(第3回)

画 像 の 性 質 (II)

東京大学工学部 羽 鳥 光 俊

1. ま え が き

画像の処理あるいは伝送を理論的に取扱う場合、画像ないしは画像の性質を定量的に記述することから出発する必要がある。そこで本稿では、まず、画像あるいはこれを走査して得られる画像信号を式として表現することから始め、空間周波数、空間周波数スペクトル、標本化、画素、帯域幅等の基礎的概念につき述べ、続いて、画像の統計的性質を記述する方法として、電力スペクトル密度、自己相関々数、ウィーナ・キンチンの定理等の確率論的通信理論の基礎的事項につき述べる。最後に画像の帯域圧縮符号化に関係する情報理論の基礎的概念である Rate-distortion の理論につき述べる。

2. 画 像 の 表 現

画像を最も一般的に表現しようとする、第2回にあるように、3次元空間中の位置を指定する3つの変数 x, y, z で定まる各点の電磁界ベクトルの瞬時値を時刻 t を変数として表わす方法、すなわち、

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} v_x(x, y, z, t) \\ v_y(x, y, z, t) \\ v_z(x, y, z, t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

という形の、実4変数の3次元ベクトル関数として表わすことができる。

ホログラフィーのように光のコヒーレンシを取扱うときには上式のような表わし方によらざるを得ないが、ノンコヒーレントな画像を取扱うときには、光の強度としてとらえ、

$$g(x, y, z, \lambda, t) \quad (2)$$

という形の、実5変数の関数として表わすほうが便利なが多い。ただし λ は色一光のスペクトルの波長を

指定する変数である*。

3次元空間を2次元平面に写像して、平面画像として取扱う場合には、変数 z を省略して、 $g(x, y, \lambda, t)$ という形の関数として表わし得る。

光のスペクトルを忠実に再現しなくとも、視覚的に同じ色と感ずればよいとする場合には、連続変数 λ を赤、緑、青3つの離散変数で代用し得るという3原色の原理により、 $g_R(x, y, z, t)$, $g_G(x, y, z, t)$, $g_B(x, y, z, t)$ という3つの関数により表わし得る。

白黒画像に対しては g_R, g_G, g_B の和として与えられる輝度だけを扱えばよいから、 $g(x, y, z, t)$ と表わせばよい。

静止画像に対しては時刻 t を省略して $g(x, y, z, \lambda)$ と表わせばよい。

立体視を取扱う場合には $g_{01}(x, y, \lambda, t)$, $g_{02}(x, y, \lambda, t)$, ... のように、2個ないし多数個の異なる角度から見た関数により表わし得る。

これらを組合わせることにより、たとえば白黒テレビ画像ならば、

$$g_M(x, y, t) \quad (3)$$

カラーテレビ画像ならば、

$$g_R(x, y, t), g_G(x, y, t), g_B(x, y, t) \quad (4)$$

白黒写真画像ならば、

$$g_s(x, y) \quad (5)$$

等という形の関数を取扱えばよい。

3. 走査して得られる画像信号の表現

画像を電氣的に記録あるいは伝送するためには、

$$f(t) \quad (6)$$

という形の、時刻 t の関数でなければならない。このような電氣的に伝送可能な形をした1変数の関数を、本稿では画像信号と呼び、(2)~(5)式のような多変数の関

"Image and Its Processing; 3. Characteristics of Images (II)"
by Mitsutoshi Hatori (Faculty of Engineering, University of Tokyo, Tokyo)

* 厳密には光の短時間スペクトルの波長というべきであろうか。

数として与えられる画像と区別して呼ぶこととしたい。

画像から画像信号を得るために、すなわち多変数から1変数への変換を行うために、走査を行うわけであるが、あまりにも日常的であり何気なく実際に行っている走査という操作を、この機会に見なおしてみたい。

