抵抗を負荷したテレビ受信用単向性 小形ループアンテナ

東北大学工学部 三 日 市 政 司
森 哲 也
佐 藤 利 三 郎

テレビ受信用の小形アンテナとしての、抵抗を負荷したループアンテナに関する諸特性を報告している。抵抗を負荷したループアンテナは、その抵抗値が映像インピーダンスに近い値のとき、広い周波数帯域にわたり、カーゴイド形の単向な指向性が得られ、入力インピーダンスもほぼ一定の値をとり、カラーテレビジョンのゴースト解消用としてもすぐれている。

1. ま え が き

テレビ受信用小形アンテナとしての、抵抗を負荷したループアンテナは、カーゴイド形の単向な指向性を持ち、カラーテレビジョンのゴースト解消に適しており、また、入力インピーダンスも安定である。

最近、科学技術の発達が著しく、種々の部品や装置が高い信頼性を持ち、かつ小形化されている。にもかかわらず、アンテナはなかなか小さくならない。本報告はこの点を考慮しながら、抵抗を負荷したループアンテナの指向性および電力利得に関して深く検討したものである。

ループアンテナの解析は古くから種々行なわれているが、ここで用いる方法は、フーリエ級数によるものである。この系統の論文は E. Hallén により行なわれ、その後 J. E. Storer, K. Iizuka が拡張し、筆者らにより、さらに厳密な解析を与えるものとなった。

2. ローデッドループアンテナに関する 理論の概要

2.1 ループアンテナによる電磁界

図1に示すようなループアンテナを考える。ここで、

b : ループアンテナの半径

$I(\beta)$: 角度 β の位置のループの電流

R_0 : $I(\beta)$ から P 点までの距離

図1 ループアンテナと使用座標
The circular loop antenna and used
coordinate.

とする。

時間依存を $e^{j\omega t}$ とすれば、点 $P(\rho, \phi, z)$ における Hertz Vector: $\pi(\rho, \phi, z)$ の円筒座標成分は、Green 関数を用い次のように表わされる。

$$\pi_r(\rho, \phi, z) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{-\pi}^{\pi} I(\beta) G(\rho, \phi, z; b, \beta, z_p) b \times \sin(\phi - \beta) d\beta \quad (1)$$

$$\pi_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{-\pi}^{\pi} I(\beta) G(\rho, \phi, z; b, \beta, z_p) b \times \cos(\phi - \beta) d\beta \quad (2)$$

Maxwell の方程式より、電磁界は Hertz Vector を用い次のように表わされる。

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = \nabla \nabla \cdot \pi(\rho, \phi, z) + k^2 \pi(\rho, \phi, z) \quad (3)$$

$$\mathbf{H}(\rho, \phi, z) = j\omega\epsilon \nabla \times \pi(\rho, \phi, z) \quad (4)$$

(1)~(4)式より、電界の円筒座標成分は、次のように求まる。

"Small Directional Loop Antenna Loaded with Resistance for Television Receiving" by Masashi Mikkaichi, Tetuya Mori and Risaburo Satoh (Department of Electrical and Communication Engineering, Faculty of Engineering, Tohoku University, Sendai)

図2 ループアンテナの構造
Structure of the loop antenna.

$$E_\rho(\rho, \phi, z) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{-\pi}^{\pi} I(\beta) \left[\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\rho} + k^2 b \sin(\phi - \beta) \right] \times G(\rho, \phi, z; b, \beta, z_p) d\beta \quad (5)$$

$$E_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{-\pi}^{\pi} I(\beta) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + k^2 b \cos(\phi - \beta) \right] \times G(\rho, \phi, z; b, \beta, z_p) d\beta \quad (6)$$

$$E_z(\rho, \phi, z) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{-\pi}^{\pi} I(\beta) \frac{\partial^2}{\partial\phi\partial z} \times G(\rho, \phi, z; b, \beta, z_p) d\beta \quad (7)$$

ただし,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

2.2 ループアンテナの導体表面の電界表示

図2に示すようなループアンテナを考える。ここで、

a : ループ導線の半径

b : ループアンテナの半径

$I_1(\beta)$: 角度 β の位置のループの電流

$$r(\phi - \beta) = [b^2 + (b - a)^2 - 2b(b - a)\cos(\phi - \beta)]^{1/2} \quad (11)$$

