等価雑音源による回路雑音理論と スミスチャートによるその応用

ソニー株式会社 松 平 健

増幅器の雑音指数は、一般に信号源インピーダンスに依存するため、信号源インピーダンスが大きく変化する場合には取扱いが簡単ではない。このような場合には、雑音指数をスミスチャート上に表わすと、直観的かつ正確な考察ができる。その原理と測定法、応用例などについて述べる。基本となる雑音理論は、等価雑音源法により展開するが、その際、特性雑音抵抗なる量を定義し導入すると、すっきりとした考察ができることを示す。

1. ま え が き

増幅器での SN 比劣化度、すなわち雑音指数は、一般に増幅器から信号源側を見たインピーダンスに依存する。通常はこの信号源インピーダンスを純抵抗として、雑音指数の考察が行なわれている。

しかし、たとえば、ロッドアンテナをもつテレビ受信機、FM 受信機などでは、アンテナの位置、長さによりインピーダンスが大きく変化するため、単純に純抵抗として扱うことはできない。また、テープレコーダーや VTR などにおけるヘッドインピーダンスは、インダクタンス性であり、純抵抗とはみなせない。さらに、これらのインピーダンスは大きな周波数依存性をもつ。

このように、信号源インピーダンスが純抵抗とみなせず、その値も大きく変化する場合には、簡単に信号源の抵抗のみを考えて雑音指数を考察するのでは不十分であり、正確な考察や設計はできない。この論文では、このような場合の雑音指数の正確かつ直観的な考察法として、スミスチャート上で雑音指数を考察する方法を示し、その例としてアンテナとテレビチューナーとのノイズマッチング（雑音指数に関する最適状態）について考察する。また、一般にスミスチャートは高周波でのみ使用されているが、ビデオ帯、低周波帯においてもスミスチャートを使うことにより、雑音指数に関する最適設計が容易にできることを示す。

まず、一般的な基礎理論を展開し、その応用例のひとつとして、アンテナとチューナーのノイズマッチングについて検討する。理論はインピーダンスで考察するが、アドミタンスの場合もまったく同様である。

2. 等価雑音源による増幅回路の雑音指数の表示

スミスチャート上で雑音指数を表示することは、すでに発表されているが¹⁾、ここでは等価雑音源法により、実際に使いやすい形にすることに留意しながら、一般的な理論を展開する。

2.1 増幅器の等価雑音源

線形増幅器または任意の線形 4 端子網の雑音特性は、図 1 のような等価雑音電圧 e_n 、等価雑音電流 i_n 、および e_n と i_n の相関係数 γ （複素量）の 4 つの量で表わすことができる²⁾。 e_n と i_n は瞬時ベクトルであり、これら自体は物理的な意味がなく、実際に測定可能な物理量と関係するのは、これらの 2 乗平均値である。等価雑音源としては図 1 の表示以外に、入力または出力に直列な等価雑音電圧、並列な等価雑音電流のうち任意の 2 つ

図 1 線形増幅器の等価雑音源
Equivalent noise sources of linear amplifier.

"Noise Theory of Two Ports and its Graphical Representation on the Smith Chart; with Some Practical Applications" by Takeshi Matsudaira (Sony Corporation, Tokyo)

の組合せが考えられるが、ここでは図1の表示法を採用する。

2.2 相関係数

e_n と i_n の間に一定の振幅および位相の関係があるときには、これらの相関を考えるために、相関係数 γ を次式で定義する³⁾。

$$\gamma = \frac{\overline{e_n^* i_n}}{\sqrt{\overline{e_n^2}} \sqrt{\overline{i_n^2}}} = \gamma_r + j\gamma_i \quad (1)$$

ただし、 e_n^* は e_n の共役量、 $\overline{e_n^* i_n}$ は $e_n^* i_n$ の平均値、 $\overline{e_n^2}$ 、 $\overline{i_n^2}$ はそれぞれ e_n と i_n の2乗平均値、 $\sqrt{\overline{e_n^2}}$ 、 $\sqrt{\overline{i_n^2}}$ はそれぞれ e_n と i_n の実効値、 γ_r は γ の実数部、 γ_i は γ の虚数部を表す。