3.1 静止画像の走査

(5)式で与えられる白黒写真画像の走査について考えよう。そのためには x, y 2変数の一方、 y の値を固定し x 軸方向(横方向)に走査し、続いて y 軸方向(縦方向)に Δy ずつずらせながら走査するが、ここで重要なことは、 x 軸方向に対しては連続であるが、 y 軸方向には離散的な操作である点である。すなわち y 軸方向には標準化を行っているわけである。0~ W (Hz)のフーリエスペクトル成分を持つ1変数の関数の標準化に当たり、 $1/2W$ (sec)以下の標準化周期で標準化を行うと、折返しひずみを生じるが、2変数の関数すなわち静止画像の走査に当たっても、同様ながいえる。 y 軸方向に対し0~ W_y (c/m)の空間周波数スペクトル成分(第2回参照)を持つ静止画像を折返しひずみを生じないように走査するためには、走査線間隔 Δy は $1/2W_y$ (m)以下に選ぶ必要がある。このことは、あるいは、 Δy (m)の走査線間隔で、 $1/2\Delta y$ (c/m)以上の y 軸方向の空間周波数スペクトル成分を持つ画像を走査すると、折返しひずみを生じる、といってもよい。

3.2 y 軸方向の折返しひずみ

y 軸方向の空間周波数スペクトルと走査線間隔が上記の関係を満たさないと、どういう現象が生じるか考えよう。

電子ビームあるいは光ビームが太さを持つこと、すなわちアパーチャー効果により、 x 軸方向、 y 軸方向の空間周波数スペクトルに対する高域遮断が行われるから、高域成分を持つ画像をそのまま走査しても、実際問題として、 y 軸方向の折返しひずみはほとんど生じない。どちらかという通常はこの遮断周波数を高くするための努力、すなわちアパーチャーひずみを減らすためにビームの太さを細くする努力がなされるのであるが、あまり細くしすぎると、テストパターンの水平に近い線にモアレと呼ぶ画質劣化、水平に近い輪郭部分が階段状になるという画質劣化が生じる。これは y 軸方向の折返しひずみである。

3.3 高域遮断された画像の表現と画素の概念

実際の走査という操作は、上述のように、空間周波数スペクトルに対する高域遮断と純粋な意味での走査とを同時に行うこととなるが、両者を分けて、高域遮断を行った画像を走査すると考えると都合が良い。

(5)式で与えられた静止画像 $g_s(x, y)$ の空間周波数

スペクトルを $G_s(f_x, f_y)$ 、空間周波数の高域遮断特性を $H(f_x, f_y)$ と表わせば、高域遮断を行った画像は、

$$\tilde{g}_s(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(f_x, f_y) G_s(f_x, f_y) \times \exp\{j2\pi(f_x x + f_y y)\} df_x df_y \quad (7)$$

ただし、

$$G_s(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_s(x, y) \times \exp\{-j2\pi(f_x x + f_y y)\} dx dy \quad (8)$$

と表わされる。ただし f_x, f_y は x, y 軸方向の空間周波数である。

$\tilde{g}_s(x, y)$ が x, y 軸方向に対し W_x, W_y 以上の空間周波数スペクトルを持たないならば、

$$\tilde{g}_s(x, y) = \sum_i \sum_j \tilde{g}_s\left(\frac{i}{2W_x}, \frac{j}{2W_y}\right) \times \frac{\sin \pi(2W_x x - i)}{\pi(2W_x x - i)} \frac{\sin \pi(2W_y y - j)}{\pi(2W_y y - j)} \quad (9)$$

と表わすことができる。(9)式は、高域遮断を行った画像 $\tilde{g}_s(x, y)$ は標本値 $\tilde{g}_s(i/2W_x, j/2W_y)$ より完全に再生し得ることを意味する。離散変数 (i, j) により指定される (x, y) 空間中の格子点を画素という。

3.4 画像信号の表現と帯域幅の概念

走査は、これらの画素を時間軸上に配列しなおす操作と考え得る。 $\tilde{g}_s(x, y)$ を走査して得られる画像信号 $f_s(t)$ は、 x, y 軸方向の画素数を N_x, N_y として、

$$f_s(t) = \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \tilde{g}_s\left(\frac{i}{2W_x}, \frac{j}{2W_y}\right) \times \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t - (i + jN_x)T)}{\frac{\pi}{T}(t - (i + jN_x)T)} \quad (10)$$