である。

導体表面の電界の ϕ 方向成分を $E_\phi(\phi)$ とすれば、(6) 式より、

$$E_\phi(\phi) = -\frac{j\xi}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[kb \cos(\phi - \beta) + \frac{1}{kb} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] \times I_1(\beta) \frac{e^{-jkr(\phi - \beta)}}{r(\phi - \beta)} d\beta \quad (12)$$

ただし、

$$\xi = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

ここで、電流分布を次のようにおく。

$$I_1(\beta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m e^{-jm\beta} \quad (13)$$

これを(12)式に用いると、ループ表面の電界を次のように級数で求めることができる¹⁾。

$$E_\phi(\phi) = -\frac{j\xi}{2b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \alpha_n e^{-jn\phi} \quad (14)$$

ただし、

図3 ループ導体表面における電界の
 ϕ 方向成分
Tangential component of the electric field
along the loop antenna.

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(kb \cos\phi + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right) \frac{e^{-jkr(\phi)}}{r(\phi)} e^{jn\phi} b d\phi \quad (15)$$

2.3 電源および導体表面の境界条件

$\phi = 0$ の位置に電源を置くと、ループの導体が完全導体である場合には、 $\phi = 0$ を除くすべてのループ上の ϕ 方向の電界は零である。この電界のようすが $f(\phi)$ で表わされるとすれば、 $f(\phi)$ は ϕ の周期関数であることより、フーリエ級数に展開することができる。

$$f(\phi) \equiv - \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l e^{-jl\phi} \quad (16)$$

とおけば、

$$a_l = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) e^{jl\phi} d\phi \quad (17)$$

$f(\phi)$ は電源を除くすべての点で零であるから、

$$a_l = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} f(\phi) e^{jl\phi} d\phi \quad (18)$$

と表わすことができる。

また、給電電圧 V_1 は次式で表わされる。

$$V_1 = - \int_{-\theta}^{\theta} f(\phi) b d\phi \quad (19)$$

ただし、 θ は電源の片端の角度を表わす。

たとえば、給電点の間隙の電界が一樣と見なせる場合は、ループ上の ϕ 方向の電界は図3のようになる。

電源の大きさを V とすれば、間隙の幅を $2c$ として $V = 2c E_\phi$

(17) 式より

$$a_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{V}{2c} e^{-jl\phi} d\phi \quad (20)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{V}{lc} \sin l\theta \quad (21)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{V}{lc} \sin l \left(\tan^{-1} \frac{c}{b} \right) \quad (22)$$

2.4 ループアンテナの電流分布

電流分布は、(14) 式と (16) 式の電界が等しいとおいて得ることができる。(14)、(16) 式より、

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l e^{-jl\phi} = \frac{j\xi}{2b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \alpha_n e^{-jn\phi} \quad (23)$$

両辺に $e^{jn\phi}$ を乗じ、 $-\pi$ から π まで積分すれば、

$$a_n = \frac{j\xi}{2b} I_n \alpha_n \quad (24)$$

または、

$$I_n = \frac{2b}{j\xi \alpha_n} a_n \quad (25)$$

(25) 式を (13) 式に用いることにより、求める電流分布が決定する。

$$I(\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2b}{j\xi \alpha_n} a_n e^{-jn\beta} \quad (26)$$

(22) 式の a_n を用いると、

$$I(\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{V}{j\pi\xi \alpha_n lc} \sin l \left(\tan^{-1} \frac{c}{b} \right) e^{-jn\beta} \quad (27)$$

2.5 ローデッドループアンテナの四端子理論

図4に示すように、 $\phi=0$ 、 $\phi=\pi$ の位置に V_1 、 V_2 の両電源がある場合は、図5のような等価回路を得ることができる¹⁾。ここで、

$$y_1 = \frac{2}{j\pi\xi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta_{2m}} \quad (28)$$

$$y_2 = \frac{2}{j\pi\xi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta_{2m-1}} \quad (29)$$

ただし、

$$\beta_m = \frac{\alpha_m}{2\pi b a_m}, \quad a_m' = \frac{a_m}{V}$$

F パラメーターで表わすと、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$A = D = \frac{y_1 + y_2}{y_1 - y_2} \quad (31)$$

図4 ローデッドループアンテナの構造
Structure of the loaded loop antenna.

