広く認められている。しかし、実機に適用するにあたっては他の制御則同様に、試行錯誤的に重み行列を変更し補償器を再設計しているのが現状である。

そこで本論文では、最適レギュレータの補償器設計における繰り返し作業を体系的に行う一つの方法を提案する。この方法は実験による応答に基づいて重み行列に変更を施し、補償器を再設計する手順を繰り返すことにより閉ループ特性の改善を図るものである。この方法では補償器の構造を、定数行列による状態フィードバックに固定しており、また、モデルの同定を行わないことから設計アルゴリズムも容易なものとなっている。さらに、本論文では提案する方法を倒立振り子系に適用し、実験によってその有効性を検証する。

2. 問題設定

本論文では、次式によって表される制御対象 P と状態フィードバック則からなる実際の制御系

$$P: \begin{cases} \dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \\ x_p(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

$$u_p(t) = -K x_p(t) \quad (2)$$

を考える。ここで、 A_p , B_p の正確な値は未知であるが、 P の近似モデル P_m が与えられ、実際の制御系と同様に

* 原稿受付 1995年7月28日

** 京都大学 工学部 Faculty of Engineering, Kyoto University; Uji, Kyoto 611, JAPAN

Key Words: LQ optimal control, iterative design, joint design of identification and control, experimental data, experimental evaluation.

状態フィードバックによって次のような制御系を構成する.

$$P_m: \begin{cases} \dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \\ x_m(0) = x_0 \end{cases} \quad (3)$$

$$u_m(t) = -K x_m(t) \quad (4)$$

また, x_0 は既知であり $x_p(t)$ はすべて観測可能であるとする. このとき, 以下の問題を考える.

【問題】 (1) 式の制御対象 P に対し, つぎの評価指標 J_p

$$J_p := \int_0^\infty x_p^T(t) Q_0 x_p(t) + u_p^T(t) R_0 u_p(t) dt \quad (5)$$

を最小化する定数状態フィードバック補償器 K を (3) 式の P_m に基づいて設計せよ. ただし, Q_0, R_0 は与えられているものとする.

ここでは Q_0, R_0 は与えられていることを仮定した. 一般に最適レギュレータ問題では,

(i) モデル P_m において, 希望の応答を示すような補償器を得るためには, 重み行列 Q_0, R_0 をどのように選ぶべきか.

(ii) 制御対象のモデル化誤差が存在する場合, 重み行列 Q_0, R_0 をどのように変形すれば, 制御性能の劣化を改善できるのか.

という問題がある. 本論文では (i) の Q_0, R_0 はすでに与えられていることを仮定し, 実験と補償器の繰り返しが必要となる (ii) の問題に注目し, これを体系的に行う一つの方法を与えることを目的としている.

3. 設計法

3.1 設計の基本方針

2.の問題は, もし A_p, B_p が既知であるならば最適レギュレータ問題となり, 補償器 K は直ちに求めることができる. しかし, ここではこれらが未知であることからつぎのような解法を考える.

【解法】 (3) 式の P_m に対し, 評価指標

$$J_m := \int_0^\infty x_m^T(t) Q_n x_m(t) + u_m^T(t) R_n u_m(t) dt \quad (6)$$

を最小にする補償器 K が同時に (5) 式を最小化するような (Q_n, R_n) を求める.

(6) 式を最小化する問題は最適レギュレータ問題となり, 重み行列 Q_n, R_n によって容易に K を求めることができる. そこで本設計法では実験結果に基づき, 実験と補償器設計の繰り返しによって Q_n, R_n を求めることを行う.

3.2 設計手順

つぎに, 設計手順について述べる. 本設計法では以下の手順によって Q_i, R_i (i は繰り返しの回数を表す) を求めていく. なお, 以下の設計手順では i 回目の繰り返し

しについての説明であり, 添字 i が繰り返しの回数を表すものとする. また, J_m, J_p の構造に対して重み行列および補償器を陽に表示する場合に $J_m = J_m(Q_i, R_i, K_i)$, $J_p = J_p(Q_i, R_i, K_i)$ の表現を用いる.

Step 1 モデル A_m, B_m と Q_i, R_i を用いて,

$$K_i = \arg \min_K J_m(Q_i, R_i) \quad (7)$$

より補償器 K_i を設計する.