と表わすことができる。ただし T は t 軸上に配列しなおした画素の時間間隔であり、1枚の静止画像を走査するに要する時間 T_P とのあいだには $T_P = N_x N_y T$ の関係がある。

(10)式で与えられる画像信号の帯域幅は、

$$W = \frac{1}{2T} = \frac{N_x N_y}{2T_P} \text{ (Hz)} \quad (11)$$

である。

3.5 動画像の走査と t 軸方向の折返しひずみ

以上、静止画像の走査について述べたが、以下、(3)式で与えられる白黒テレビ画像、すなわち動画像 $g_M(x, y, t)$ の走査について考えよう。

動画像の走査は、 y 軸方向のみならず t 軸方向に対

しても離散的な操作である。\$t\$ 軸方向* に対して \$0 \sim W_t\$ (Hz) のスペクトル成分を持つ動画像を折返しひずみを生じないように走査するためには、フレーム周期 \$T_F\$ を \$1/2W_t\$ 以下に選ぶ必要がある。

撮像管の光電変換面が時間的積分作用を持つことより、\$t\$ 軸方向のスペクトルに対する高域遮断が行われる。ビジコン等の撮像管を用いて走査する場合は、通常はこの積分時間を短くするための努力がなされるのであって、\$t\$ 軸方向の折返しひずみが問題になることはほとんどないが、映画の撮影機やフライングスポットスキャナーには時間的積分作用がほとんどないから、“駅馬車の車輪が止まったまま走る” といった \$t\$ 軸方向の折返しひずみが生じることがある。

3.6 高域遮断された動画像の表現

\$x, y, t\$ 軸方向に対し \$W_x, W_y, W_t\$ 以上の空間周波数スペクトルを持たないよう高域遮断した動画像 \$\tilde{g}_M(x, y, t)\$ は、

$$\begin{aligned} \tilde{g}_M(x, y, t) = & \sum_i \sum_j \sum_k \tilde{g}_M\left(\frac{i}{2W_x}, \frac{j}{2W_y}, \frac{k}{2W_t}\right) \\ & \times \frac{\sin \pi(2W_x x - i)}{\pi(2W_x x - i)} \frac{\sin \pi(2W_y y - j)}{\pi(2W_y y - j)} \\ & \times \frac{\sin \pi(2W_t t - k)}{\pi(2W_t t - k)} \end{aligned} \quad (12)$$

と表わされる。

3.7 テレビ信号の表現

代表的な動画像としてテレビ画像の走査について考えよう。テレビ画像の走査においては、耐フリッカー性を増すために飛越し走査が行われる。\$\tilde{g}_M(x, y, t)\$ を飛越し走査して得られるテレビ信号 \$f_M(t)\$ は、水平走査周期に伝送し得る画素数を \$N_x\$、走査線数を \$N_y\$ とし、\$j = 2n+1\$ なる変数変換を行うと、

$$\begin{aligned} f_M(t) = & \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{(N_y-1)/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_M\left(\frac{i}{2W_x}, \frac{2n}{2W_y}, \frac{k}{2W_t}\right) \\ & \times \frac{\sin \frac{\pi}{T} [t - (i + nN_x + kN_x N_y)T]}{\frac{\pi}{T} [t - (i + nN_x + kN_x N_y)T]} \\ & + \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{(N_y-1)/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_M\left(\frac{i}{2W_x}, \frac{2n+1}{2W_y}, \frac{k}{2W_t}\right) \\ & \times \frac{\sin \frac{\pi}{T} \left[t - \left(i + nN_x + kN_x N_y + N_x \frac{N_y+1}{2} \right) T \right]}{\frac{\pi}{T} \left[t - \left(i + nN_x + kN_x N_y + N_x \frac{N_y+1}{2} \right) T \right]} \end{aligned} \quad (13)$$