2.3 特性雑音抵抗

ここで、 e_n 、 i_n 、 γ 以外の補助的な雑音量として、特性雑音抵抗という概念を導入する。特性雑音抵抗 R_0 を次のように定義する。

$$R_0 = \frac{\sqrt{\overline{e_n^2}}}{\sqrt{\overline{i_n^2}}} \quad (2)$$

この R_0 は後に明らかになるように、最適信号源インピーダンスの絶対値に等しく、この量を導入することにより理論的取扱いが便利になる。特に近似値を求める際には、実際的な非常に便利な量である。

2.4 雑音指数

信号源インピーダンスを、

$$Z_s = R_s + jX_s \quad (3)$$

とする。図1で端子 2-2' より右は雑音が発生しないから、雑音指数に関しては端子 2-2' の左側のみを考えればよい。2-2' を開放して考えると、雑音指数 F は定義³⁾により、

$$F = 1 + \frac{(\overline{e_n + Z_s i_n})^2}{4KTR_s \Delta f} \quad (4)$$

ただし、 $\overline{(e_n + Z_s i_n)^2}$ は $(e_n + Z_s i_n)$ の2乗平均値であり、 K はボルツマン定数 ($=1.38 \times 10^{-23}$ joule/°K)、 T はこの系の絶対温度 (°K)、 Δf は等価雑音帯域 (Hz) である。 $4KTR_s \Delta f$ は信号源抵抗の熱雑音電圧2乗平均値である。(1)式より、

$$\begin{aligned} \overline{e_n^* i_n} &= \gamma \sqrt{\overline{e_n^2}} \sqrt{\overline{i_n^2}} \\ &= (\gamma_r + j\gamma_i) \sqrt{\overline{e_n^2}} \sqrt{\overline{i_n^2}} \end{aligned} \quad (5)$$

(2)式より、

$$\overline{e_n^2} = R_0^2 \sqrt{\overline{e_n^2}} \sqrt{\overline{i_n^2}} \quad (6)$$

$$\overline{i_n^2} = \frac{\sqrt{\overline{e_n^2}} \sqrt{\overline{i_n^2}}}{R_0} \quad (7)$$

であるから、 $R_s \{ \overline{e_n^* i_n} \}$ を $\overline{e_n^* i_n}$ の実数部を表すものとして (付録1参照)、

$$\begin{aligned} \overline{(e_n + Z_s i_n)^2} &= \overline{e_n^2} + |Z_s|^2 \overline{i_n^2} + 2R_s \{ \overline{e_n^* i_n} Z_s \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\overline{e_n^2}} \sqrt{\overline{i_n^2}} \left\{ R_0 + \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_0} \right. \\ &\quad \left. + 2(R_s \gamma_r - X_s \gamma_i) \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \therefore F &= 1 + \frac{\sqrt{\overline{e_n^2}} \sqrt{\overline{i_n^2}}}{4KTR_s \Delta f} \\ &\quad \times \frac{\left(\frac{R_s}{R_0} + \gamma_r \right)^2 + \left(\frac{X_s}{R_0} - \gamma_i \right)^2 + 1 - |\gamma|^2}{\left(\frac{R_s}{R_0} \right)} \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、 $|\gamma|^2 = \gamma_r^2 + \gamma_i^2$ であり、 $|\gamma| \leq 1$ である³⁾。

ここで 1Hz 当たりの $\sqrt{\overline{e_n^2}}$ 、 $\sqrt{\overline{i_n^2}}$ を考えて、

$$E_n = \frac{\sqrt{\overline{e_n^2}}}{\sqrt{\Delta f}} \quad (10)$$

$$I_n = \frac{\sqrt{\overline{i_n^2}}}{\sqrt{\Delta f}} \quad (11)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} F &= 1 + \frac{E_n I_n}{4KT} \\ &\quad \times \frac{\left(\frac{R_s}{R_0} + \gamma_r \right)^2 + \left(\frac{X_s}{R_0} - \gamma_i \right)^2 + 1 - |\gamma|^2}{\left(\frac{R_s}{R_0} \right)} \end{aligned} \quad (12)$$

となる。この式が任意の信号源インピーダンスに対する雑音指数を与える式であり、信号源インピーダンスは特性雑音抵抗で正規化された形となっている。この式から、一般に雑音指数を求めるには、 E_n 、 I_n 、 γ_r 、 γ_i の4つの実数値が必要になることが明らかである。逆にこれら4つの量が既知なら、任意の信号源インピーダンスに対する雑音指数を知ることができる。