Step 2 実験およびシミュレーションから得られた応答 $x_{pi}(t), x_{mi}(t), u_{pi}(t), u_{mi}(t)$ をサンプリングタイム T ごとに, 横に並べた行列を次式のように定める.

$$X_{pi} := \begin{bmatrix} x_{pi}(0) & x_{pi}(T) & \cdots & x_{pi}(NT) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$X_{mi} := \begin{bmatrix} x_{mi}(0) & x_{mi}(T) & \cdots & x_{mi}(NT) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$U_{pi} := \begin{bmatrix} u_{pi}(0) & u_{pi}(T) & \cdots & u_{pi}(NT) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$U_{mi} := \begin{bmatrix} u_{mi}(0) & u_{mi}(T) & \cdots & u_{mi}(NT) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Step 3 上で定めた $X_{pi}, X_{mi}, U_{pi}, U_{mi}$ より,

$$\Delta Q_i = \arg \min_{\Delta Q} \left\| Q_0^{\frac{1}{2}} X_{pi} - \Delta Q Q_i^{\frac{1}{2}} X_{mi} \right\| \quad (12)$$

$$\Delta R_i = \arg \min_{\Delta R} \left\| R_0^{\frac{1}{2}} U_{pi} - \Delta R R_i^{\frac{1}{2}} U_{mi} \right\| \quad (13)$$

となる $\Delta Q_i, \Delta R_i$ を求める. ただし, $\Delta Q_i, \Delta R_i$ が正則になることを仮定する. ここで,

$$Q_i^{\frac{T}{2}} Q_i^{\frac{1}{2}} = Q_i, \quad R_i^{\frac{T}{2}} R_i^{\frac{1}{2}} = R_i \quad (14)$$

であり, $\|A\| = \text{Tr}(A^T A)$ である. また Tr はトレースを意味する.

Step 4 Q_{i+1}, R_{i+1} を

$$Q_{i+1}^{\frac{1}{2}} = \Delta Q_i Q_i^{\frac{1}{2}}, \quad R_{i+1}^{\frac{1}{2}} = \Delta R_i R_i^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

$$Q_{i+1} = Q_{i+1}^{\frac{T}{2}} Q_{i+1}^{\frac{1}{2}}, \quad R_{i+1} = R_{i+1}^{\frac{T}{2}} R_{i+1}^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

とする.

Step 5 添字 i を $i=i+1$ とし, Step 1 に戻り同様の手順を繰り返す.

ここでは Step 1 において (7) 式によって設計した K_i が P を安定化可能である程度に物理近似モデル P_m が P の特性をよく表現していることを仮定した. また, Step 3 の $\Delta Q_i, \Delta R_i$ は

$$\Delta Q_i = Q_0^{\frac{1}{2}} X_{pi} [Q_i^{\frac{1}{2}} X_{mi}]^\dagger \quad (17)$$

$$\Delta R_i = R_0^{\frac{1}{2}} U_{pi} [R_i^{\frac{1}{2}} U_{mi}]^\dagger \quad (18)$$

によって計算される. ここで, $[\cdot]^\dagger$ は Moore-Penrose 型の一般逆行列を表す.

3.3 考察

(A) まず, Step 3 における Δ_{Q_i} , Δ_{R_i} の意味について述べる. 今 i 回目の繰り返しにより得られた補償器 K_i による閉ループ系を考える. このとき, モデルおよび実際の制御対象は

$$P : \dot{x}_{pi}(t) = (A_p - B_p K_i) x_{pi}(t) \quad (19)$$

$$P_m : \dot{x}_{mi}(t) = (A_m - B_m K_i) x_{mi}(t) \quad (20)$$

$$x_p(0) = x_m(0) = x_0 \quad (21)$$

と表せる. また, 最適レギュレータ問題は

$$J_m = \left\| \begin{bmatrix} Q_i^{\frac{1}{2}} [sI - (A_m - B_m K_i)]^{-1} x_0 \\ R_i^{\frac{1}{2}} K_i [sI - (A_m - B_m K_i)]^{-1} x_0 \end{bmatrix} \right\|_2 \quad (22)$$

を最小化する補償器を設計するのと等価である. このとき (12) 式は, $N \rightarrow \infty$ とすることで

$$\left\| \begin{bmatrix} Q_0^{\frac{1}{2}} [sI - (A_p - B_p K_i)]^{-1} x_0 - \Delta_{Q_i} Q_i^{\frac{1}{2}} [sI - (A_m - B_m K_i)]^{-1} x_0 \end{bmatrix} \right\|_2 \quad (23)$$

を最小化する Δ_{Q_i} を求めていることに相当する. すなわち, Δ_{Q_i} はモデルによって構成される閉ループ系の伝達関数 G_m と実際の閉ループ系の伝達関数 G_p の間の関係を, 初期値 x_0 に関して

$$G_p \simeq \Delta_{Q_i} G_m \quad (24)$$

と定数行列で近似したものとなる. Δ_{R_i} についても同様である.