図5 ローデッドループアンテナの四端子等価回路

Equivalent circuit of the loaded loop antenna.

$$B = \frac{2}{y_1 - y_2} \quad (32)$$

$$C = \frac{2y_1 y_2}{y_1 - y_2} \quad (33)$$

この y_1 、 y_2 を用い、ローデッドループアンテナの電流分布を決定することができる¹⁾。

ロードするアドミッタンスを Y とすれば、

$$I(\beta) = \frac{V_1}{j\pi\xi} \left\{ \frac{1}{\beta_0} \left(1 - \frac{y_1 - y_2}{2Y + y_1 + y_2} \right) + \frac{2}{\beta_1} \left(1 + \frac{y_1 - y_2}{2Y + y_1 + y_2} \right) \times \cos \beta + \frac{2}{\beta_2} \left(1 - \frac{y_1 - y_2}{2Y + y_1 + y_2} \right) \cos 2\beta + \dots \right\} \quad (34)$$

3. ローデッドループアンテナの遠方電磁界

遠方における ϕ 方向の電界は次式のようになる。

$$E_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{k^2 b}{j\omega\epsilon} \int_{-\pi}^{\pi} I(\beta) \cos(\phi - \beta) \times G(\rho, \phi, z; b, \beta, z_p) d\beta \quad (35)$$

これを計算するために、まず Green 関数を求める。

3.1 円筒座標による Green 関数

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(r - r_p) \quad (36)$$

を満足する G を、円筒座標で求めると (付録 I) 、

$$G(\rho, \phi, z; b, \beta, z_p) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2)_m}{2\pi} \cos m(\phi - \phi_p) \int_0^{\infty} \frac{J_m(\lambda b)}{2\kappa} \times e^{-\kappa(z - z_p)} J_m(\lambda \rho) \lambda d\lambda \quad (37)$$

ただし、

$$(2)_0 = 1 \quad (2)_m \geq 1 = 2 \quad \kappa = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$$

$\delta(x)$: ディラックの δ -関数である。

ここで、Bessel 関数の次の関係を用いて、上式の積分範囲を $-\infty$ から ∞ にして後の計算の便利ようにする。

$$\begin{aligned} J_m(-z) &= (-1)^m J_m(z), \\ H_m^{(2)}(-z) &= -(-1)^m H_m^{(1)}(z) \\ J_m(z) &= \frac{1}{2} \{ H_m^{(1)}(z) + H_m^{(2)}(z) \} \\ -\lambda J_m(-z') H_m^{(2)}(-z) &= \lambda J_m(z') H_m^{(1)}(z) \\ -\lambda H_m^{(2)}(-z') J_m(-z) &= \lambda H_m^{(1)}(z') J_m(z) \end{aligned} \quad (38)$$

これより、

$$\begin{aligned} G(\rho, \phi, z; b, \beta, z_p) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2)_m}{4\pi} \cos m(\phi - \beta) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_m(\lambda b)}{2\kappa} H_m^{(2)}(\lambda \rho) e^{-\kappa|z - z_p|} \lambda d\lambda \\ &\rho \geq b \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} G(\rho, \phi, z; b, \beta, z_p) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2)_m}{4\pi} \cos m(\phi - \beta) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_m^{(2)}(\lambda b)}{2\kappa} J_m(\lambda \rho) e^{-\kappa|z - z_p|} \lambda d\lambda \\ &\rho \leq b \end{aligned} \quad (40)$$

(39) 式を鞍部点法により展開すれば (付録 II),

$$G(\rho, \phi, z; b, \beta, z_p) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2 \cdot (2)_m}{8\pi} \cos m(\phi - \beta) e^{j(m/2)\pi} \times J_m(kb \cos \theta) \frac{e^{-jkR}}{R} \quad (41)$$