2.5 最適信号源インピーダンス

雑音指数を最小にする信号源インピーダンスを最適信号源インピーダンスと定義し、

$$Z_{s0} = R_{s0} + jX_{s0} \quad (13)$$

とすると、(12)式を R_s 、 X_s について偏微分することにより、

$$R_{s0} = \sqrt{1 - \gamma_i^2} R_0 \quad (14)$$

$$X_{s0} = \gamma_i R_0 \quad (15)$$

すなわち、

$$Z_{s0} = \{ \sqrt{1 - \gamma_i^2} + j\gamma_i \} R_0 \quad (16)$$

となる。また任意の信号源リアクタンス X_s を与えたときの R_s の最適値は、

$$R_{sx} = \sqrt{1 - \gamma_i^2 + \left(\frac{X_s}{R_0} - \gamma_i \right)^2} R_0 \quad (17)$$

となる。(16)式から、

$$|Z_{s0}| = R_0 \quad (18)$$

すなわち、先に定義した特性雑音抵抗は最適信号源イン

図2 特性雑音抵抗で正規化した信号源インピーダンス平面上における最適信号源インピーダンスの位置
Optimum source impedance on normalized source impedance chart with rectangular coordinates.
(Normalized by characteristic noise resistance.)

ピーダンスの絶対値に等しいことがわかる。 R_0 で正規化した信号源インピーダンス平面上での Z_{s0} の位置を図2に示す。

2.6 最小雑音指数

(12)式より、最小雑音指数 F_0 は $Z_s = Z_{s0}$ のときに、

$$F_0 = 1 + \frac{E_n I_n}{2KT} \{ \gamma_r + \sqrt{1 - \gamma_i^2} \}$$

$$= 1 + \frac{E_n I_n}{2KT} \left\{ \gamma_r + \frac{R_{s0}}{R_0} \right\} \quad (19)$$

また、任意の与えられた X_s に対する最小雑音指数は、

$$F_{0x} = 1 + \frac{E_n I_n}{2KT} \left\{ \gamma_r + \sqrt{1 - \gamma_i^2 + \left(\frac{X_s}{R_0} - \gamma_i \right)^2} \right\}$$

$$= 1 + \frac{E_n I_n}{2KT} \left\{ \gamma_r + \frac{R_{sx}}{R_0} \right\} \quad (20)$$

となる。(20)式は一定の X_s のもとでの最小雑音指数である。

2.7 信号源が純抵抗のときの雑音指数

以上のように、雑音指数は一般に信号源インピーダンスの抵抗分だけでなく虚数分にも依存するが、信号源インピーダンスが純抵抗のときには、(12)式と(19)式は、

$$F = 1 + \frac{E_n I_n}{4KT} \left\{ \frac{R_s + R_0}{R_0} + 2\gamma_r \right\} \quad (21)$$

$$F_0 = 1 + \frac{E_n I_n}{2KT} (1 + \gamma_r) \quad (22)$$

のように簡単となる。また、このときには、

$$|Z_{s0}| = R_{s0} = R_0 \quad (23)$$

であり、特性雑音抵抗は最適信号源抵抗そのものを表わす。必要な雑音量は E_n, I_n, γ_r の3つのみとなり、 γ_i は雑音指数に関係しない。

2.8 雑音指数近似値の求め方

4つの雑音量のうち、 E_n は入力ショート時の入力換算雑音電圧として、 I_n は入力オープン時の入力換算雑音電流として、それぞれ直接測定することができる。相関係数も、適当な信号源インピーダンスを与えて入力換算雑音を測定することにより求めることができるが、測定精度が良いことが必要で、簡単ではない。しかし、一般の増幅素子の雑音理論から、相関係数の理論値は容易に求められる。したがって、雑音指数の近似値が必要なときには、相関係数は理論値を使用することにすれば、 E_n と I_n のみを測定することにより、任意の Z_s に対する雑音指数を知ることができる。たとえば、信号源が純抵抗の場合の FET (電界効果トランジスタ) では、100 MHz 程度以下の周波数では γ_r は1にくらべて無視でき⁶⁾、

$$\frac{R_s + R_0}{R_0} \geq 2 \quad (24)$$

であるので、(21)、(22)式から、

$$F \approx 1 + \frac{E_n I_n}{4KT} \left\{ \frac{R_s + R_0}{R_0} \right\} \quad (25)$$