(B) つぎに, 本設計法の結合設計としての意味について考察する. (17), (18) 式より, $Q_0^{\frac{1}{2}} X_{pi}$ と $\Delta_{Q_i} Q_i^{\frac{1}{2}} X_{mi}$, $R_0^{\frac{1}{2}} U_{pi}$ と $\Delta_{R_i} R_i^{\frac{1}{2}} U_{mi}$ の間には

$$\Xi_i := Q_0^{\frac{1}{2}} X_{pi} - \Delta_{Q_i} Q_i^{\frac{1}{2}} X_{mi} \quad (25)$$

$$\Lambda_i := R_0^{\frac{1}{2}} U_{pi} - \Delta_{R_i} R_i^{\frac{1}{2}} U_{mi} \quad (26)$$

$$\Xi_i \begin{bmatrix} Q_i^{\frac{1}{2}} X_{mi} \end{bmatrix}^\dagger = 0, \quad \Lambda_i \begin{bmatrix} R_i^{\frac{1}{2}} U_{mi} \end{bmatrix}^\dagger = 0 \quad (27)$$

の関係がある. また, $Q_i^{\frac{1}{2}}, R_i^{\frac{1}{2}}$ が正則であることを仮定すると, (27) 式より Ξ_i, Λ_i は次式を満たす.

$$\Xi_i X_{mi}^T = 0, \quad \Lambda_i U_{mi}^T = 0 \quad (28)$$

ここで, J_p の積分要素をサンプリングタイム T で一次近似すると

$$\begin{aligned} J_p(K_i) &= \int_0^\infty x_{pi}^T(t) Q_0 x_{pi}(t) + u_{pi}^T(t) R_0 u_{pi}(t) dt \\ &\simeq T \cdot \text{Tr}(X_{pi}^T Q_0 X_{pi}) + T \cdot \text{Tr}(U_{pi}^T R_0 U_{pi}) \\ &= \hat{J}_m(Q_{i+1}, R_{i+1}, K_i) + J_k + J_d \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_m(Q_{i+1}, R_{i+1}, K_i) &:= T \cdot \text{Tr}(X_{mi}^T Q_{i+1} X_{mi}) \\ &\quad + T \cdot \text{Tr}(U_{mi}^T R_{i+1} U_{mi}) \end{aligned} \quad (30)$$

$$J_k := T \cdot \text{Tr}(\Xi_i^T \Xi_i) + T \cdot \text{Tr}(\Lambda_i^T \Lambda_i) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} J_d &:= T \cdot \text{Tr}(\Xi_i^T \Delta_{Q_i} Q_i^{\frac{1}{2}} X_{mi} + X_{mi}^T Q_i^{\frac{1}{2}} \Delta_{Q_i}^T \Xi_i) \\ &\quad + T \cdot \text{Tr}(\Lambda_i^T \Delta_{R_i} R_i^{\frac{1}{2}} U_{mi} + U_{mi}^T R_i^{\frac{1}{2}} \Delta_{R_i}^T \Lambda_i) \end{aligned} \quad (32)$$

となる. ここで, 初等的な関係 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ を用いると (28) 式より

$$J_d = 0 \quad (33)$$

となり, (29) 式は

$$J_p(K_i) \simeq \hat{J}_m(Q_{i+1}, R_{i+1}, K_i) + J_k \quad (34)$$

となる. このとき, (12), (13) 式から J_k は $\Delta_{Q_i}, \Delta_{R_i}$ によって最小化されており, $\hat{J}_m(Q_{i+1}, R_{i+1}, K_i) \simeq J_m(Q_{i+1}, R_{i+1}, K_i)$ は次の補償器によって最小化される部分となる. この考察から, 本設計法は i 回目により得られた評価指標 $J_p(K_i)$ を二つの要素 $\hat{J}_m(Q_{i+1}, R_{i+1}, K_i)$ と J_k に分解し, $\Delta_{Q_i}, \Delta_{R_i}$ の同定によって後者を, $(i+1)$ 回目の補償器によって前者を最小化しこれを繰り返す方法であるといえる.