ゆえに、遠方における E_ϕ は

$$E_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{k^2 b}{4\pi j \omega \epsilon} \int_{-\pi}^{\pi} I(\beta) \sum_{m=0}^{\infty} \cos(\phi - \beta) \cos m(\phi - \beta) \times (2)_m e^{j(m/2)\pi} J_m(kb \cos \theta) \frac{e^{-jkR}}{R} d\beta \quad (42)$$

ただし、 R : ループ中央から P 点までの距離

4. 理論計算および実験結果

4.1 ローデッドループアンテナの入力インピーダンス

2.5節で求めた等価四端子網の回路素子 y_1, y_2 および F パラメーターを用いて、ローデッドループアンテナの諸特性が求まる。

映像インピーダンス: $W = \sqrt{y_1 y_2}$

動作伝送量: $S_B = \frac{1}{2} \left(A + \frac{B}{W} + C W + D \right)$

動作減衰量: $\log_e |S_B|$

動作位相量: $\arg S_B$

入力アドミッタンス: y_{in}

図 6 ローデッドループアンテナの映像インピーダンス

Image impedance of the loaded loop antenna.

図 7 ローデッドループアンテナの映像インピーダンス

Image impedance of the loaded loop antenna.

$$y_{in} = \frac{(y_1 + y_2)Y + 2y_1 y_2}{y_1 + y_2 + 2Y} \quad (43)$$

ロードを短絡した場合: $y_{in s}$

$$y_{in s} = \frac{1}{2} (y_1 + y_2)$$

ロードを開放した場合: $y_{in o}$

$$y_{in o} = \frac{2y_1 y_2}{y_1 + y_2}$$

これらを図 6 ~ 図 12 に示す。ただし、

$$\Omega = 2 \log_e \frac{2\pi b}{a}$$

4.2 ローデッドループアンテナの指向性

(42) 式において (34) 式も考慮し

$$I(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2)_n I_n \cos n\beta$$

とおけば、

$$E_\phi(\rho, \phi, z_p) = \frac{k^2 b}{2j \omega \epsilon} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m \times \{ e^{j(|m+1|/2)\pi} J_{|m+1|}(kb) + e^{j(|m-1|/2)\pi} \times J_{|m-1|}(kb) \} e^{jm\phi} \quad (44)$$

図 13, 図 14 にこれを示す。

4.3 ローデッドループアンテナの電力利得

利得は Scattering Matrix および指向性を用い、近似

図 8 ローデッドループアンテナの動作減衰量と動作位相

Transmission constant of the loaded loop antenna ($1/Y: 300\Omega$).

図 9 入力アドミッタンス

Input admittance ($1/Y: 300\Omega$).

図 10 入力端の定在波比

Voltage standing wave ratio at the driving point ($1/Y: 300\Omega$).

図 11 負荷を短絡した場合の入力インピーダンス

Input impedance in the case of $1/Y=0$.

図 12 負荷を開放した場合の入力インピーダンス

Input impedance in the case of $Y=0$.

的に求めることができる。図 15 に示すように、入射電力: P , 反射電力: P' , 透過電力: P'' とすれば,

$$\text{Gain} = 10 \log_{10} \frac{P - P' - P''}{P - P'} + 3 \quad (\text{dB}) \quad (45)$$

$$= 10 \log_{10} \frac{1 - |S_{11}|^2 - |S_{21}|^2}{1 - |S_{11}|^2} + 3 \quad (46)$$

ただし、第 1 項は Scattering Matrix による能率であり、第 2 項は完全半波長アンテナに比較したときの指向性利得である。

ここに、

図 13 ローデッドループアンテナの指向性

Radiation pattern of the loaded loop antenna ($kb=0.3$). The value of load resistance is equal to the value shown in fig. 6.

図 14 ローデッドループアンテナの指向性

Radiation pattern of the loaded loop antenna ($kb=0.7$). The value of load resistance is equal to the value shown in fig. 6.