$$F_0 \approx 1 + \frac{E_n I_n}{2KT} \quad (26)$$

となり、 E_n と I_n のみを測定することにより、任意の R_s に対する雑音指数をかなりの正確さで求めることができる⁴⁾。特に接合 FET では、最小雑音指数は 100 MHz 以下ではほとんど 0 dB であるので、通常の雑音指数測定法では精度が不充分であり、測定不可能であるが、この方法によれば、 E_n と I_n のみを測定することにより、かなり正確な値が求められる (特に低周波において)。また、最適信号源抵抗の値も、通常の雑音指数を直接測定する方法では、はっきりと定めにくい、この方法によれば、特性雑音抵抗、すなわち E_n と I_n の比として簡単に求められる (相関係数の求め方の一例を付録2に示す)。

3. 信号源インピーダンス平面上での雑音指数の表示

雑音指数の信号源インピーダンス依存性を直観的に表わすため、まず、直交信号源インピーダンス平面上で雑音指数を表示する。

$$h = \frac{F-1}{F_0-1}, \quad (F_0 > 1) \quad (27)$$

$$h = 1 \quad (F_0 = 1)$$

$$\gamma_h = h(\gamma_r + \sqrt{1 - \gamma_i^2}) - \gamma_r \quad (28)$$

とおくと、(12)、(19)式から次式が得られる。

$$\left(\frac{R_s - R_0}{R_0} - \gamma_h \right)^2 + \left(\frac{X_s}{R_0} - \gamma_i \right)^2 = \gamma_h^2 + \gamma_i^2 - 1 \quad (29)$$

雑音指数 F を一定とすると、上式は特性雑音抵抗 R_0 で正規化された信号源インピーダンス平面上で、中心 (γ_h, γ_i) 、半径 $(\gamma_h^2 + \gamma_i^2 - 1)^{1/2}$ の円を表わしている。また、正規化しない実際の信号源インピーダンス平面上での式は、

$$(R_s - \gamma_h R_0)^2 + (X_s - \gamma_i R_0)^2 = R_0^2 (\gamma_h^2 + \gamma_i^2 - 1) \quad (30)$$

となる。さらに、一般に任意の正規化インピーダンス (純抵抗とする) R_c で正規化された信号源インピーダンス平面上では、次式で示される円となる。

$$\left(\frac{R_s}{R_c} - \frac{R_0}{R_c} \gamma_h \right)^2 + \left(\frac{X_s}{R_c} - \frac{R_0}{R_c} \gamma_i \right)^2 = \left(\frac{R_0}{R_c} \right)^2 (\gamma_h^2 + \gamma_i^2 - 1) \quad (31)$$

すなわち、 R_c で正規化された信号源インピーダンスを、

$$z_s = r_s + jx_s = \frac{R_s}{R_c} + j \frac{X_s}{R_c} \quad (32)$$

としたとき、 z_s -平面上では、

$$(r_s - r_0)^2 + (x_s - x_0)^2 = r_0^2 + x_0^2 - \left(\frac{R_0}{R_c} \right)^2 \quad (33)$$

なる円で表わされる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= \frac{R_0}{R_c} \gamma_h \\ x_0 &= \frac{R_0}{R_c} \gamma_i \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

である。

z_s -平面上で最小雑音指数を与える z_s を、

$$z_{s0} = r_{s0} + jx_{s0} \quad (35)$$

とすると、このとき $h=1$ となるから $\gamma_h = \sqrt{1 - \gamma_i^2}$ 、したがって (33) 式は、

$$(r_{s0} - r_0)^2 + (x_{s0} - x_0)^2 = 0 \quad (36)$$

となり、

$$\left. \begin{aligned} r_{s0} &= \frac{R_0}{R_c} \sqrt{1 - \gamma_i^2} \\ x_{s0} &= \frac{R_0}{R_c} \gamma_i \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

が得られる。これが任意の R_c で正規化された信号源インピーダンス平面上での最適信号源インピーダンスの位置を与える。 z_s -平面上では、 F_0 を与える点 z_{s0} は原点を中心とした半径 (R_0/R_c) の円上にある。これを図 3 に示す。雑音指数 F 一定の円の中心は (r_0, x_0) であるが、 F が大きくなると x_0 は一定で r_0 が増大する。円の半径 $\left\{ r_0^2 + x_0^2 - \left(\frac{R_0}{R_c} \right)^2 \right\}^{1/2}$ も F が大きくなると増大する。したがって、 F が大きくなるにつれ、雑音指数一

図 3 任意の抵抗で正規化した信号源インピーダンス平面上における最適信号源インピーダンスの位置
Optimum source impedance on normalized source impedance chart with rectangular coordinates.
(Normalized by arbitrary resistance.)