(C) つぎに, 本設計法では設計手順の収束性を保証することは困難であるが, 数多くの数値例により収束の可能性が極めて高いことから, i 回目の繰り返しで収束したことを仮定し, 収束先がどのようなものとなるのかを考察する. なお, 補償器が更新されなくなることをもって収束という表現を用いる. 本設計法が収束したときは,

$$\Delta_{Q_i}^T \Delta_{Q_i} = I, \quad \Delta_{R_i}^T \Delta_{R_i} = I \quad (35)$$

の関係が成り立つ. よって, (34) 式は

$$J_p(K_i) \simeq \hat{J}_m(Q_i, R_i, K_i) + J_k \quad (36)$$

となり, J_k は $\Delta_{Q_i}, \Delta_{R_i}$ の同定によって最小化されており, $\hat{J}_m(Q_i, R_i, K_i)$ はすでに補償器 K_i によって最小化されている. すなわち, $J_p(K_i)$ は二つの要素に分解され, それぞれが同定, 補償器設計によって最小化されていることが理解できる. また, J_k は (12), (13) 式の Δ_Q, Δ_R を定数行列で近似することの限界の値と考えられる. しかし, 実際には J_p の値は最小化されにくい. これは $\Delta_{Q_i}, \Delta_{R_i}$ の同定において K_{i+1} を用いずに K_i を用いていること, 補償器は常に固定されたモデル P_m に基づいて設計されていることにあると考えられる. これにより本設計法は 2. の問題の近似解であるといえる.

(D) また, 最適レギュレータを実際に用いる場合には, 意味の明確さと設計パラメータの減少を目的として重み

行列には対角行列が用いられる場合が多い。しかし、本設計法ではこれ以外の要素も利用しているため、よりよい性能を持った補償器が設計されることが期待できる。

4. 実験

つぎに、本設計法を倒立振り系に適用し、実験を行うことで有効性を検証する。

4.1 モデル化

ここでは Fig. 1 に示されるような回転型の倒立振子を制御対象とする。このシステムに対し、入力をモータの出力するトルクとして運動方程式を求め、振りおよびアームの回転角とその速度を十分小さいものとして平衡点まわりで線形近似することで得られる物理モデルは次のようになる。

$$P_m : \dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \quad (37)$$

$$A_m = E^{-1} M, \quad B_m = E^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (38)$$

$$x_m = \begin{bmatrix} \theta & \dot{\theta} & \phi & \dot{\phi} \end{bmatrix}^T \quad (39)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ml^2 + I & 0 & mLl \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & mLl & 0 & mL^2 + J \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ mgl & -D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -D_m \end{bmatrix} \quad (41)$$

ただし、パラメータは以下のように定めた。

θ : 振子の回転角	ϕ : アームの回転角
m : 振子の質量	l : 振子の重心高さ
D : 振子の粘性摩擦	L : アームの長さ
D_m : モータの粘性摩擦	g : 重力加速度
u_m : モータのトルク	
I : 振子の慣性モーメント	
J : アームの慣性モーメント	

Personal Computer

Fig. 1 Inverted pendulum system

(37) 式の導出、パラメータの同定に関しては参考文献 9) に詳しい。(37)~(41) 式よりこのシステムは 1 入力 4 次のシステムであることがわかる。

4.2 補償器の設計

つぎに、このシステムに本設計法を適用する。(37) 式のシステムをモデルとして、何度かの線形シミュレーションにより、 Q_0, R_0 を次式のように定めた。

$$Q_0 = \text{diag}[1000, 1, 1000, 1], \quad R_0 = 1 \quad (42)$$

ただし、このシステムは 1 入力系であり ΔR_i はスカラーとなるため、3.3 考察 (A) で述べたような伝達関数の近似を行うのは困難であると考え

$$R_i = R_0 = 1$$

と、 R については固定した値を用いた。また、実際の倒立振りシステムにはモデル化誤差を陽に持たせるために根本から 0.476 [m] のところに質量 0.09 [kg] の重りを取り付けた。これにより、本来の振子の長さは 0.485 [m]、質量は 0.135 [kg] であった (ケース (a) とする) のに対し、重りにより長さ 0.573 [m]、質量 0.225 [kg] のものに相当する (ケース (b) とする)。実験はサンプリングタイム 1 [ms] で 3 秒間行い、データは 3 [ms] ごとに 1000 個集めた。また、速度信号は位置信号の差分を用いたが、

$$\frac{100^2}{(s+100)^2} \quad (43)$$

のフィルタを施し、ノイズの影響を抑えた。また初期値は

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0^\circ & 0^\circ & 90^\circ & 0^\circ \end{bmatrix}^T \quad (44)$$

