見透し内マイクロ波伝搬におけるシンチレーション・フェージング

東北大学工学部 米 山 務
虫 明 康 人

大気中におけるマイクロ波伝搬に見られるシンチレーション・フェージングの問題を、誘電率のゆらぎに結びつけて解析している。そのさい、ゆらぎは統計的に異方性であるとして、その異方性とフェージングの関係の吟味することに重点がおかれている。また誘電率のゆらぎの相関々数を種々変えた場合についても、それがフェージングにおよぼす影響を論じている。

レーダシステムや追尾装置の高度の発達にともない、これらに使用されるマイクロ波のシンチレーション・フェージングが、装置の究極の精度に影響する重要な因子として注目されるようになってから、すでに十数年を経ている。

シンチレーション・フェージングの成因は、伝搬路上に存在する誘電率のランダムなゆらぎによってマイクロ波が散乱される結果であると考えられており、ここに理論的には乱流理論に立脚した確率論的考察が要求される。このことから明らかなように、フェージングの理論的解析では、まず誘電率のゆらぎによるマイクロ波の散乱現象を明らかにし、その後、ゆらぎのランダムな性質についての考察が加えられなければならない。

マイクロ波の散乱の解析については使用される数学的方法に応じて、幾何光学的取扱い、散乱断面積による取

扱い、および波動方程式を直接解く方法に分けて考えられる。幾何光学的取扱いは伝搬路上の誘電率のゆらぎを光路長の変動に結びつけ、これによって受信波の位相の変動を求めようとするものである。この方法は伝搬距離が比較的短く、誘電率のゆらぎの平均的な広がりが第1フレネルゾーンにくらべて大きい場合に、適用が可能となる¹⁾。

これに対し散乱断面積による取扱いは伝搬距離が十分大きくなり、第1フレネルゾーンの中に多数の誘電率のゆらぎが存在すると考えうるときに有効であり、この場合にはゆらぎを点散乱体と考え、これから散乱されるincoherentな波を合成して、全体としての散乱電磁界を決定する²⁾。

一方、波動方程式を直接解く方法ではBorn近似、あるいはRytov近似を使って散乱電磁界を積分の形で求め、これをもとにして計算を進める^{3,4)}。この方法では伝搬路の長さに対する制限はなく、特別な場合として伝搬距離が十分短いときには幾何光学的に得られた結果に一致し、また伝搬距離を十分長くすれば、散乱断面積を使って得られた結果に一致する。この意味で、波動方程式から直接散乱電磁界を求める方法は一般的であり、統一的解法といえるわけであるが、その解析の過程がやや複雑になることは避けえないことである。

以上の電磁現象的な問題に対し、誘電率のゆらぎの統計的な性質については、いまだ判然としない点が多いようである。このような疑点の解明は、乱流理論の今後の発展にまたなければならないが、逆に電波伝搬についての測定技術が大気の乱流現象の研究に対して、1つの有効な手段を提供しているのが現状であり、大気中の誘電

筆者紹介

よね やま つかさ 昭和34年、東北大学工学部通信工学科を卒業。引続き同大学工学研究科でアンテナおよびミリ波伝送系の研究に従事してきたが、最近では主としてRadio starあるいは大気中マイクロ波伝搬のシンチレーション・フェージングについて理論的な計算を行なっている。

むし あけ やす と 昭和19年、東北帝国大学通信工学科を卒業。さらに同24年大学院特別研究生を修了後、東北大学助教授となる。昭和29年、工学博士の学位を受け、渡米してオハイオ州立大学アンテナ研究所研究員となり、同31年帰国。昭和35年4月以来、東北大学工学部教授として通信工学第3講座(高周波工学)を担当

"Scintillation Fading in Line-of-sight Microwave Propagation" By Tsukasa Yoneyama and Yasuto Mushiaké.

率のゆらぎの統計的性質は大気乱流論と電波伝搬の研究の相ともなった成果によって、初めて明らかになるものと思われる。

したがって、誘電率のゆらぎについて、その性質を適当に仮定し、その仮定のもとにフェージングの定量的評価を行ない、実験との対比において最初の仮定の妥当性を吟味するという cut and try な方法も容認せざるをえないのである。

そしてシンチレーション・フェージングを伝搬路上の誘電率のゆらぎとの関係において論じたこれまでの大部分の研究では、ゆらぎは統計的に均質かつ等方性であるという理想化された状態で考察されている。しかしながら、ゆらぎについてのこのような仮定が実際の大気について、そのまま成立つと考えることは困難で、たとえばゆらぎの強さは高度とともに減少していることが実測の結果明らかにされている⁵⁾。また大気に対する重力の影響を考慮すれば、垂直方向が特別な軸としてえらばれていることがわかり、ゆらぎの構造は軸対称な異方性となる⁶⁾。

このように大気中の誘電率のゆらぎについては均質性の仮定も等方性の仮定も認めがたいものであるが、ほとんど水平な見透し内伝搬路のみに限れば、ゆらぎは統計的に均質であるとしてよいであろう。

以上のような考察から、実際の見透し内伝搬路上の誘電率のゆらぎの状態を比較的良好に近似しているモデルとして、ここでは均質ではあるが統計的に異方性であるゆらぎを仮定し、その異方性の程度がマイクロ波のシンチレーション・フェージングにおよぼす影響について調べることとする。解析にあたっては、波動方程式を直接 Rytov 近似を使って解き、マイクロ波の振幅および位相の変動の2乗平均値を求める。

なお計算を進めるにあたって、フェージングの大きさと誘電率のゆらぎを関係づけるものとして、ゆらぎの相関々数についての知識が必要となるが、これは前述したように、大気の大気現象の十分な解明にまたなければならず、通常は適当な関数形を仮定してその代用としている。

見透し内伝搬路におけるシンチレーション・フェージングの理論的な研究では、計算上の便宜もあって、波動方程式を直接解く方法によるときにはほとんど Gauss 形相関々数をとっているのが通例である^{3,4)}。本論でも、ゆらぎの相関々数としては異方性を考慮した Gauss 形を仮定しているが、さらに相関々数の関数形とフェージングの特性の間の関係について吟味するために、Bessel 形相関々数を使った計算も合わせて行なっている。

このようなシンチレーション・フェージングについて

第1図 受信波のベクトル図とその等確率曲線

の実測結果も二、三報告されているが^{7,8)}、ここでの計算結果を積極的に裏づけるにたるデータはいまだ乏しいようである。それで、理論的な計算結果のみに限って一応ここに報告する次第である。

