八木・宇田アンテナの最大利得

東京芝浦電気株式会社 総合研究所 電子機器研究所

永 井 淳

等間隔の微小ダイポールを素子とする Endfire Array において、素子上の電流が、振幅一定、位相が漸進的変化の仮定での利得の表示式から、アレイ全長、素子間隔に対する最大利得、最適位相速度を求めた。この値と従来得られていた八木・宇田アンテナの利得とを比較し、ここで得られた値に半波長ダイポールと微小ダイポールとの利得差 0.39 dB を加えたものが、ほぼ八木・宇田アンテナの最大利得を示すことを明らかにした。

1. ま え が き

従来よりエンドファイヤアレイの利得に関しては、理論的、実験的に種々な報告がなされている。エンドファイヤアレイの最大利得に関し最初に理論的検討を加えたのは Hansen, Woodyard であり、彼らが得た結果は、Hansen-Woodyard 条件として著名である¹⁾。彼らによれば、等方性アンテナ (Isotropic Radiator) が一直線上の全長 L なる範囲に間隔 0 で無限に並んだ場合の指向性利得 (directivity) は、

$$D=4.83 L/\lambda \quad (1)$$

で与えられる。ただし各素子上の電流振幅一定で、位相はアレイに沿って βz で漸進的変化をしていると仮定している。ここで β はアレイに沿う位相定数、 z はアレイに沿う距離を示している。

ついで微小ダイポールが間隔 0 で帯状に並んだ場合に Hansen らとまったく同じ仮定で Reid が指向性利得を計算し²⁾、

$$D=2.7+(8.4 L/\lambda) \quad (2)$$

なる値を導いた。しかし Reid は全長 2λ までのアレイしか計算していないので、それより長いアレイに関し、手代木は電算機で計算し、(2)式を、

$$D=2.5+(8.2 L/\lambda) \quad (2)'$$

と修正した³⁾。

不連続な微小ダイポールを素子とするアレイに対しては、まず Tai が相隣れる素子間の位相変化を kd ($k=2\pi/\lambda$: 自由空間波数、 d : 素子間隔) とし、振幅は一定

の条件のもとに式を導いた⁴⁾。これに対し、位相変化が任意の βd で、振幅一定の条件での利得の計算式は手代木、永井により与えられた⁵⁾。

一方、実験的には Fishenden, Wiblin が全長 4.5λ までの八木・宇田アンテナの利得を 1949 年に発表して以来⁶⁾、虫明、宇田が 3 素子までの最大利得⁷⁾、Cottony が 4.2λ までの結果⁸⁾、Ehrenspeck, Poehler が 6.25λ までの結果⁹⁾をそれぞれ発表している。

Ehrenspeck, Poehler の結果、および最近発表された Thiele の結果¹⁰⁾を見てもわかるように、八木・宇田アンテナ上の電流振幅は給電点付近で大きく、給電点から離れるにしたがって減少し、その後はほぼ一定とみなせるような振幅となる。また、位相も完全に直線的な変化はせずに、若干のずれをともなっている。このような電流分布は利得の低下をもたらす¹¹⁾。この結果、振幅一定、位相が漸進的な直線変化をしている等間隔微小ダイポールアレイは、八木・宇田アンテナの理想的モデルと考えられる。このアレイで得られた最大利得に、半波長ダイポールアンテナ (一般の八木・宇田アンテナは半波長ダイポールが素子であると考えて) と、微小ダイポールアンテナとの利得差 0.39 dB を加えることにより、理想的八木・宇田アンテナの最大利得が求められることになる*。

文献 5) では、式の導出に重きを置いて計算例が少なかったもので、本報告ではアレイ全長 6λ までを綿密に計

* 微小ダイポールで構成されたエンドファイヤアレイと、半波長素子で構成されたエンドファイヤアレイとの利得差は、利得が低い場合には 0.39 dB あり、利得が高くなるに従って 0.39 dB より小さくなって、徐々に 0 に近づくと考えられる。この意味で微小ダイポールアレイの利得に 0.39 dB を加えたものと加えないものとの間の値が理想的八木・宇田アンテナの利得と考えられる。そこで、この 0.39 dB を加えたものを最大値の意味で最大利得とした。