図 4 任意のインピーダンス R_c で正規化された信号源インピーダンス平面上での雑音指数一定点の軌跡
Noise figure chart on normalized source impedance plane. (Normalized by arbitrary resistance R_c)

定の円は半径を増大させながら中心が $x = x_0$ の線分上に右に平行移動してゆく。この様子を図 4 に示す。

信号源が純抵抗のときの雑音指数を考えることは、図 4 で実軸上の雑音指数を考察しているにすぎず、一般には虚数分も含めて考えなければならないことが直観的に明らかである。また、抵抗分一定で虚数分のみを変化させると、信号源インピーダンスは虚軸に平行な線分上で移動することになり、抵抗分が変わらなくても雑音指数が変化することが理解される。さらに、信号源インピーダンス虚数部の最適値は抵抗分に依存しないが、実数部はそのとき与えられた虚数部の値に対して、それぞれ最適値をもつことが明らかである。

このように、信号源インピーダンス平面上で図示する

ことにより、雑音指数の変化が明確となる。

4. スミスチャート上での雑音指数の表示

直交座標では、信号源インピーダンスが大きく変化する際に不便なので、スミスチャート上で雑音指数を表示することを考える。直交信号源インピーダンス平面上からスミスインピーダンス平面上への変換は、正規化インピーダンス z_s の双一次変換を行なえばよい。すなわち、

$$w_s = \frac{z_s - 1}{z_s + 1} = u_s + jv_s \quad (38)$$

を考えればよい(図5)。この変換を行なった結果、 w_s -平面上での雑音指数が一定になる信号源インピーダンスの軌跡はやはり円となり、

$$(u_s - u_0)^2 + (v_s - v_0)^2 = a^2 \quad (39)$$

で表わされる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \frac{\left(\frac{R_0}{R_c}\right)^2 - 1}{2r_0 + 1 + \left(\frac{R_0}{R_c}\right)^2} \\ v_0 &= \frac{2x_0}{2r_0 + 1 + \left(\frac{R_0}{R_c}\right)^2} \\ a &= \frac{2\sqrt{r_0^2 + x_0^2 - \left(\frac{R_0}{R_c}\right)^2}}{2r_0 + 1 + \left(\frac{R_0}{R_c}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

また、(34)、(37) 式より、

$$x_0 = x_{s0} = \frac{R_0}{R_c} \gamma_i = \text{const.} \quad (41)$$

であるから、

$$\frac{v_0}{u_0} = \frac{2x_0}{\left(\frac{R_0}{R_c}\right)^2 - 1} = \text{const.} \quad (42)$$

図5 $w_s = \frac{z_s - 1}{z_s + 1}$ による写像

(斜線部は互に対応する)

Conformal mapping by $w_s = \frac{z_s - 1}{z_s + 1}$.
(Shaded sections correspond to each other.)

図6 スミスチャート上での雑音指数一定の円の中心の動き

Trace of the center of the circle with constant noise figure in the Smith impedance plane.

である。円の中心 (u_0, v_0) は F が大きくなると小さくなり、 w_s -平面上の原点に近づく。したがって w_s -平面上で雑音指数一定の円の中心は、原点 $(u_s=0, v_s=0)$ と F_0 の点 $(u_s=u_{s0}, v_s=v_{s0})$ とを結ぶ線分上にあり、雑音指数が大きくなるにつれて原点のほうに移動する(図6)。

また F_0 の点 $w_{s0} = u_{s0} + jv_{s0}$ は、(40) 式で $r_0 = r_{s0}$, $x_0 = x_{s0}$ において、

$$\left. \begin{aligned} u_{s0} &= \frac{\left(\frac{R_0}{R_c}\right)^2 - 1}{2r_{s0} + 1 + \left(\frac{R_0}{R_c}\right)^2} \\ v_{s0} &= \frac{2x_{s0}}{2r_{s0} + 1 + \left(\frac{R_0}{R_c}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