なお本論での解析方法、および得られた諸結果は、水中音響学、電離層物理学、あるいは天文学における類似の問題にただちに適用でき、とくに Radio star または人工衛星からの電波のフェージングを観測し、これを電離層内の等価誘電率のゆらぎに結びつけて、逆に電離層の微細構造を推定しようとする最近の試みに有効に應用されていることを付記しておく^{9,10)}。

1. 受信波の確率分布についての概略

以後の各節における論点を明確にする意味から、ここで見透し内マイクロ波伝搬における受信波について、その確率分布の定性的な考察を行なっておく。

第1図は受信波をベクトル図で示したものであるが、 E_0 は送受信点間を直接伝搬した一次波を表わし、 E_s は伝搬路上にある誘電率のゆらぎによって散乱された多数の波を合成したものである。受信波 E は一次波 E_0 と散乱波 E_s のベクトル和であり、そのランダムな変動は散乱波によるものである。むしろ実際の伝搬路にあっては一次波の変動も無視はできないのであるが、ここでは考察の対象をシンチレーション・フェージングに限り、したがって一次波は不変であるとする。

さて、散乱波を位相的に直角な x および y なる2成分に分解すれば、確率論の中心極限定理により、その分布関数は次式で与えられる。

$$P(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right\} \quad (1)$$

ここに σ_x^2 および σ_y^2 はそれぞれ x および y の分散であり、 ρ は x と y の間の相関係数を表わす。(1)式より散乱波の等確率曲線は

第2図 伝搬路のモデル

第3図 座標系

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{xy}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = \text{const.} \quad (2)$$

なる二次曲線となる。

(2) 式で x と y の分散が等しく、かつその間に相関がないと仮定すれば、等確率曲線は円となり、そのときには散乱波はいわゆる Rayleigh 分布に従う。一次波に Rayleigh 分布する散乱波が重畳された場合の合成波の確率分布については Norton 等による研究がある¹¹⁾。

しかしながら、実際の伝搬路にあっては x と y の分散は一般には等しくなく、またそれらの間にも相関が存在することが知られている⁹⁾。したがって、このような一般的な場合には散乱波の等確率曲線は第1図に示すような楕円となる。一次波と楕円分布する散乱波を合成して得られる波形の確率分布については、その計算はかなり複雑となるが、とくに相関係数 ρ を零にした場合の例が Beckmann によって報告されている¹²⁾。

さて、一次波の振幅を A_0 、受信波の振幅を A とするとき

$$Q = \log(A/A_0) \quad (3)$$

なる量を受信波の対数振幅とよぶことにする。また一次波に対する受信波の位相を θ で表わす。これらの量は散乱波が楕円分布にしたがって変化するにつれて、ランダムに変動し、その平均値は零である。以下において、対数振幅および位相の変動の2乗平均値を伝搬路の長さ、使用周波数、および誘電率のゆらぎの統計的性質に関連づけて解析的に求めるが、その値が1にくらべて小さい場合には、対数振幅の変動の2乗平均値は σ_x^2 に、また位相の変動の2乗平均値は σ_y^2 にそれぞれ等しくなるのである。

2. 基本式の誘導

第2図は伝搬路のモデルである。送信点 T から大気層までの距離を A で示すが、これを無限大にすれば Radio star のモデルとなり、平面波が大気層に入射して来ることになる。この伝搬モードを Plane wave mode とよぶことにする。これに対し A を零にすれば、送受信点ともに大気中にあることになり、通常の Radio relay link に対応する。

これは Spherical wave mode とよばれ、送信点からは球面波が伝搬して行く。

さて、誘電率のゆらぎのある媒質中において、つぎの波動方程式が成立する。

$$\nabla^2 E + k^2(1 + \Delta\epsilon)E = 0 \quad (4)$$

ここに $\Delta\epsilon$ は誘電率のゆらぎを表わす。ここで

$$\psi = \log(E/E_0) \quad (5)$$

とおけば、第1図を参照して、その実数部が対数振幅の変動を、またその虚数部が位相の変動を表わしていることがわかる。(5) 式を (4) 式に代入し、かつ1波長についての電界のランダムな変動が1にくらべて十分小さいと仮定すれば

$$\nabla^2(E_0\psi) + k^2(E_0\psi) = -k^2\Delta\epsilon E_0 \quad (6)$$

を得る。(6) 式は非斉次の波動方程式であり、その解は

$$\psi(\vec{r}) = \frac{k^2}{4\pi E_0(\vec{r})} \int_V \Delta\epsilon(\vec{r}') E_0(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv' \quad (7)$$

となる。ここに $\vec{r}$ および $\vec{r}'$ はそれぞれ送信点を原点にえらんだときの受信点および誘電率のゆらぎの位置ベクトルであり、積分領域 V は送受信点間にある大気層全体にわたるものとする。

一次波 E_0 は送信点からの球面波であるから

$$E_0(\vec{r}) = \frac{e^{-jk|\vec{r}|}}{|\vec{r}|} \quad (8)$$

と置くことができ、これを (7) 式に代入し、その結果を実数部および虚数部に分解することにより

$$Q(\vec{r}) = \frac{k^2|\vec{r}|}{4\pi} \int_V \Delta\epsilon(\vec{r}') \frac{\cos k(|\vec{r}'| + |\vec{r}-\vec{r}'| - |\vec{r}|)}{|\vec{r}'||\vec{r}-\vec{r}'|} dv' \quad (9)$$

$$\theta(\vec{r}) = \frac{k^2|\vec{r}|}{4\pi} \int_V \Delta\epsilon(\vec{r}') \frac{\sin k(|\vec{r}'| + |\vec{r}-\vec{r}'| - |\vec{r}|)}{|\vec{r}'||\vec{r}-\vec{r}'|} dv' \quad (10)$$

を得る。ここに $Q(\vec{r})$ および $\theta(\vec{r})$ は、それぞれ対数振幅および位相の変動である。

ここで第3図に示すように座標系を定め、送信点を原点にとり、 z 軸上原点より $z=L+A$ なる距離に受信点を置くことにする。この座標系を使って (9) 式および (10) 式を Fresnel 近似すれば

$$Q = \frac{k}{2} \int_A^{A+L} d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\eta d\epsilon(\xi, \eta, \zeta) \times \Phi_2 \left[\frac{\zeta(A+L-\zeta)}{k(A+L)}, \rho \right] \quad (11)$$

$$\theta = \frac{k}{2} \int_A^{A+L} d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\eta d\epsilon(\xi, \eta, \zeta) \times \Phi_1 \left[\frac{\zeta(A+L-\zeta)}{k(A+L)}, \rho \right] \quad (12)$$