"Some Considerations on Maximum Gain of Yagi-Uda Antenna" by Kiyoshi Nagai (Electronics Equipment Lab., Toshiba Research and Development Center, Tokyo Shibaura Electric Co. Ltd., Kawasaki)

図 1 等間隔配列微小ダイポールアレイとその座標系

算し、これと従来の結果とを比較した。この結果、八木・宇田アンテナの利得の最大値が明確になり、従来 cut-and-try で行なわれていた八木・宇田アンテナの設計にひとつの目安を与えることができた。

2. 指向性利得の理論式

微小ダイポールアンテナが等間隔で配列されているときに、座標系を図 1 に示すようにとる。微小ダイポールの代りに、同じ位置に同じ励振をされている等方性アンテナが置かれている場合の指向性を $D_{iso}(\theta, \phi)$ とすれば、微小ダイポールの指向性は $\sin \alpha$ に比例するから、等間隔微小ダイポールアレイの指向性利得 D は、

$$D = \frac{D_{iso}(0) \tilde{D}_{iso}(0)}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \alpha D_{iso}(\theta, \phi) \tilde{D}_{iso}(\theta, \phi) \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi} \quad (3)$$

で与えられる。ただし $\tilde{D}$ は D の複素共役を示す。(3)式で $D_{iso}(\theta, \phi) \tilde{D}_{iso}(\theta, \phi) / D_{iso}(0) \tilde{D}_{iso}(0)$ はアレイ係数 (array factor) を $\theta=0$ で正規化したものの自乗である。良く知られているように N 素子の等方性アンテナが等間隔 d で配列された場合、各素子上の電流振幅は一定で、位相が順次 βd で遅れているならば、アレイ係数は次式で与えられる。

$$d(\theta) = \frac{\sin(\Psi N/2)}{\sin(\Psi/2)} \quad (4)$$

ただし、

$$\Psi = (\beta - k \cos \theta) d \quad (5)$$

である。(4)式のアレイ係数が $\theta=0$ で 1 になるように正規化すると、

$$\hat{d}(\theta) = \frac{\sin(\Psi N/2)}{\sin(\Psi/2)} \cdot \frac{\sin(\delta/2)}{\sin(\delta N/2)} \quad (6)$$

となる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} \delta &= (\beta - k) d \\ \Psi &= (\beta - k \cos \theta) d = k(1 - \cos \theta) d + \delta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

である。(6)式を(3)式に代入すると、

$$D = \frac{1}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \alpha \left(\frac{\sin \Psi N/2}{\sin \Psi/2} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \delta/2}{\sin \delta N/2} \right)^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{4} \int_0^\pi (1 + \cos^2 \theta) \left(\frac{\sin \Psi N/2}{\sin \Psi/2} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \delta/2}{\sin \delta N/2} \right)^2 \sin \theta d\theta} \quad (8)$$

が得られる。この(8)式の分母の積分はかなり複雑であるが、漸化式を用いて厳密に積分できる⁹⁾。この結果、指向性利得は次式で与えられる。

$$D = \left(\frac{\sin \delta N/2}{\sin \delta/2} \right)^2 \frac{2}{3} \frac{Nkd + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{N-n}{n} \cos \beta d}{\left\{ \left(1 - \frac{1}{n^2 k^2 d^2} \right) \sin nkd + \frac{1}{nkd} \cos nkd \right\}} \quad (9)$$

(9)式より N, d, β を変化させたときの指向性利得 D が求められる。

3. 指向性利得の計算結果

計算にあたっては、アレイ全長を $0.5\lambda, \lambda, 1.5\lambda, 2\lambda, 3\lambda, 4\lambda, 5\lambda, 6\lambda$ の一定とし、素子数を種々変化させたとき (d を変化したことになる) β をパラメーターとして(9)式を計算し、最大利得 D と、その最大利得を実現するのに必要とされる β の値とを求めた。