とした。モデルをケース (a) とし、制御対象をケース (b) として、本設計法を 5 回繰り返したときの $J_p(K_i)$ の推移を Fig. 2 に、また、はじめの補償器 K_1 と 5 回目の補償器 K_5 を用いた場合の応答 (振りとアームの回転角のみ) を Fig. 3 に示す。なお、Fig. 2 における実線はモデルをケース (b) としたときの $J_m(Q_0, R_0, K)$ の最小値であり、点線はモデル、制御対象共にケース (b) としたときの J_p の値 (実験値) である。この二つが非常に近い値であることからこのモデルは実際の制御対象をよく近似しており、真の評価値のはば最小値を与えていると考えられる。

4.3 考察

この実験結果では J_p の値はほぼ最小値まで減少し、その後は微小な変化になっているのがわかる。このことから、最小化された後は補償器はほとんど更新されなくなっていると考えられ、3.3 (C) で考察した収束性がうかがえる。なお、本論文では省略するが、2 慣性共振系においても幾つかの数値シミュレーションおよび実験を行った

Fig. 2 The value of $J_p(Q, R, P, K_i)$

Fig. 3 Responses for initial condition

ところ、 J_p はある値までは減少し、その後は収束するという結果を得ている。収束するまでの繰り返し回数については、本論文における実験例では1回では収束しているが、他の適用例の中には数回の繰り返しを要するものもあり、一般には繰り返しが必要であると思われる。また、制御対象の選び方（重りの位置の変更）によっては $J_p(K_i)$ の値が減少しない場合もあった。この場合について調べた結果、主にははじめの補償器によって

$$J_p(K_0) < J_m(K_0) \quad (45)$$

が成り立っており、 $J_p(K_i)$ が繰り返しと共に微小に増加する傾向にあった。このような場合にはモデルを同定し直すなどといったことが必要と考えられる。

5. おわりに

本論文では、同定と補償器の結合設計の観点から、補償器の構造を固定し、設計アルゴリズムを簡単にすることを目的として、実験結果を利用した最適レギュレータの設計法を提案し、この設計法に対して考察を加えた。また、この設計法を倒立振り系に適用し実験によってその

有効性を検証した。

参考文献

- 1) M. Gevers: Towards a joint design of identification and control?, *Essays on Control* (Trentelman, Willems Eds.), Birkhäuser, pp. 111–151 (1993)
- 2) R. J. P. Schrama: Accurate identification for control: The necessity of an iterative scheme; *IEEE Trans.*, Vol. AC-37, No. 7, pp. 991–994 (1992)
- 3) R. J. P. Schrama and P. M. J. Van den Hof: An iterative scheme for identification and control design based on coprime factorization; *Proc. of ACC*, pp. 2842–2846 (1992)
- 4) R. G. Hakvoort, R. J. P. Schrama and P. M. J. Van den Hof: Approximate identification in view of LQG feedback design; *Proc. of ACC*, pp. 2824–2828 (1992)
- 5) Z. Zang, R. R. Bitmead and M. Gevers: Disturbance rejection: On-line refinement of controllers by closed loop modeling; *Proc. of ACC*, pp. 2829–2833 (1992)
- 6) A. G. Partanen and R. R. Bitmead: Two stage iterative identification/controller design and direct experimental controller refinement; *Proc. of 32nd CDC*, pp. 2833–2838 (1993)
- 7) H. Hajalmarson, M. Gevers, F. De Bruyne and J. Leblond: Identification for control: closing the loop gives more accurate controllers; *Proc. of the 33rd CDC*, pp. 4150–4155 (1994)
- 8) 杉江, 岡田: 実験結果との対話的手法によるロバスト補償器の設計法; システム制御情報学会論文誌, Vol. 8, No. 2, pp. 61–69 (1995)
- 9) 杉江, 岡田: 並列倒立振りシステムの H^∞ 制御; システム制御情報学会論文誌, Vol. 6, No. 12, pp. 543–551 (1993)