を得る。ここに関数 $\Phi_1(\sigma, \rho)$ および $\Phi_2(\sigma, \rho)$ はそれぞれ次式で定義されるものである。

$$\Phi_1(\sigma, \rho) = \frac{1}{2\pi\sigma} \sin \frac{\rho^2}{2\sigma} \quad (13)$$

$$\Phi_2(\sigma, \rho) = \frac{1}{2\pi\sigma} \cos \frac{\rho^2}{2\sigma} \quad (14)$$

ただし

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 \quad (15)$$

である。(11) 式および (12) 式が以後の計算の基礎となる式である。

3. 対数振幅および位相の変動の 2 乗平均値

(11) 式および (12) 式から、誘電率のゆらぎを均質と仮定することにより、対数振幅および位相の変動の 2 乗平均値はつぎのように求まる。

$$\begin{aligned} \langle Q^2 \rangle &= \frac{k^2}{4} \langle \mathcal{A}\epsilon^2 \rangle \iint_A^{A+L} d\zeta_1 d\zeta_2 \\ &\quad \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 d\xi_2 d\eta_1 d\eta_2 C(\xi_1 - \xi_2, \eta_1 - \eta_2, \zeta_1 - \zeta_2) \\ &\quad \times \Phi_2 \left[\frac{\zeta_1(A+L-\zeta_1)}{k(A+L)}, \rho_1 \right] \Phi_2 \left[\frac{\zeta_2(A+L-\zeta_2)}{k(A+L)}, \rho_2 \right] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \langle \theta^2 \rangle &= \frac{k^2}{4} \langle \mathcal{A}\epsilon^2 \rangle \iint_A^{A+L} d\zeta_1 d\zeta_2 \\ &\quad \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 d\xi_2 d\eta_1 d\eta_2 C(\xi_1 - \xi_2, \eta_1 - \eta_2, \zeta_1 - \zeta_2) \\ &\quad \times \Phi_1 \left[\frac{\zeta_1(A+L-\zeta_1)}{k(A+L)}, \rho_1 \right] \Phi_1 \left[\frac{\zeta_2(A+L-\zeta_2)}{k(A+L)}, \rho_2 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

ここに $\langle \mathcal{A}\epsilon^2 \rangle$ および $C(\xi_1 - \xi_2, \eta_1 - \eta_2, \zeta_1 - \zeta_2)$ はそれぞれ誘電率のゆらぎの 2 乗平均値および相関々数である。つぎに

相対座標：

$$\xi = \xi_1 - \xi_2, \quad \eta = \eta_1 - \eta_2, \quad \zeta = \zeta_1 - \zeta_2 \quad (18)$$

および重心座標：

$$x = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2), \quad y = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2), \quad z = \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2) \quad (19)$$

を導入して、(16) 式および (17) 式を書きかえれば

$$\langle Q^2 \rangle = \frac{k^2}{4} \langle \mathcal{A}\epsilon^2 \rangle \int_A^{A+L} dz$$

$$\begin{aligned} &\iiint_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\eta d\zeta dx dy C(\xi, \eta, \zeta) \\ &\times \Phi_2 \left[\frac{\left(z + \frac{1}{2}\zeta\right)\left(A+L-z - \frac{1}{2}\zeta\right)}{k(A+L)}, \right. \\ &\quad \left. \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\xi\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\eta\right)^2} \right] \\ &\times \Phi_2 \left[\frac{\left(z - \frac{1}{2}\zeta\right)\left(A+L-z + \frac{1}{2}\zeta\right)}{k(A+L)}, \right. \\ &\quad \left. \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\xi\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\eta\right)^2} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \langle \theta^2 \rangle &= \frac{k^2}{4} \langle \mathcal{A}\epsilon^2 \rangle \int_A^{A+L} dz \\ &\quad \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\eta d\zeta dx dy C(\xi, \eta, \zeta) \\ &\quad \times \Phi_1 \left[\frac{\left(z + \frac{1}{2}\zeta\right)\left(A+L-z - \frac{1}{2}\zeta\right)}{k(A+L)}, \right. \\ &\quad \left. \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\xi\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\eta\right)^2} \right] \\ &\quad \times \Phi_1 \left[\frac{\left(z - \frac{1}{2}\zeta\right)\left(A+L-z + \frac{1}{2}\zeta\right)}{k(A+L)}, \right. \\ &\quad \left. \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\xi\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\eta\right)^2} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

となる。(20) 式および (21) 式において、 x および y についての積分を遂行すれば、つぎのような結果を得る。

$$\begin{aligned} \langle Q^2 \rangle &= \frac{k^2}{8} \langle \mathcal{A}\epsilon^2 \rangle (I_1 + I_2) \\ \langle \theta^2 \rangle &= \frac{k^2}{8} \langle \mathcal{A}\epsilon^2 \rangle (I_1 - I_2) \end{aligned} \quad (22)$$

ここに I_1 および I_2 は、それぞれつぎの積分で与えられる。

$$I_1 = \int_A^{A+L} dz \iint_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\eta d\zeta C(\xi, \eta, \zeta) \Phi_1 \left[\frac{\zeta(A+L-2z)}{k(A+L)}, \rho \right] \quad (23)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_A^{A+L} dz \iint_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\eta d\zeta C(\xi, \eta, \zeta) \\ &\quad \Phi_1 \left[\frac{2z(A+L-z)}{k(A+L)}, \rho \right] \end{aligned} \quad (24)$$

ただし

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 \quad (25)$$

である。

結局、誘電率のゆらぎの相関々数を適当に仮定して、(23) 式および (24) 式の積分を計算すればよいわけであるが、(23) 式に与えられる I_1 についてはきわめて簡単な結果が得られる。すなわち大気中における誘電率のゆらぎの大きさは数十メートルの程度であるから、これはマイクロ波の波長にくらべて十分大きく、このとき、 I_1 は付録 [I] に示すように、Stationary phase method を使って計算することができ

$$I_1 = 2 L l_\xi \quad (26)$$

となる。ここに l_ξ は

$$l_\xi = \int_0^\infty C(0, 0, \xi) d\xi \quad (27)$$

で与えられ、 ξ 軸方向における誘電率のゆらぎの大きさを表わすもので、これをゆらぎの相関距離とよぶことにする。

つぎに (24) 式の I_2 を計算するには誘電率のゆらぎの相関々数について、具体的な関数形を仮定しなければならない。しかしながら、速度場の乱流から誘電率のゆらぎが発生する機構についてはいまだ疑問の点もあり、したがってその相関々数についても統一的な結論には到達していないのである。そこで、ここでは一応、見透し内マイクロ波伝搬のフェージングの研究で広く使われている Gauss 形相関々数を仮定し、さらに異方性を導入して

$$C(\xi, \eta, \zeta) = \exp\left(-\frac{p^2\xi^2 + q^2\eta^2 + \zeta^2}{l^2}\right) \quad (28)$$