図 15 入射、反射、透過電力

Incident, reflected and refracted power.

$$|S_{11}|^2 = \frac{\left| \frac{B}{2} Y - \frac{C}{2Y} \right|^2}{\left| A + BY + \frac{C}{Y} + D \right|^2}$$

$$|S_{21}|^2 = |S_{12}|^2 = \frac{1}{\left| A + BY + \frac{C}{Y} + D \right|^2}$$

図 16 ローデッドループアンテナの電力利得
Power gain of the loaded loop antenna.
(1/Y: 300Ω)

図 17 ローデッドループアンテナの電力利得
Power gain of the loaded loop antenna.
(1/Y: 300Ω)

図 16, 図 17 にこれを示す。

5. む す び

抵抗を負荷したループアンテナは、給電点側に、カーゴイド形の単向な指向性をもつ。しかも $kb < 1$ において、構造により定まる抵抗を負荷することにより、小形で、指向性のあるアンテナが容易に得られることは、大きな特色である。また、入力インピーダンスの周波数特性も良い。電圧利得は低い、強電界内では充分実用でき、弱電界内においても、良い増幅を行なえば実用が可能となる。また、 Q を小さくすると電力利得が上がる。このことは、ループの半径 b が一定でも、等価半径 a を大きくすれば利得が上がることを示している。

このように、抵抗を負荷したループアンテナは、テレビ受信用アンテナとして、カラーテレビジョンのゴースト解消用として、すぐれた特性をもっている。

将来、指向性の面で、電力利得の面で、この形のアンテナがさらに改善され、応用されるであろうが、本論文がそれらの一助となれば幸いである。

また、ローデッドループアンテナに回路網理論を適用し、種々の特性を明らかにした。これが抵抗回路の取り

扱いに多少ともお役に立てば幸いである。

(昭和 42 年 9 月 1 日受付)

〔参 考 文 献〕

- 1) 三田市, 森, 佐藤: 抵抗を負荷した小型ループアンテナ, 信学会研資, ANT RP 66-24 (1966.8.25)
- 2) J. E. Storer: Impedance of thin wire loop antennas, Trans. AIEE, 75, Nov. (1956) 606-619
- 3) K. Iizuka: The Circular loop antenna multiloading with positive and negative resistors, IEEE Trans., AP, Jan. (1965) 7-20
- 4) S. Adachi and Y. Mushiaki: Studies of large circular loop antenna, SCI. Rep., RITU, B-(Elect. Comm.) 9, 2, Sep. (1957)

〈付 録〉

I. 円筒座標による Green 関数

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(r - r_p)$$

を満足する G を求める。

直交曲線座標 (u, v, w) においては一般に,

$$\nabla^2 G = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial G}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial G}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial G}{\partial w} \right) \right] \quad (\text{付} \cdot 1)$$

$$\delta(r - r_p) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \delta(u - u_p) \delta(v - v_p) \delta(w - w_p) \quad (\text{付} \cdot 2)$$

円筒座標の場合には, $h_1 = 1, h_2 = \rho, h_3 = 1$. したがって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho \frac{\partial G}{\partial \rho} \right\} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + k^2 G \\ = -\frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_p) \delta(\phi - \phi_p) \delta(z - z_p) \end{aligned} \quad (\text{付} \cdot 3)$$

ここで,

$$G = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos m\phi + b_m \sin m\phi) F_m(\rho, z) \quad (\text{付} \cdot 4)$$

とおけば,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos m\phi + b_m \sin m\phi) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho \frac{\partial F_m(\rho, z)}{\partial \rho} \right\} \right. \\ \left. - \frac{m^2}{\rho^2} F_m(\rho, z) + \frac{\partial^2 F_m(\rho, z)}{\partial z^2} + k^2 F_m(\rho, z) \right] \\ = -\frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_p) \delta(\phi - \phi_p) \delta(z - z_p) \end{aligned} \quad (\text{付} \cdot 5)$$

Fourier Bessel 変換, および Bessel の微分方程式より,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos m\phi + b_m \sin m\phi) \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} g_m(z, \lambda) - \kappa^2 g_m(z, \lambda) \right] \\ = - \sum_{m=0}^{\infty} \delta(\phi - \phi_p) \delta(z - z_p) J_m(\lambda \rho_p) \end{aligned} \quad (\text{付} \cdot 6)$$