と表わされる。ただし \$T\$ は走査後の \$t\$ 軸上の標本点の時間々隔であり、走査前の \$t\$ 軸方向の画素間隔 \$1/2W_t\$、

* \$(x, y, t)\$ 画像空間中の \$t\$ 軸方向という意味である。走査して得られる画像信号、(13)式のスペクトルと混同しないように。

とのあいだには \$N_x N_y T = 1/2W_t\$ の関係が成り立つ必要がある。(13)式の第1項は偶数フィールド、第2項は奇数フィールドに対応する。

(13)式で与えられるテレビ信号の帯域幅は、

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2T} = N_x N_y W_t \\ &= \frac{1}{2} K N_y^2 f_p \frac{b}{h} \frac{Y}{X} (= 4.3 \text{ MHz}) \end{aligned} \quad (14)$$

である*。ただし \$K(=0.7)\$ はケル係数、\$N_y(=525)\$ は走査線数、\$f_p(=30)\$ はフレーム周波数、\$h, b(=(4/3)h)\$ は画面高と画面幅、\$X(=0.84), Y(=0.95)\$ は水平走査有効率と垂直走査有効率である。ただしカッコ内の数値は標準放送方式の値である。

3.8 ケル係数

ケル係数は \$y\$ 軸方向の画素間隔 \$\Delta y = 1/2W_y\$ と \$x\$ 軸方向の画素間隔 \$\Delta x = 1/2W_x\$ の比である。静止画像に対しては通常 \$\Delta y : \Delta x = 1\$ に選ばれるが、動画像を飛越し走査する場合、

$$\Delta y : \Delta x = K = 0.7 \quad (15)$$

に選ばれる。0.7 という値は、横方向、縦方向のシャープネスが等しくなるように視覚実験的に定められた値である。0.7 に選ぶと何故良いかを説明することには困難を覚えるが、1フレーム内の画素の縦：横間隔比を 0.7 に選ぶということは、1フィールド内の画素の横：縦間隔比もほぼ 0.7 に等しくなる、

$$\Delta x : 2\Delta y = 0.71 \quad (16)$$

こと、すなわち \$0.7 \div 1/\sqrt{2}\$ であることを興味深く感ずる。

4. 自己相関々数と電力スペクトル密度

画像あるいは画像信号の統計的性質を記述するためによく用いられる、自己相関々数と電力スペクトル密度について述べる。

4.1 自己相関々数

\$f(t)\$ を定常確率過程とすると、

$$\phi(\tau) = \overline{f(t)f(t+\tau)} \quad (17)$$

をその自己相関々数という。\$\overline{}\$ は集合平均を表わす。

(17)式は時刻 \$t\$ における標本関数の値 \$f(t)\$ と、それより \$\tau\$ だけ離れた時刻における標本関数の値 \$f(t+\tau)\$ の積の集合平均（時間平均ではなく）である。これは一般には時間差 \$\tau\$ だけの関数とはならないが、確率過程が定常であれば、\$t\$ には関係せず \$\tau\$ だけの関数である。

さらに、この確率過程 \$f(t)\$ がエルゴード的であれば、

* (11)式で与えられる静止画像信号の帯域幅は、\$T\$ の値すなわち走査速度を考えることにより、適当な値とすることができる。動画像信号の帯域幅は、\$T\$ の値が \$W_t\$ の値より確定するから、一意に与えられる。

集合平均と時間平均は一致し、自己相関々数は時間平均、

$$\phi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t+\tau) d\tau \quad (18)$$

と表わすこともできる。

4.2 電力スペクトル密度

定常確率過程の標本関数 $f(t)$ の、 $-T/2 \leq t \leq T/2$ の区間だけとり出し、その区間の外では 0 とした信号を、

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t); & -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0; & t < -T/2, t > T/2 \end{cases} \quad (19)$$

と書くことにする。 $f_T(t)$ は絶対可積分であるからフーリエ変換が可能である。そのフーリエ変換すなわち振幅スペクトル密度、

$$F_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (20)$$

の絶対値の 2 乗を時間区間 T で割ったもの $|F_T(f)|^2/T$ は、平均電力に関するパーセバルの公式、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} |F_T(f)|^2 df = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) dt \quad (21)$$

より、 $f_T(t)$ の平均電力のスペクトル密度と解釈できる。 $T \rightarrow \infty$ の極限をとったものの集合平均、

$$W(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |F_T(f)|^2; \quad -\infty < f < \infty \quad (22)$$