となる。なお、 w_s -平面の原点 $(u_s=0, v_s=0)$ から、 F_0 の点までの距離 ρ は、

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{u_{s0}^2 + v_{s0}^2} \\ &= \sqrt{\frac{(r_{s0}-1)^2 + x_{s0}^2}{(r_{s0}+1)^2 + x_{s0}^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\left(\frac{R_0}{R_c}\right)^2 + 1 - 2r_{s0}}{\left(\frac{R_0}{R_c}\right)^2 + 1 + 2r_{s0}}} \end{aligned} \quad (44)$$

であり、信号源インピーダンスが R_c のときに z_{s0} なるインピーダンスの負荷を接続したときの反射係数絶対値に等しい。

図7に、 x_{s0} が正の場合について、 $(R_0/R_c) \geq 1$ の各場合における z_s -平面上と w_s -平面上での F_0 の位置を対応させて示す。

以上で、任意の正規化インピーダンス R_c で正規化されたスミスチャート上に雑音指数の軌跡を描けることが明らかとなった(図8)。

(a) $\frac{R_0}{R_c} > 1$: F_0 はスミスチャートの右半面にある
 F_0 in the right half part of the Smith chart.

(c) $\frac{R_0}{R_c} < 1$: F_0 はスミスチャート上の左半面にある
 F_0 in the left half part of the Smith chart.

(b) $\frac{R_0}{R_c} = 1$: F_0 はスミスチャートの v_s 軸上にある
 F_0 on the v_s -axis in the Smith chart.

図 7 z_s 平面と w_s 平面での雑音指数最小点の位置
 Corresponding positions of the various minimum noise figures in the z_s -plane and w_s -plane.

図 8 スミスチャート上の雑音指数一定点の軌跡
 Representation of the noise figure in the Smith chart.

5. スミスチャートを使用した雑音指数測定法

増幅器雑音の理論が明らかな場合には、先に示した4つの雑音量の理論値を求めて、雑音指数チャートを理論的に描くことができる。次に、理論値が知られていない場合、また理論計算が複雑な場合に、実際に雑音指数を測定することにより NF (雑音指数) チャートを作成する方法を示す。測定の系統図を図9に示す。インピーダ

図9 雑音指数測定の系統図
Block diagram for measuring the noise figure.

ンス変成器は無損失とする。雑音発生器として雑音指数直読のものを使用すれば、雑音発生器上の雑音指数の読みが、そのまま被測定増幅器の信号源インピーダンスにおける雑音指数となる。このときの信号源インピーダンスは、インピーダンス変成器の出力インピーダンスに等しい。これを $Z_s = R_s + jX_s$ とすると、測定手順は、

(1) 適当な R_s を選び、その値を固定し X_s を変化させ NF を測定し、スミスチャート上に記入する。このとき R_s 一定の円上で NF を最小とする X_s が、最適信号リアクタンス X_{s0} である。

(2) X_s を最適値 X_{s0} に固定し、 R_s を変化させ、NF を測定しスミスチャート上に記入する。このとき、 X_{s0} 曲線上で NF を最小とする R_s が最適信号源抵抗 R_{s0} である。このようにして最適信号源インピーダンス $Z_{s0} = R_{s0} + jX_{s0}$ が求められる。

(3) 最小雑音指数の点 ($Z_s = Z_{s0}$) と、スミスチャートの中心点を結ぶ線分をひく。NF が等しい2点を通り、中心がこの線分上にある円を描けば、この円上の信号源インピーダンスに対する NF の値は一定である。このような円群をいくつか描けば、NF チャートができあがる。

(4) 上の(3)の場合、円が描きにくいときには、さらに適当なインピーダンスの点をいくつか選び、NF を測定すればよい。また(1)と(2)の手順は逆にはできない。このことは、 X_{s0} は R_s によらないが、 R_{s0} は X_s によるためである。正確な NF チャートを得るためには、NF 最小の点付近をくわしく測定し、NF 最小点の位置を正しく求めなければならない。

6. 応 用 例

6.1 アンテナとチューナーのノイズマッチング⁵⁾

図10にテレビチューナーのNFチャートの実測例を示す(上述の手順により測定)。さらに図11にロッドア

図10 チューナーのNFチャートの例 (193.25 MHz)
A noise figure chart of a television tuner.
(frequency: 193.25 MHz, 20 mΩ characteristic admittance)