ただし,

$$\kappa = \sqrt{\lambda^2 - k^2} \quad (\text{付} \cdot 7)$$

$$g_m(z, \lambda) = \int_0^\infty F_m(\rho, z) \rho J_m(\lambda \rho) d\rho \quad (\text{付} \cdot 8)$$

いま, $g_m(z, \lambda)$ の Fourier 変換を $\hat{g}_m(n, \lambda)$ とすれば,

$$\hat{g}_m(n, \lambda) = \int_{-\infty}^\infty g_m(z, \lambda) e^{-jnz} dz \quad (\text{付} \cdot 9)$$

これを, (付・6) 式に用いると,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^\infty (a_m \cos m\phi + b_m \sin m\phi) (n^2 + \kappa^2) \hat{g}_m(n, \lambda) \\ &= \sum_{m=0}^\infty \delta(\phi - \phi_p) J_m(\lambda \rho_p) e^{-jnz_p} \quad (\text{付} \cdot 10) \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^\infty (a_m \cos m\phi + b_m \sin m\phi) F_m(\rho, z) \\ &= \int_0^\infty \frac{\delta(\phi - \phi_p) J_m(\lambda \rho_p)}{2\kappa} e^{-\kappa(z-z_p)} J_m(\lambda \rho) \lambda d\lambda \quad (\text{付} \cdot 11) \end{aligned}$$

ゆえに求める G は,

$$\begin{aligned} G &= \sum_{m=0}^\infty \frac{(2)_m}{2\pi} \cos m(\phi - \phi_p) \int_0^\infty \frac{J_m(\lambda \rho_p)}{2\kappa} e^{-\kappa(z-z_p)} \\ & \quad J_m(\lambda \rho) \lambda d\lambda \quad (37) \end{aligned}$$

II. (41) 式の導出

(39) 式をふたたび書くと

$$\begin{aligned} G(\rho, \phi, z) &= \sum_{m=0}^\infty \frac{(2)_m}{8\pi} \cos m(\phi - \beta) \\ & \times \int_{-\infty}^\infty \frac{J_m(\lambda \rho_p) H_m^{(2)}(\lambda \rho)}{\kappa} e^{-\kappa|z-z_p|} \lambda d\lambda \quad (39) \\ & (\rho \geq \rho_p, \kappa = \sqrt{\lambda^2 - k^2}) \end{aligned}$$

遠方においては

$$H_m^{(2)}(\lambda \rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda \rho}} \exp \left\{ -j \left(\lambda \rho - \frac{2m+1}{4} \pi \right) \right\} \quad (\text{付} \cdot 12)$$

また,

$$\lambda = k \sin \alpha \quad (\text{付} \cdot 13)$$

とおけば,

$$\kappa = j k \cos \alpha \quad (\text{付} \cdot 14)$$

さらに,

$$\begin{aligned} z - z_p &= R \sin \theta \\ \rho &= R \cos \theta \quad (\text{付} \cdot 15) \end{aligned}$$

とおき, 鞍部点法により積分を行なうと,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty \frac{J_m(\lambda \rho_p) H_m^{(2)}(\lambda \rho)}{\kappa} e^{-\kappa|z-z_p|} \lambda d\lambda \\ &= \frac{2}{j} e^{(m+1/2)\pi} J_m(k \rho_p \cos \theta) \frac{e^{-jkR}}{R} \quad (\text{付} \cdot 16) \end{aligned}$$

ただし,

付・図 1 ループアンテナと座標
Used coordinate.

付・図 2 λ-平面
λ-plane.

付・図 3 α-平面
α-plane.

最速降下線は $\sin(\xi + \theta) \cosh \eta = 1$

鞍部点は $\xi = \frac{\pi}{2} - \theta, \eta = 0$

鞍部点における最速降下線の傾きが実軸となす角

度は $\frac{\pi}{4}$ である.

付・図 1 ~ 付・図 3 にこのようすを示す.

(39) 式に (付・16) 式を用いると,

$$\begin{aligned} G &= \sum_{m=0}^\infty \frac{2 \cdot (2)_m}{8\pi} \cos m(\phi - \beta) e^{-j(m/2)\pi} \\ & \times J_m(k \rho_p \cos \theta) \frac{e^{-jkR}}{R} \quad (41) \end{aligned}$$