図 2 にこの計算の一例を示す。すなわち図 2 では、横軸に β/k をとり、縦軸に D をとったもので、全長 4λ のアレイで素子数が 15 および 33 の場合を示している。本図より全長 4λ 、素子間隔 $d=0.286\lambda$ で 15 素子で構成されるアレイでは最適 $\beta/k=1.112$ 、このとき指向性利得 $D=35.2$ 、また $d=0.125\lambda$ 、33 素子アレイでは最適 $\beta/k=1.126$ 、 $D=35.8$ であることがわかる。

このような数値をすべて求め、全長を定めたときに到達できる指向性利得、およびそのとき必要とされる β/k の値を図示したのが図 3 である。図 3(a) はアレイ全長を定めたときに、素子間隔によって指向性利得がどのように変化するかを示したものであり、図 3(b) は図 3(a)

図 2 素子間隔 β/k と指向性利得の関係

図3 等間隔微小ダイポールアレイの指向性利得と最適 β/k

に示す利得を実現するために必要な位相速度 β を示したものである。

これらの図より、素子間隔を 0.25λ より近づけて多数の素子を並べても、利得はほとんど変わらず、最適位相速度が実現できるならば、 0.25λ 程度まで素子間隔を離れたほうが得策であると結論できる。

4. 八木・宇田アンテナの最大利得

3章で求めた指向性利得は、等間隔、微小ダイポールアレイによるものである。この利得に、微小ダイポールと半波長ダイポールの利得差 0.39dB を加えたものは、理想的八木・宇田アンテナの利得と考えられる。

横軸にアレイ全長をとり、縦軸は上記の指向性利得をとって、理想的八木・宇田アンテナがとりうる最大利得を示したのが図4の実線である。ただし素子間隔 0.25λ のときの利得を使用している。左縦軸には指向性利得を等方性アンテナに対する倍数で示してある。一般に八木・宇田アンテナの利得は、半波長アンテナに対するものを dB で表わして使用されるので、その値を右縦軸に示

図4 理想的八木・宇田アンテナの利得とアレイ長との関係

した。さらに同図上には、1章に述べた多くの人々の実験結果および理論結果を示した。

破線は Reid の計算式を手代木が計算したものであり、アレイ素子は微小ダイポールである。だから、さらに 0.39dB を加えなければならないが、これを加えると実線とほとんど一致するので、図が繁雑になるのをさけるために、あえて 0.39dB を加えない値を示した。

二点鎖線は Fishenden らのもので測定年代も古く、最高利得に到達していない。

点線は Cottony のもので、上の線は導波器長を1本ごとに調整した場合、下の線は導波器長を一定として最大利得に調整した場合のものである。

一点鎖線は Ehrenspeak, Poehler がマイクロ波帯で、導波器長一定で行なった実験結果である。

さらに左下の一点鎖線は虫明が行なった理論的、実験的な最大利得の2素子、3素子八木・宇田アンテナの結果である。

ここで気がつくことは、Cottony の下の点線と Ehrenspeak らの一点鎖線は同じものを測定しているから一致せねばならないことである。Cottony は自分の結果を対数等間隔のグラフに示し、それに虫明の結果を並記して虫明の延長上にのるから自分の結果は妥当だとしているが、本図で見ると若干大きすぎ、虫明の一点鎖線の延長は Ehrenspeak らの一点鎖線と一致する。Cottony は VHF 帯で、屋外で実験しているのにくらべ、Ehrenspeak らはマイクロ波帯で電波暗室中で実験しており、自動電界分布測定器なども並用している点から考えて、Cottony の実測では利得が大きめに出ていると考えられる。そこで下側の点線を Ehrenspeak の値と合致するように引き下げると、上の点線は Discrete Array + 0.39dB として示してある実線（理想的八木・宇田アンテナの最大利得と考えられるもの）とほとんど合致する。そこで、理想的八木・宇田アンテナの最大利得として考えた図4の実線は、現実の八木・宇田アンテナにおいても