を電力スペクトル密度という。正の周波数に対してのみ

$$W_s(f) = 2W(f); \quad 0 \leq f < \infty \quad (23)$$

と定義する流儀もあり、両者を区別するために、(22)式を両側電力スペクトル密度、(23)式を片側電力スペクトル密度と呼ぶことがある。

4.3 ウィーナ・キンチンの定理

確率過程が定常であれば、

$$W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (24)$$

$$\phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W(f) e^{-j2\pi f \tau} df \quad (25)$$

となる。すなわち自己相関々数と電力スペクトル密度は、フーリエ変換対の関係にある。この関係をウィーナ・キンチンの定理という。電力スペクトル密度を求めるにあたり、(22)式によらずとも、(24)式により自己相関々数のフーリエ変換として求めることもできるといふ、有用な定理である。

4.4 テレビ信号の自己相関々数と電力スペクトル密度

自己相関々数と電力スペクトル密度の具体例として、テレビ信号、(13)式、 $f_M(t)$ の自己相関々数 $\phi(\tau)$ と電力スペクトル密度 $W(f)$ について考えよう。これはそ

れぞれに図 1、図 4 のようになることはよく知られていることと思うが、何故このようになるかを考えるのが本節の目的である。

テレビ信号 $f_M(t)$ の自己相関々数 $\phi(\tau)$ を導くにあたり、(20)式で与えられる走査する前の画像 $\bar{g}_M(x, y, z)$ の自己相関々数 $\phi_g(\xi, \eta, \tau)$ より出発しよう。ただしこれは、

$$\phi_g(\xi, \eta, \tau) = \bar{g}_M(x, y, t) \bar{g}_M(x+\xi, y+\eta, t+\tau) \quad (26)$$

として定義される。これは画像の統計的性質より、ほぼ、

$$\phi_g(\xi, \eta, \tau) = \exp(-\alpha \sqrt{\xi^2 + \eta^2}) \exp(-\beta |\tau|) \quad (27)$$

と表わし得ることが知られている。ただし α, β は正の定数で、大写しであるか遠景であるか、動きが緩いか激しいかにより異なるが、画素間隔 Δx に対し $e^{-\alpha \Delta x} = 0.95^{1)}$ 、フレーム周期 T_P に対し $e^{-\beta T_P} = 0.99^{2)}$ 程度である。(27)式はさらに、

$$\phi_g(\xi, \eta, \tau) = e^{-\alpha |\xi|} e^{-\alpha |\eta|} e^{-\beta |\tau|} \quad (28)$$

と近似される。そのとき、走査して得られる(13)式のテレビ信号 $f_M(t)$ の自己相関々数は、ほぼ、

$$\begin{aligned} \phi(\tau) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha_1 |\tau - nT_i|) \\ & \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\exp(-\alpha_2 |\tau - kT_P|) \right. \\ & \left. + C \exp \left\{ -\alpha_2 \left| \tau - \left(k + \frac{1}{2} \right) T_P \right| \right\} \right] \\ & \times \exp(-\beta |\tau|) \end{aligned} \quad (29)$$

と表わされる。ただし T_i は水平走査周期、 T_P はフレーム周期、 α_1, α_2, C は(27)式で用いた定数および(14)式で用いた定数を用いて表わされる定数、

$$\alpha_1 = \frac{b}{XT_i} \alpha \quad (30)$$

$$\alpha_2 = \frac{2h}{YN_y T_i} \alpha = \frac{2h}{YT_P} \alpha \quad (31)$$

$$C = \exp \left(-\alpha \frac{h}{YN_y} \right) \quad (32)$$

である。(29)式の第 1 項の被総和項は x 軸方向すなわち水平走査線内の自己相関々数を意味し、総和はすべての水平走査線が同じ信号値を持つ場合の自己相関々数を意味する。第 2 項の被総和項は y 軸方向すなわち水平走査線間の相関を意味し、総和は画像が時間的に変化しない場合の相関を意味する。ただし被総和項の第 1 項は偶数フィールド、第 2 項は奇数フィールドとの相関を意味する。最後の第 3 項は t 軸方向すなわち画像が時間的に変化する相関を意味する。