図11 モノポールアンテナインピーダンスの長さによる変化
Impedance variation of a monopole antenna. (frequency: 190 MHz, 20 mΩ characteristic admittance, cable length: 25 cm)

ンテナの長さを変えたときのインピーダンス変化を示す。図中の小ループは、アンテナの傾斜と向きを変えたときのインピーダンス変化範囲である。アンテナとチューナーを直結した場合には、このアンテナインピーダンス軌跡上にNF最小点があれば、アンテナの長さを変えることにより、最小雑音指数を得ることができる。しかし、NF 最小点がアンテナインピーダンス軌跡上になければ、どのようにアンテナを動かしても雑音指数を最小とすることは不可能である。このような場合には、無損失の適当なインピーダンス変換器をアンテナとチューナー間に挿入することが必要であるが、図10および図11から必要なインピーダンス変換器の特性を知ることが容易である。また、アンテナとチューナー間にケー

ブルを挿入すると、チューナーからアンテナを見たインピーダンス軌跡は、図 11 の軌跡をケーブル長に応じてある角度回転したものとなるので、ケーブル長を適当にとれば、雑音指数が改善される場合がある。

ロッドアンテナ付きのテレビ受信機で、ロッドアンテナの向きを変化させた場合の SN 比の変化は、主にアンテナの指向性によるが、アンテナ長を変化させたときの SN 比の変化は、アンテナの利得の変化とチューナーの雑音指数の変化との両方によることが以上から明らかとなる。

この例は、単一周波数でのアンテナとチューナーとのノイズマッチングの例であるが、実際には、さらに周波

数特性とアンテナ自体の SN 比を考えなければならない。その場合にも、スミスチャート上にこれらの軌跡を描くことにより、直観的かつ正確な考察が可能である。

6.2 低周波での応用例

一般に、スミスチャートは高周波でのみ使用されるが、低周波、ビデオ周波数帯でも、まったく同様にスミスチャート上に雑音指数を表示できる。低周波帯では、ふつうは特性インピーダンスの概念を使用しないが、その場合には信号源インピーダンスを特性雑音抵抗で正規化するのが便利である（もちろん任意の特性インピーダンスで正規化することも可能である）。特性雑音抵抗で正規化すると、図 7 (b) に示すように、NF 一定の円の中心と NF 最小点は、 w_s -平面上で必ず v_s 軸上にくるので、NF チャートの作成は楽である。

実際の例を図 12 と図 13 に示す。これは磁気再生ヘッドとトランジスタとのノイズマッチングを考察するためのものである。このように表わしてみると、最適状態にするためには、ヘッドとトランジスタを直結したのでは駄目で、何らかのインピーダンス変換が必要ながただちにわかる。また、広帯域にわたって最適条件を満足させることが簡単ではないことも明らかとなる。

このように、特に信号源インピーダンスが大きく変化するときには、低周波でも、スミスチャートにより雑音指数を考察することは大きな利点がある。

7. む す び

以上、等価雑音源法による増幅器の雑音理論と、スミスチャート上での雑音指数の変化の原理、スミスチャートを利用した雑音指数の測定法について述べ、その応用例を示した。雑音理論としては、実用的な量である特性雑音抵抗の概念を導入して理論を展開した。また、一般に高周波でのみ使用されているスミスチャートを、低周波でも使用できることを示した。一般に、いかなる周波数でも、特に信号源インピーダンスが大きく変化する場合には、スミスチャート上で雑音指数を考察すると、直観的かつ正確な考察ができ、設計が容易となる。

終りに、ご指導とご協力をいただいたソニー(株)安田順一郎長と田玉希課長補佐に感謝の意を表する。

(昭和 44 年 8 月 25 日受付)

〔参 考 文 献〕

- 1) H. Fukui: Available Power Gain, Noise Figure, and Noise Measure of Two Ports and Their Graphical Representations, IEEE Trans., CT-13, 2, June (1966) 137-142
- 2) H. Rothe and W. Dahlke: Theory of Noisy Fourpoles, Proc. IRE, 44, 6 (1956) 811-818
- 3) たとえば, Van der Ziel: 雑音 (訳書, 近代科学社)
- 4) 松平 健: 等価雑音源法による J-FET 雑音の測定法, 電気学会トランジスタ専門委員会資料, 42-20 (1967)