とおくことにする。ここに p および q は誘電率のゆらぎの異方性の程度を表わす parameter である。なお相関関数を Bessel 形にした場合については第 6 節で吟味することにする。

(28) 式の相関々数を (24) 式に代入し、 ξ , η および ζ に関する積分を遂行し、かつ z については適当な変数変換を施して変形すれば、(24) 式はつぎのような楕円積分に帰着される。

$$I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{k l^3}{p q} I_m \left[\int_{-1}^1 \sqrt{x_p - \frac{Lu^2 + 2Au - A}{L + A}} \left(x_q - \frac{Lu^2 + 2Au - A}{L + A} \right) du \right] \quad (29)$$

ここに

$$x_p = 1 - j \frac{4}{p^2 D} \quad (30)$$

$$x_q = 1 - j \frac{4}{q^2 D} \quad (31)$$

であり、また D は Scattering parameter とよばれ次式で定義される。

$$D = \frac{4L}{kl^2} \quad (32)$$

ここで前に返って、 I_1 を与える (26) 式は任意の相関関数に対して成立つものであるが、とくに (28) 式の Gauss 形相関々数を考えれば

$$I_1 = \sqrt{\pi} L l \quad (33)$$

となる。(29) 式および (33) 式を (22) 式に代入すれば、対数振幅および位相の変動の 2 乗平均値は

$$\left\{ \frac{\langle Q^2 \rangle}{\langle \theta^2 \rangle} \right\} = \sqrt{\pi} \frac{k^3 l^3}{32} \langle \mathcal{A} \varepsilon^2 \rangle \left[D \mp \frac{4}{pq} I_m \{ F(x_p, x_q; A) \} \right] \quad (34)$$

となる。ここに

$$F(x_p, x_q; A) = \frac{1}{2} \times \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{\left(x_p - \frac{Lu^2 + 2Au - A}{L + A} \right) \left(x_q - \frac{Lu^2 + 2Au - A}{L + A} \right)}} \quad (35)$$

である。したがって (35) 式の楕円積分を数値計算することが、ここでの問題となる。

4. Plane wave mode の場合について¹³⁾

Plane wave mode は送信点が大気層上、十分な高度にある場合を理想化したもので、Radio star からの放射電磁波、あるいは人工衛星からの信号を地上で受信したときのシンチレーション・フェージングを研究するのに適している。

第 4 図はそのモデル図である。まず (35) 式において送信点と大気層の間の距離 A を無限大を置けば、楕円積分はつぎのような二次無理式の積分となる。

$$F(x_p, x_q; \infty) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{(x_p + 1 - 2u)(x_q + 1 - 2u)}} \quad (36)$$

(36) 式の積分は容易に遂行することができ、その結果、次式を得る。

$$I_m \{ F(x_p, x_q; \infty) \} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{pqD}{[\{\sqrt{(p^4 D^2 + 1)} + 1\} \{\sqrt{(q^4 D^2 + 1)} + 1\}]^{1/2}} \quad (37)$$

これより (34) 式を参照して、対数振幅および位相の変動の 2 乗平均値はつぎのように求まる。

$$\left\{ \frac{\langle Q^2 \rangle}{\langle \theta^2 \rangle} \right\} = \sqrt{\pi} \frac{k^3 l^3}{32} \langle \mathcal{A} \varepsilon^2 \rangle \left[D \mp \frac{2}{pq} \tan^{-1} \frac{pqD}{[\{\sqrt{(p^4 D^2 + 1)} + 1\} \{\sqrt{(q^4 D^2 + 1)} + 1\}]^{1/2}} \right] \quad (38)$$

ここで、とくに p および q を 1 に等しいとおけば (38) 式は

$$\left\{ \frac{\langle Q^2 \rangle}{\langle \theta^2 \rangle} \right\} = \sqrt{\pi} \frac{k^3 l^3}{32} \langle \mathcal{A} \varepsilon^2 \rangle [D \mp \tan^{-1} D] \quad (39)$$

となる。これは Chernov³⁾ が誘電率のゆらぎを等方性と仮定し、Gauss 形相関々数を用いて誘導した結果に一致する。

つぎに Scattering parameter D が小さい場合、および大きい場合について、(38) 式の近似式を求める。まず (38) 式において D が十分小さいとすれば、対数振幅の変動および位相の変動の 2 乗平均値はそれぞれつぎ

第4図 Plane wave mode

第6図 Spherical wave mode

第5図 Plane wave mode における対数振幅および位相の変動の2乗平均値

のように近似される。

$$\langle Q^2 \rangle = \sqrt{\pi} \frac{k^3 l^3}{32} \langle \Delta \epsilon^2 \rangle \left\{ \frac{(p^2 - q^2)^2}{8} + \frac{p^2 q^2}{3} \right\} D^3 \quad (40)$$

$$\langle \theta^2 \rangle = \sqrt{\pi} \frac{k^3 l^3}{16} \langle \Delta \epsilon^2 \rangle D \quad (41)$$

これらの式から明かなように Scattering parameter D が十分小さい範囲では、位相の変動に比較して振幅の変動は無視しうる程度である。なお (41) 式の位相の変動は幾何光学的取扱いによっても容易に導くことができる¹⁾。これに対し D が十分大きい場合には、(38) 式は

$$\left. \begin{array}{l} \langle Q^2 \rangle \\ \langle \theta^2 \rangle \end{array} \right\} = \sqrt{\pi} \frac{k^3 l^3}{32} \langle \Delta \epsilon^2 \rangle D \quad (42)$$

となる。この近似式は誘電率のゆらぎを、一定の散乱断面面積をもった点散乱体と考え、それによって散乱される電磁波を合成しても得ることができる²⁾。(38) 式の数値計算結果を第5図に示す。実際の気中では、誘電率のゆらぎは垂直方向のみに異方性を有すると考えられるから、 q を1とおき、 p を異方性の parameter にとって図示してある。図からただちに知られるように、Scattering parameter D が小さい場合、および大きい場合には、ゆらぎの異方性の影響はあまり顕著ではなく、その中間の領域、すなわちゆらぎによる散乱が Fresnel scattering ($D \ll 1$) から Fraunhofer scattering ($D \gg 1$) に移る過渡領域で最も著しい異方性の効果が見られる。このことはシンチレーション・フェージングの問題を波動方程式を使って解いて、はじめて明らかにされるのである。

5. Spherical wave mode の場合について¹⁴⁾

第6図は Spherical wave mode のモデル図である。この場合には、送受信点がかともに大気中にあり、Radio relay link に相当したものである。