テレビ信号 $f_M(t)$ の自己相関々数 $\phi(\tau)$ を図 1 に示

図1 テレビ信号の自己相関々数

図2 (29) 式の第1項, 第2項, 第3項

す。これは水平走査周期 T_l を周期に持つ $-\alpha_1$ を指数とする指数関数の繰返し波形を、フレーム周期 T_P を周期に持つ $-\alpha_2$ を指数とする指数関数の繰返し波形2つの和で変化させ、さらにこれを $-\beta$ を指数に持つ指数関数で変化させたものであることが(29)式よりわかる。すなわち図1の波形は図2の3つの波形の積として与えられる。

次にテレビ信号 $f_M(t)$ の電力スペクトル密度 $W(f)$ を導こう。これはウィーナ・キンチンの定理、(24)式を用いることにより、(29)式のフーリエ変換として与えられる。これは、(29)式の第1, 2, 3項それぞれのフーリエ変換 $W_1(f)$, $W_2(f)$, $W_3(f)$ の畳み込み積分、

$$W(f) = W_1(f) * W_2(f) * W_3(f)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_1(f_1) W_2(f_2) \times W_3(f - f_1 - f_2) df_1 df_2 \quad (33)$$

として与えられる。ただし、

$$\begin{aligned} W_1(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha_1|\tau - nT_l|) \\ &\quad \times \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\ &= \frac{2\alpha_1}{\alpha_1^2 + (2\pi f)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi f n T_l) \\ &= \frac{2\alpha_1}{\alpha_1^2 + (2\pi f)^2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(f - if_l) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} W_2(f) &= \frac{2\alpha_2}{\alpha_2^2 + (2\pi f)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\exp(-j2\pi f k T_P) \right. \\ &\quad \left. + C \exp\left\{-j2\pi f \left(k + \frac{1}{2}\right) T_P\right\} \right] \\ &= \frac{2\alpha_2}{\alpha_2^2 + (2\pi f)^2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \{ \delta(f - 2if_P) \\ &\quad + (1-C)\delta\{f - (2i+1)f_P\} \} \end{aligned} \quad (35)$$

$$W_3(f) = \frac{2\beta}{\beta^2 + (2\pi f)^2} \quad (36)$$

である。

テレビ信号の電力スペクトル密度 $W(f)$ は、(34), (35), (36) 式で与えられる図3の3つの波形、すなわち、 $\alpha_1/2\pi$ を遮断周波数とする1次バタワース特性で重み付けされた、水平走査周波数 f_l を周期とする δ 関数列と $\alpha_2/2\pi$ を遮断周波数とする1次バタワース特性で重み付けされた、フィールド周波数 $f_f = 2f_P$ を周期とする2つの δ 関数列 ((35) 式被総和項の第1項はフ

図3 (34), (35), (36) 式で与えられる電力スペクトル密度

図4 テレビ信号の電力スペクトル密度

フレーム周波数 f_p の偶数高調波，第2項はフレーム周波数の奇数高調波）と， $\beta/2\pi$ を遮断周波数とする1次バタワーススペクトル密度，を畳み込み積分することにより，図4のようになる。

4.5 カラーテレビ信号の電力スペクトルと色副搬送波の周波数の選定

白黒テレビ信号の電力スペクトル密度について述べたついでに，カラーテレビ信号のスペクトル構成について簡単に述べることにする。

カラー画像を伝送するためには，(4)式に対応する3つの信号を伝送しなければならないから，まともには白黒画像の3倍の伝送帯域幅を必要とするが，視覚特性の特色を巧妙に利用することにより，白黒テレビ信号と同じ帯域幅で，かつ白黒テレビとのコンパティビリティを有する信号として伝送することができる。