利得の最大値を示していると考えられ、八木・宇田アンテナの設計、製作のときの利得の目安となる。

図4でアレイ長 1λ より短いところで理論値よりも実測値のほうが大きく出ているのは、現実の八木・宇田アンテナは電流振幅一定でなく、一定でない電流振幅のほうが super gain 効果があって、場合によっては利得が大きくなることで説明できる¹²⁾。

なお現在、高利得八木・宇田アンテナとして使用されているもののなかには、反射器を1素子でなく多素子とし、コーナー形に並べたものがあるが、これに関しては Cottony が実験しており、アイレ長が 4.2λ の場合には図4に示した実測値よりも $0.4\sim 0.5\text{dB}$ 利得の増加がみとめられたとのべている。アレイ長が長くなればなるほど、指向パターンは鋭くなり、後方放射も少なくなるから、コーナー形の反射器の効果も減少してくると思われる。アレイ長が短い間はコーナー反射器による利得の増加も大きい、それとても 1dB の増加は望めないと思われる。

このようなことから、たとえコーナー反射器を用いても、図4の実線 $+0.5\text{dB}$ 程度が、到達できる最高利得を示すと考えられる。

5. む す び

等間隔微小ダイポールアレイで、各素子上の電流振幅一定、漸進的位相変化を仮定し、アレイに沿う位相速度 β 、素子間隔 d 、アレイ全長 L によって指向性利得がどのように変化するかを綿密に計算し、その結果を図として示した。さらにここで得られた指向性利得に微小ダイポールと半波長ダイポールの利得差 0.39dB を加えたものと、従来発表されている八木・宇田アンテナの利得

とを比較し、ここで得た理論値は理想的八木・宇田アンテナの最大利得であるとともに、実際の八木・宇田アンテナで到達できる最大利得と考えられることを示した。

この結果、従来あまりはっきりしていなかった八木・宇田アンテナの利得に関し、設計、製作時の目安を与えたことになる。また、八木・宇田アンテナにおける、最適位相速度が実現できるならば、素子間隔を狭くして多数素子として用いるよりも、 0.25λ 程度まで広げて素子数を少なくしたほうが得策であるという結論も理論的に導かれた。

(昭和44年12月12日受付、昭和45年1月24日再受付)

【参 考 文 献】

- 1) W. W. Hansen, J. R. Woodyard: A New Principle in Directional Antenna Design, Proc. IRE, **26**, 3 (1938) 333-345
- 2) D. G. Reid: The Gain of an Idealized Yagi Array, J. IEE, **93**, Part IIIA, 3 (1946) 564-566
- 3) 手代木扶: 高利得エンドファイヤ・アレイの研究, 東北大学修士論文 (昭和41年3月)
- 4) C. T. Tai: The Nominal Directivity of Uniformly Spaced Arrays of Dipoles, Microwave Journal, **7**, 9 (1964) 51-55
- 5) 手代木扶, 永井 淳: 微小ダイポール・アレイの指向性利得, 東北大学電通談話会記録, **35**, 3 (昭和41.9) 250-253
- 6) R. M. Fishenden, E. R. Wublin: Design of Yagi Aerials, J. IEE, **96**, Part III, 1 (1949) 5-12
- 7) S. Uda, Y. Mushiak e: Yagi-Uda Antennas, Maruzen Co.(1953)
- 8) H. V. Cottony: High-Gain Antennas for VHF Scatter Propagation, IRE Trans., **CS-4**, 1 (1956) 56-63
- 9) H. W. Ehrenspeck, H. Poehler: A New Method for Obtaining Maximum Gain from Yagi Antennas, IRE Trans., **AP-7**, 4 (1959) 379-386
- 10) G. A. Thiele: Analysis of Yagi-Uda-Type Antennas, IEEE Trans., **AP-17**, 1 (1969) 24-31
- 11) 永井 淳: Modified Hansen-Woodyard Condition, Can. Jour. of Phys., **42**, 12 (1964) 2429-2442
- 12) 永井 淳: 短い Endfire Array の最大利得に関する一考察, 信学誌, **48**, 4 (1965) 705-711