さて、(35) 式で A を零とすれば

$$F(x_p, x_q; 0) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(x_p - u^2)(x_q - u^2)}} \quad (43)$$

を得る。(43) 式の楕円積分は、一般には母数が複素数となるので、数表の利用も限られる。したがってその数値計算が問題となるが、ここではこれを初等関数で近似し、その近似式を使って数値計算を行なうという方法をとった。近似の手続の詳細は付録にゆずり、以下にその結果のみを簡単にのべる (付録-II 参照)。

まず (43) 式が x_p と x_q に関して対称であることより、

$$x = x_p / x_q \quad (44)$$

とおいたとき

$$0 \leq |x| \leq 1 \quad (45)$$

と仮定しても一般性は失なわれない。(45) 式の仮定のもとに、 x の存在する領域を定めれば第7図に示すように、実軸上0.5の点を中心に直径1なる円の上半分と実軸によって囲まれた閉領域となる。この領域を円の中心を通り虚軸に平行な直線で二分し、それぞれ第I領域および第II領域とする。このとき x が第I領域内であれば (43) 式は

↑ 第7図 x の存在する領域

第8図 Spherical wave modeにおける対数振幅および位相の変動の2乗平均値 →

$$F(x_p, x_q; 0) \simeq \frac{2}{\sqrt{x_q(1 + \frac{1}{x})^2}} \times \log \frac{2 \left(\frac{\sqrt{x_p + \frac{1}{x}}}{\sqrt{x_p - \frac{1}{x}}} \right)}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \frac{1}{x} \sqrt{x_p + \frac{1}{x}}}{1 + \frac{1}{x} \sqrt{x_p - \frac{1}{x}}} \right)^2}} \quad (46)$$

と近似され、第II領域内にある場合には、近似式は

$$F(x_p, x_q; 0) \simeq \frac{j2}{\sqrt{x_q(1 + \frac{1}{1-x})^2}} \times \log \frac{2 \left(\frac{\sqrt{1-x_p + \frac{1}{1-x}}}{\sqrt{1-x_p - \frac{1}{1-x}}} \right)}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \frac{1}{1-x} \sqrt{1-x_p + \frac{1}{1-x}}}{1 + \frac{1}{1-x} \sqrt{1-x_p - \frac{1}{1-x}}} \right)^2}} \quad (47)$$

となる。 x の値に応じて (46) あるいは (47) 式を使えば容易に楕円積分の近似値を求めることができ、さらにそれを (34) 式に代入することにより、対数振幅および位相の変動の2乗平均値が得られる。なお、このような近似による誤差は高々2%程度であることが証明される。

つぎに Scattering parameter D が十分小さい場合および十分大きい場合について、フェージングの大きさを与える近似式を示しておく。まず D の小さい Fresnel scattering の範囲では近似式として

$$\langle Q^2 \rangle \simeq \sqrt{\pi} \frac{k^3 l^3}{32} \langle \Delta \epsilon^2 \rangle \left\{ \frac{(p^2 - q^2)^3}{80} + \frac{p^2 q^2}{30} \right\} D^3 \quad (48)$$

$$\langle \theta^2 \rangle \simeq \sqrt{\pi} \frac{k^3 l^3}{16} \langle \Delta \epsilon^2 \rangle D \quad (49)$$

が得られる。(49) 式で与えられる位相の変動の2乗平均値は Plane wave mode の場合について得られた (41) 式に全く一致している。これに対し (48) 式の対数振幅

の変動は Plane wave mode についての結果である (40) 式にくらべて 1/10 だけ小さくなっていることがわかる。

一方 D が十分大きくなった Fraunhofer scattering の場合は、 x は第7図の第1領域内にあって1に近づく。したがって、このときには (46) 式が利用でき、その結果

$$\frac{\langle Q^2 \rangle}{\langle \theta^2 \rangle} = \sqrt{\pi} \frac{k^3 l^3}{32} \langle \Delta \epsilon^2 \rangle D \quad (50)$$

なる近似式を得る。これは plane waver mode の場合についての同様な近似式 (42) 式に一致している。

(46) 式あるいは (47) 式を (34) 式に代入して数値計算した結果を第8図に示す。計算は $q=1$ の場合、すなわち誘電率のゆらぎが水平面内において二次元等方性である場合について行ない、垂直方向の異方性の程度を示す p は Parameter としてある。なお比較のため、図には前節で得た Plane wave mode における結果のうち、とくにゆらぎが等方性の場合を破線で示してある。ここで興味のあることは、誘電率のゆらぎを等方性と仮定して計算した Plane wave mode での結果が、これを Spherical wave mode と比較すれば、あたかも異方性のゆらぎを有する媒質中を伝搬したような特性を示すことである。

6. Bessel 形相関関数の場合について¹⁵⁾

前節までにおいて、誘電率のゆらぎを統計的に異方性であるとし、その相関関数を Gauss と仮定した場合について、フェージングの対数振幅および位相の変動の2乗平均値を求めた。しかしながら Gauss 形相関関数を仮定することは、数学的取扱いを容易にするという利点はあるとしても、それが実際の大気における誘電率のゆらぎの統計的性質によく合致しているとはいえないのであ

る。Refractometer を使って大気中の誘電率のゆらぎを実測した最近の報告によれば^{5,16)}、ゆらぎの相関々数ははぼつぎに示すような Bessel 形であるとされている。

$$C(r) = \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{r}{l}\right)^\nu K_\nu\left(\frac{r}{l}\right) \quad (51)$$

ここに ν は相関々数を特長づける 1 つの Parameter であるが、これは地上高とともに一般には減少する傾向にある⁵⁾。そこで本節においては誘電率のゆらぎの相関々数を、(51) 式で与えられる等方性の Bessel 形であるとする。そして伝搬モードを Plane wave mode として、フェージングの対数振幅および位相の変動の 2 乗平均値を求め、相関々数の Parameter ν を種々変化させた場合、それがフェージングにどのような影響を与えるかを見ることにする。

まず解析を進めるにあたって、Bessel 形相関々数はつぎのように積分表示されることに注目しておく。

$$\begin{aligned} & \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{r}{l}\right)^\nu K_\nu\left(\frac{r}{l}\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty S^{\nu-1} \exp\left(-\frac{r^2}{4Sl^2} - S\right) dS \quad (52) \end{aligned}$$

さて、ここで前に返ってフェージングの大きさは (22) 式で与えられるが、そこにふくまれる I_1 および I_2 なる値はそれぞれ (23) 式および (24) 式の相関々数をふくんだ積分によって決定される。そこで (52) 式で与えられる Bessel 形相関々数の積分表示を (23) および (24) 式に代入する。その結果

$$I_1 = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty S^{\nu-1} G_1(S) e^{-S} dS \quad (53)$$

$$I_2 = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty S^{\nu-1} G_2(S) e^{-S} dS \quad (54)$$