図 12 低周波におけるトランジスタの NF チャートの例
A noise figure chart of a transistor at a low frequency. (frequency: 1 kHz, normalized by characteristic noise resistance of 1.5 k Ω , sample: 2SC 631, $V_{CE}=6$ V, $I_C=500$ μ A)

図 13 スミスチャート上でのトランジスタとヘッドのノイズマッチングの考察例
An application of the noise figure chart to the noise matching problem at a low frequency: an audio magnetic reproduce head and a transistor amplifier. (1 k Ω characteristic impedance, sample: 2SC 631, $V_{CE}=6$ V, $I_C=500$ μ A)

- 5) 田玉希, 松平健: TV チューナとアンテナとのノイズマッチング, テレビ全大予, 10-3 (1968)
 6) A. Van der Ziel: Gate Noise in Field Effect Transistors at Moderately High Frequencies, Proc. IEEE, 51, 3 (1963) 461-467

〈付 録〉

〔1〕 (7) 式から (8) 式への展開

$$\begin{aligned} \overline{(e_n + Z_S i_n)^2} &= \overline{(e_n + Z_S i_n) (e_n + Z_S i_n)^*} \\ &= \overline{(e_n + Z_S i_n) (e_n^* + Z_S^* i_n^*)} \\ &= \overline{e_n e_n^* + Z_S Z_S^* i_n i_n^*} \\ &\quad + \overline{e_n^* Z_S i_n + e_n Z_S^* i_n^*} \\ &= \bar{e}_n^2 + |Z_S|^2 \bar{i}_n^2 \\ &\quad + 2R_e \{e_n^* i_n Z_S\} \end{aligned}$$

したがって(5), (6), (7)式から,

$$\begin{aligned} \overline{(e_n + Z_S i_n)^2} &= \sqrt{\bar{e}_n^2} \sqrt{\bar{i}_n^2} \left\{ R_0 + \frac{R_S^2 + X_S^2}{R_0} \right. \\ &\quad \left. + 2(R_S \gamma_r - X_S \gamma_i) \right\} \quad (\text{付} \cdot 1) \end{aligned}$$

〔2〕 相関係数の求め方の一例

相関係数の求め方には, いくつかの方法が考えられるが, その一例を示す. いずれにしろ相関係数を正確に求めるためには, 精密な校正をする必要があり, 容易ではない.

増幅器の入力側に換算した全等価雑音電圧を E_{na} (1 Hz 当たりで表わす) とすると, (12)式より,

$$\begin{aligned} E_{na}^2 &= 4KTR_S (F-1) \\ &= E_n^2 \left\{ \left(\frac{R_S}{R_0} + \gamma_r \right)^2 + \left(\frac{X_S}{R_0} - \gamma_i \right)^2 + 1 - |\gamma|^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{付} \cdot 2)$$

(付・2) 式で $R_S=0$ とすると,

$$\left(\frac{E_{na}}{E_n} \right)^2 = \left(\frac{X_S}{R_0} - \gamma_i \right)^2 + 1 - \gamma_i^2 \quad (\text{付} \cdot 3)$$

$$\therefore \gamma_i = \frac{\left(\frac{X_S}{R_0} \right)^2 + 1 - \left(\frac{E_{na}}{E_n} \right)^2}{2 \left(\frac{X_S}{R_0} \right)} \quad (\text{付} \cdot 4)$$

したがって, 信号源インピーダンスを純リアクタンスとし, そのときの全等価雑音電圧 E_{na} を測定すれば, (付・4) 式より γ_i が求められる. また (付・3) 式から明らかなように, (X_S/R_0) に対する $(E_{na}/E_n)^2$ の変化を求めると放物線となるから, $(E_{na}/E_n)^2$ の最小値が $(1-\gamma_i^2)$ であり, 最小値を与える (X_S/R_0) が γ_i となることを利用してもよい.

(付・2) 式で $X_S=0$ とすると,

$$\left(\frac{E_{na}}{E_n} \right)^2 = \left(\frac{R_S}{R_0} + \gamma_r \right)^2 + 1 - \gamma_r^2 \quad (\text{付} \cdot 5)$$

となるから, γ_r についても同様に求められる. この場合には E_{na} を求めるときに R_S の熱雑音電圧を分離する必要がある (入力換算雑音電圧は E_{na} 単独では求められず, $\sqrt{E_{na}^2 + 4KTR_S}$ として求めなければならないから).