NTSC方式の複合カラーテレビ信号は，

$$f(t) = f_r(t) + f_i(t) \cos 2\pi f_s t + f_q(t) \sin 2\pi f_s t \quad (37)$$

ただし，

$$f_s = \frac{455}{2} f_i = 3.579547 \text{ MHz} \quad (38)$$

という信号である。ただし， $f_r(t)$ ， $f_i(t)$ ， $f_q(t)$ はそれぞれ Y 信号（輝度信号），I 信号，Q 信号と呼ばれる信号で，3原色信号に線形変換を施したものである*。Y 信号 $f_r(t)$ は白黒テレビ信号，(13)式 $f_M(t)$ と同じものである。

複合カラーテレビ信号の電力スペクトル密度は図5のようになる。副搬送波周波数を(38)式のように選ぶことにより，輝度信号と色信号のスペクトルはインターリー

* かわしくは，I 信号は 1.5 MHz に帯域制限したうえで残留側帯変調，Q 信号は 0.5 MHz に帯域制限したうえで両側帯変調する。

図5 複合カラーテレビ信号の電力スペクトル密度

ブされる。

カラー受像機における再生については省略し，白黒受像機における再生について述べる。複合カラーテレビ信号は白黒テレビ信号とのコンパティビリティを有する。すなわち，白黒受像機において複合カラーテレビ信号をそのまま再生しても，色信号による画質変化はほとんど生じないことについて述べる。このことは，図5のように色信号スペクトルが輝度信号スペクトルにインターリーブされていることによるが，周波数軸上で考えるより，時間軸上で考えるほうが理解しやすい。色副搬送波周波数 f_s は水平走査周波数 f_i の 1/2 の奇数倍， f_i はフレーム周波数 f_p の奇数倍， f_p はフィールド周波数 f_f の 1/2 倍に選ばれるから，

$$f_s = \frac{1}{2} (\text{奇数}) f_i \quad (39)$$

$$f_s = \frac{1}{4} (\text{奇数}) f_f \quad (40)$$

$$f_s = \frac{1}{2} (\text{奇数}) f_p \quad (41)$$

となる。色副搬送波が画面上に描く明暗模様は，(39)式より，隣り合う走査線で明暗が反転し，図6(a)のようにフィールド内でチェッカーフラグ状の明暗模様となることがわかる。(40)式より，インターレースされる走査線上で明暗の位相が 1/4 ずれ，図6(b)のようにフレーム内で斜線状の明暗模様となることがわかる。(41)式より，隣り合うフレーム間で明暗が反転することとなり，かつフィールド周期ごとに図6(b)，(c)，(d)のように斜線の傾きが反転することがわかる。

以上より色副搬送波が画面上に現われても視覚的にはほとんど劣化をもたらさないことが理解される。色副搬送波周波数，水平走査周波数，フィールド周波数，フレーム周波数が(39)，(40)，(41)式を満たすことが，カラー

図 6 色副搬送波により画面上に描かれる明暗模様

テレビと白黒テレビのコンパティビリティの観点から重要な役割をはたしていることがわかる。

5. Rate-distortion の理論と画像の帯域圧縮符号化

前章でカラーテレビ信号を白黒テレビ信号と同じ帯域幅を用いて伝送することを述べたが、これは $1/3$ 帯域圧縮と考えることができる。さらに $1/2$, $1/3$ の帯域圧縮ができないか、原理的にはどこまで帯域圧縮できるか、伝送すべき情報量はいくらかという疑問が提起されよう。このような疑問に答える Rate-distortion の理論³⁾について述べることにする。

アナログ的手法による帯域圧縮の研究が古くから行われて来たが、近年はデジタル符号化伝送を行うための帯域圧縮符号化の研究が盛んである。これらについては本会誌に石黒⁴⁾、吹抜⁵⁾の展望があり、IEEE の特集号⁶⁾、通信学会の特集号⁷⁾もあるので、帯域圧縮符号化の具体的手法については、これらを参照されたい。

Rate-distortion の理論とは、信号の誤差（ひずみおよび雑音）の平均値が、許容し得る平均誤差 D 以下となるように伝送するために必要な情報量の最小値 $R(D)$ を与える理論である。 $R(D)$ を Rate-distortion 関数という。信号を標本化しベクトルとして取扱う。送信々号、受信々号を n 次元たてベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ で表わすと、伝送される情報量は 1 標本点あたり、

$$I_{XY}(p_{Y|X}) = \frac{1}{n} \left[- \int p_X(\mathbf{x}) \log p_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \iint p_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \log p_{X|Y}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right]$$

$$= \frac{1}{n} \iint p_X(\mathbf{x}) p_{Y|X}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \times \log \frac{p_{Y|X}(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{p_X(\mathbf{x}) p_{Y|X}(\mathbf{y}|\mathbf{x})} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \quad (42)$$