を得る。ここに

$$\begin{aligned} G_1(S) &= \int_A^{A+L} dz \iint_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\eta d\zeta \\ & \exp\left(-\frac{r^2}{4Sl^2}\right) \phi_1\left[\frac{\xi(A+L-2z)}{k(A+L)}, \rho\right] \quad (55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2(S) &= \int_A^{A+L} dz \iint_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\eta d\zeta \\ & \exp\left(-\frac{r^2}{4Sl^2}\right) \phi_1\left[\frac{2z(A+L-z)}{k(A+L)}, \rho\right] \quad (56) \end{aligned}$$

であり、また

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad (57)$$

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 \quad (58)$$

とにおいてある。

(55) 式および (56) 式を見るに、これは相関距離を $2\sqrt{S}$ 倍にした等方性 Gauss 形相関々数の場合に相当しており、Plane wave mode の仮定のもとに、(39) 式を参照して、ただちにつぎの結果が得られる。

$$G_1(S) = 2\sqrt{\pi} L l \sqrt{S} \quad (59)$$

$$G_2(S) = 2\sqrt{\pi} k l^3 S^{\frac{3}{2}} \tan^{-1}\left(\frac{L}{kl^2 S}\right) \quad (60)$$

(53) 式および (59) 式より容易に

$$I_1 = 2\sqrt{\pi} L l \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)} \quad (61)$$

が得られる。 I_2 については (60) 式を (54) 式に代入して

$$I_2 = \frac{2\sqrt{\pi} k l^3}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty S^{\nu+\frac{1}{2}} \tan^{-1}\left(\frac{L}{kl^2 S}\right) dS \quad (62)$$

を得る。

ここで実変数 x の関数 $T_\mu(x)$ を

$$T_\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)x} \int_0^\infty S^\mu \tan^{-1}\left(\frac{x}{S}\right) e^{-S} dS \quad (\mu > 0) \quad (63)$$

なる式により定義し、これを使い、(62) 式を書きかえれば

$$I_2 = 2\sqrt{\pi} L l \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)} T_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{L}{kl^2}\right) \quad (64)$$

となる。(61) 式および (64) 式を (22) 式に代入すれば、対数振幅および位相の変動の 2 乗平均値として

$$\begin{aligned} \langle Q^2 \rangle &= \frac{\langle \Delta \varepsilon^2 \rangle k^3 l_0^3}{4\pi} D \left[1 \mp T_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\left\{\frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)}\right\}^2 D\right) \right] \\ \langle \theta^2 \rangle &= \frac{\langle \Delta \varepsilon^2 \rangle k^3 l_0^3}{4\pi} D \left[1 \mp T_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\left\{\frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)}\right\}^2 D\right) \right] \quad (65) \end{aligned}$$

を得る。ここに l_0 は

$$l_0 = \int_0^\infty C(r) dr \quad (66)$$

で定義されるゆらぎの相関距離であり、Scattering parameter D は

$$D = \pi L / k l_0^2 \quad (67)$$

によって与えられる。(65) 式によって大気中における誘電率のゆらぎが Bessel 形相関々数をもつとしたとき、そこを伝搬するマイクロ波の対数振幅と位相の変動の 2 乗平均値が形式的に与えられたことになる。

つぎにフェージングの大きさについての具体的な値を知るためには、(63) 式で定義される関数 $T_\mu(x)$ を数値計算に適した形にしておく必要がある。そのため、ここでは関数 $T_\mu(x)$ を収束の速い級数で表示し、また x が大きい場合にはこれを漸次展開することにした。しかし級数表示に関する事項はやや複雑となるので、これは付録にゆずり (付録-III 参照)、ただそれらを利用して行なった数値計算の結果のみを第 9 図に示しておく。

相関々数の parameter ν の値としては最も重要と思われる $1/3$ 、 $1/2$ および 1 をえらんである。図には等方性 Gauss 形相関々数を仮定した場合のフェージングの大きさも合わせて示してある。

図から知られるように誘電率のゆらぎの相関々数を種々変えても、それによってフェージングの大きさはあまり影響されない。このことから、マイクロ波の対数振幅

および位相の変動の2乗平均値を求める場合には、ゆらぎの相関々数を数学的に取扱いの便利な Gauss 形と仮定しても、大きな誤差にはならないと思われる。なお付録に示した関数 $T_\mu(x)$ の級数表示より D が小さい場合の近似式として

$$\langle Q^2 \rangle \simeq \frac{\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \langle \Delta \varepsilon^2 \rangle k^3 l_0^3}{8 \sin\left\{\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \pi\right\} \Gamma\left(\nu + \frac{5}{2}\right)} \times \left\{ \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)} \right\} 2^{\nu+1} D^{\nu+\frac{2}{3}} \quad (68)$$

$$\langle \theta^2 \rangle \simeq \langle \Delta \varepsilon^2 \rangle k^3 l_0^3 \frac{D}{2\pi} \quad (69)$$

を得る。また D が大きい場合には $T_\mu(x)$ の漸近展開を利用して(70)式が得られる。

$$\langle Q^2 \rangle \simeq \langle \Delta \varepsilon^2 \rangle k^3 l_0^3 \frac{D}{4\pi} \quad (70)$$

7. 数 値 例

以上のべてきたことの応用として具体的な数値例をあげることとする。そのためには、大気中における誘電率のゆらぎの強さおよびその相関距離についての数値が必要であるが、ここでは米国での実測例¹⁶⁾を参照してつぎのような値をとることとする。すなわち誘電率の強さを

$$\langle \Delta \varepsilon^2 \rangle = 4 \times 10^{-12} \quad (71)$$

また、ゆらぎの相関距離を

$$l = 80 \text{ m} \quad (72)$$

とする。(71)式および(72)式で与えられる数値から、 $\langle \Delta \varepsilon^2 \rangle k^3 l^3$ の値は使用周波数の関数として、第1表の2列目に示すように定まる。

さて、伝搬距離を 40 km にえらんで、Spherical wave mode の位相変動を求めて見よう。それには第8図を利用すればよく、さらに $\langle \Delta \varepsilon^2 \rangle k^3 l^3$ の値を考慮して位相変動の実効値を計算すれば、第1表の3列目および4列目に示すような結果となる。ここに得られた程度の位相の変動は、高い位相安定度が要求されるような装置に対しては当然大きな問題となってくると思われる。

第1表 位相変動の実効値

周波数 (Mc)	$\langle \Delta \varepsilon^2 \rangle (kl)^3$	位相変動の実効値 (度)	
		$p=1$	$p=10$
30,000	5.080×10^2	85.22	82.36
3,000	5.080×10^{-1}	8.551	6.995
300	5.080×10^{-4}	0.7853	0.6263

第9図 Bessel 形相関関数を仮定した場合の対数振幅および位相の変動の2乗平均値

8. む す び

大気中を伝搬するマイクロ波のシンチレーション・フェージングを、誘電率のゆらぎに結びつけて考察した。とくに誘電率のゆらぎが統計的異方性を有する場合に重点を置き、ゆらぎの異方性とシンチレーション・フェージングの関係について吟味した。異方性による差異が最も顕著に現われるのは、Fresnel scattering から Fraunhofer scattering に移る過渡領域においてである。このことは波動方程式を解いて初めて認められたことである。またゆらぎの相関々数を種々変えても、それがフェージングの大きさにあまり影響しないことを見出し、これにより対数振幅および位相の変動の大きさを求める場合には、数学的に取り扱いの便利な Gauss 形相関々数を仮定しても大きな誤差とはならないことが結論できた。数値例として、誘電率のゆらぎの実測値をもとにして距離 40 km の伝搬路におけるマイクロ波の位相変動を計算したが、その大きさは、高い位相安定度を必要とする装置に対しては無視しえないじょう乱を与えることがわかった。

本論で得られた諸結果を、実際の大気中でのマイクロ波伝搬に適用するには、伝搬路は自由空間伝搬路に近い状態のものが望ましいわけであるが、そのほかに伝搬方向についても、それが誘電率のゆらぎの等相関面の主軸に一致していることが仮定されている。このことは、ほぼ水平な伝搬路では実際に成立しているとしてよいが、一般の伝搬路については必ずしも満足されることではない。この方面に理論を拡張するのは今後の問題である。

本論での考察はフェージングの大きさに関するものであったが、さらにフェージングの動的特性を表わす相関関数についても、その基礎を確立しておく必要がある。また確率論的な問題としては、シンチレーション・フェージングを受けた信号の確率分布を、より正確な形で求めることが残されている¹²⁾。

付 録-I

本文 (23) 式の積分を書きかえれば

$$I_1 = \int_A^{A+L} dz \iint_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\eta d\zeta C(\xi, \eta, \zeta) \times \frac{k(A+L)}{2\pi\zeta(A+L-2z)} \sin\left\{ \frac{k(A+L)\rho^2}{2\zeta(A+L-2z)} \right\} \quad (\text{A-1})$$

となる。以下において誘電率のゆらぎの座標軸方向の相関距離をそれぞれ l_ξ , l_η および l_ζ で表わす。

このとき被積分関数中の正弦関数の argument は

$$\left| \frac{k(A+L)\rho^2}{2\zeta(A+L-2z)} \right| \geq \frac{k\rho^2}{2l_\zeta} \quad (\text{A-2})$$

なる条件を満足する。このことから

$$kl_\xi \gg \frac{l_\zeta}{l_\xi}, \quad kl_\eta \gg \frac{l_\zeta}{l_\eta} \quad (\text{A-3})$$

が成立つ場合には正弦関数はきわめて激しく振動することがわかる。したがって (A-1) 式の積分には Stationary phase method が適用できて、

$$I_1 = \int_A^{A+L} dz \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta C(0, 0, \zeta) \iint_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\eta \times \frac{k(A+L)}{2\pi\zeta(A+L-2z)} \sin\left\{ \frac{k(A+L)\rho^2}{2\zeta(A+L-2z)} \right\} \quad (\text{A-4})$$

となる。ここで

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\eta \frac{k(A+L)}{2\pi\zeta(A+L-2z)} \times \sin\left\{ \frac{k(A+L)\rho^2}{2\zeta(A+L-2z)} \right\} = 1 \quad (\text{A-5})$$

なることを考慮し、また相関距離の定義から

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C(0, 0, \zeta) d\zeta = 2l_\zeta \quad (\text{A-6})$$

であるから、ただちに次式(A-7)が得られる。

$$I_1 = 2Ll_\zeta \quad (\text{A-7})$$

付 録-II

本文 (43) 式で定義される楕円積分は

$$u = \sqrt{x_p} \xi \quad (\text{A-8})$$

なる変数変換により

$$F(x_p, x_q; 0) = \frac{1}{\sqrt{x_q}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x_p}}} \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-x\xi^2)}} d\xi \quad (\text{A-9})$$

となる。そして母数 x の存在する領域は本文中の第 7 図に示すごとくである。

まず x が第 7 図の第 I 領域内にあるとして

$$\sqrt{k} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \quad (\text{A-10})$$

とおき、さらに

$$\sqrt{k} \eta = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \xi}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \xi} \quad (\text{A-11})$$

なる変数変換を行なう。このとき (A-9) 式は

$$F(x_p, x_q; 0) = \frac{2}{\sqrt{x_q}(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})^2} \int_{\frac{1}{\sqrt{k}}}^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{d\eta}{\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{x_p - \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x_p + \frac{1}{\sqrt{x}}}} \sqrt{(\eta^2 - 1)(1 - k^2 \eta^2)}} \quad (\text{A-12})$$

となる。ここで

$$\left| \frac{\sqrt{x_p - \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x_p + \frac{1}{\sqrt{x}}}} \right| < 1 \quad (\text{A-13})$$

なることは容易にわかるが、さらにつぎの不等式が成立つ^{A-1)}。

$$|\sqrt{k}| \leq \tan \frac{\pi}{24} \quad (\text{A-14})$$

これより (A-12) 式において、1 に対して $|k|$ を無視すれば

$$F(x_p, x_q; 0) \simeq \frac{2}{\sqrt{x_q}(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})^2} \times \log \frac{2 \left(\frac{\sqrt{x_p + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x_p - \frac{1}{\sqrt{x}}}} \right)}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{\sqrt{x_p + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x_p - \frac{1}{\sqrt{x}}}} \right)^2}} \quad (\text{A-15})$$

が得られる。この近似による誤差は (A-14) 式を考慮すれば高々 2% 程度であることがわかる。一方、 x が第 II 領域内にある場合には、これを

$$\xi^2 = \frac{\xi^2}{\xi^2 - 1} \quad (\text{A-16})$$

なる変数変換によって、第 I 領域内に移して考えればよく、その結果、次式を得る。

$$F(x_p, x_q; 0) \simeq \frac{2j}{\sqrt{x_q}(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x}})} \times \log \frac{2 \left(\frac{\sqrt{1-x_p + \frac{1}{\sqrt{1-x}}}}{\sqrt{1-x_p - \frac{1}{\sqrt{1-x}}}} \right)}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{1-x}}} \frac{\sqrt{1-x_p + \frac{1}{\sqrt{1-x}}}}{\sqrt{1-x_p - \frac{1}{\sqrt{1-x}}}} \right)^2}} \quad (\text{A-17})$$

[参考文献]

A-1) 竹内端三：楕円函数論，岩波全書。

付 録-III

本文 (63) 式を部分積分することにより, つぎの漸化式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{T_\mu(x)}{\mu} &= \frac{T_{\mu+1}(x)}{\mu+1} \\ &+ \frac{\pi x^\mu}{\Gamma(\mu+2) \sin(\mu+2)\pi} V_{\mu+2}(2x; 0) \end{aligned} \quad (\text{A-18})$$

ここに $V_\nu(w, z)$ は 2 変数の Lommel 関数である. (A-18) 式より容易につぎの級数表示が得られる.

$$T_\mu(x) = \mu \pi x^\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n V_{\mu+2+n}(2x, 0)}{\Gamma(\mu+2+n) \sin(\mu+2+n)\pi} \quad (\text{A-19})$$

一方, Lommel 関数については

$$\begin{aligned} V_\nu(w, 0) &= \cos\left(\frac{w}{2} + \frac{\nu\pi}{2}\right) \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}w\right)^{-\nu+2+2m}}{\Gamma(-\nu+2+2m+1)} \end{aligned} \quad (\text{A-20})$$

なる級数展開が成立つから, これを (A-19) 式に代入し, かつ

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu+n-2m)}{\Gamma(\mu+2+n)} &= \frac{\pi}{\Gamma(\mu+1) \sin \mu\pi} \frac{1}{(2m+1) \Gamma(2m+1-\mu)} \end{aligned} \quad (\text{A-21})$$

なる関係式を使えば, 関数 $T_\mu(x)$ の級数表示として

$$\begin{aligned} T_\mu(x) &= \frac{\pi}{\Gamma(\mu) \sin \mu\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1) \Gamma(2m+1-\mu)} x^{2m} \\ &- \frac{\mu \pi x^\mu}{\sin \mu\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m \cos\left(x + \frac{\mu+m}{2}\pi\right)}{\Gamma(\mu+2+m)} \end{aligned} \quad (\text{A-22})$$

が得られる.

次数 μ が整数の場合は (A-22) 式は不定形となるが, 極限の意味で

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{\pi}{2} \frac{n}{x} + \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-2m)}{2m+1} x^{2m} \\ &- n \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1) \Gamma(2m+2)} \\ &- (\sin x \operatorname{Ci} x - \cos x \operatorname{si} x) \frac{n}{x} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m x^{2m}}{\Gamma(2m+1)} \\ &+ (\cos x \operatorname{Ci} x + \sin x \operatorname{si} x) \frac{n}{x} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{\Gamma(2m+2)} \end{aligned} \quad (\text{A-23})$$

が成立つ.

ここに $\operatorname{si} x$ および $\operatorname{Ci} x$ はそれぞれ正弦積分および余弦積分であって, 次式で定義される.

$$\operatorname{si} x = - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt \quad (\text{A-24})$$

$$\operatorname{Ci} x = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (\text{A-25})$$

関数 $T_\mu(x)$ の漸近展開を求めるには

$$\tan^{-1}\left(\frac{t}{S}\right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{S}{t}\right)^{2n+1} \quad (\text{A-26})$$

なる級数展開を利用して項別積分すればよく, その結果

$$\begin{aligned} T_\mu(x) &\sim \frac{1}{\Gamma(\mu)x} \left[\frac{\pi}{2} \Gamma(\mu+1) \right. \\ &\left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(2n+\mu+2)}{(2n+1)x^{2n+1}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A-27})$$

となる.

〔参考文献〕

- 1) R.B. Muchmore and A.D. Wheelon : Line-of-sight propagation phenomena, I., Proc. IRE, 43 (1955), 1437.
- 2) A. D. Wheelon and R.B. Muchmore : Line-of-sight propagation phenomena, II., Proc. IRE, 43 (1955), 1450.
- 3) L.A. Chernov : Wave propagation in a random medium, McGraw-Hill, (1960).
- 4) B.M. Fannin : Line-of-sight wave propagation in a randomly inhomogeneous medium, IRE Trans, PGAP, AP-4, (1956), 661.
- 5) A.W. Straiton, A.P. Deam and G.B. Walker : Spectra of Radio Refractive index between ground level and 5000 feet above ground, IRE Trans, PGAP, AP-10(1962) 732.
- 6) R. Bolgiano, Jr. : A theory of wavelength dependence in ultrahigh frequency transhorizon propagation based on meteorological considerations, J. Res. NBS, 64 D(1960), 231.
- 7) J.W. Herbstreit and M.C. Thompson : Measurements of the phase of radio waves received transmission paths with electrical lengths varying as a result of atmospheric turbulence, Proc. IRE, 43 (1955), 1391.
- 8) C.W. Tolbert and A.W. Straiton : Attenuation and fluctuation of millimeter radio waves, IRE Nat. Conv. Record, Pt. I, (1957) 12.
- 9) K.C. Yeh : Propagation of spherical waves through an ionospheric containing anisotropic irregularities : J. Res. NBS, 66 D (1962), 621.
- 10) H.G. Booker : The use of radio stars to study irregular refraction of radio waves in the ionosphere, Proc. IRE, 46 (1958), 298.
- 11) K.A. Norton, L.E. Vogler, W.V. Mansfield and P.J. Short : The probability distribution of the amplitude of a constant vector plus a Rayleigh-distributed vector, Proc. IRE, 43 (1955), 1354.
- 12) P. Beckmann : Statistical distribution of the amplitude and phase of a multiply scattered field, J. Res. NBS, 66 D (1962), 231.
- 13) 米山務, 虫明康人 : 大気中の異方性渦乱のマイクロ波伝播に及ぼす影響 (その一), 東北大学伝送工学研究会資料 (1961).
- 14) 米山務, 虫明康人 : 見透し内マイクロ波伝播に於けるシンチレーション・フェーディングについて (その三), 東北大学伝送工学研究会資料 (1962).
- 15) 米山務, 虫明康人 : 見透し内マイクロ波伝播に於けるフェーディングに関する研究 (その二), 東北大学伝送工学研究会資料 (1962).
- 16) E.E. Gossard : Power spectra of temperature, humidity and refractive index from aircraft and tethered balloon measurements, IRE Trans. PGAP, AP-8 (1960), 186.