誤差の平均値は 1 標本点当り、

$$D_Y = \frac{1}{n} \iint p_X(\mathbf{x}) p_{Y|X}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \quad (43)$$

ただし $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は $\mathbf{y}$ の $\mathbf{x}$ からの誤差を定義する評価関数である。Rate-distortion 関数は、

$$R(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{D_Y \leq D} I_{XY}(p_{Y|X}) \quad (44)$$

すなわち、誤差の平均値 D_Y が、許容し得る平均誤差 D より大きくならないという条件の下に $p_{Y|X}$ を最適化して得られる $I_{XY}(p_{Y|X})$ の下界の $n \rightarrow \infty$ における値である。

通信容量の理論がそうであるように、Rate-distortion の理論もまた、最適な具体的符号化方法を与えるものでは必ずしもなく、 $R(D)$ 以下の情報量で伝送しようとすることは無理であるという努力目標を与える理論と考えるべきであるが、証明の過程での考え方は、帯域圧縮符号化の具体的手法を考えるにあたり興味深いものがある。 $R(D)$ は任意の信号分布、任意の雑音分布、任意の誤差評価基準に対して解析的に求めることは残念ながらできない。画像信号の統計的性質、画質の評価の観点から必ずしも満足すべき仮定ではないが、信号、雑音がガウス性、誤差評価基準が 2 乗誤差評価の場合について以下説明する。

$p_X(\mathbf{x})$ として分散 σ_i^2 の独立なガウス分布、

$$p_X(\mathbf{x}) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma_i^2}\right) \quad (45)$$

誤差の評価関数 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ として 2 乗誤差、

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - x_i)^2 \quad (46)$$

をとる場合は (44) 式を解くことができ、各成分 x_i に、

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_i^2}{D_*} (\text{bit}); & \text{if } \sigma_i^2 \geq D_* \\ 0 & (\text{bit}); & \text{if } \sigma_i^2 < D_* \end{cases} \quad (47)$$

ただし D_* は次式を満たす定数、

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \min(D_*, \sigma_i^2) \quad (48)$$

を割当てて伝送するのが最適で、そのとき Rate-distortion 関数は、

$$R(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_i^2}{\min(D_*, \sigma_i^2)} \quad (49)$$

となる。

(45) 式より多少一般的な確率分布 $p(\mathbf{x})$ として、相関

のあるガウス分布に従う場合も(44)式を解くことができる。 $\mathbf{x}$ の相関行列,

$$\Phi = [\phi_i x_j; i, j=0, 1, \dots, n-1] \quad (50)$$

の固有値ならびに正規化された固有ベクトルを λ_i, ϕ_i ; $i=0, 1, \dots, n-1$ とするとき ϕ_i の転置行列 ϕ_i^T を行ベクトルとする行列,

$$\Psi = \begin{bmatrix} \phi_0^T \\ \phi_1^T \\ \vdots \\ \phi_{n-1}^T \end{bmatrix} \quad (51)$$

を変換行列とする線形変換,

$$\mathbf{z} = \Psi \mathbf{x} \quad (52)$$

を行う。この変換をカルーネン・レーベ変換あるいはホテリング変換という。

(51)式で与えられる行列 Ψ には2つの特色がある。(50)式で与えられる相関行列が対称行列であるから、その固有ベクトルは直交し、したがって行列は直交行列である。直交行列の逆行列,

$$\Psi^{-1} = \Psi^T \quad (53)$$

はやはり直交行列であるから、信号 $\mathbf{z}$ の受信々号 $\mathbf{w}$ を信号 $\mathbf{x}$ に対応する受信々号 $\mathbf{y}$ に逆変換する際に単位2次形式が不変に保たれる。

$$\sum_{i=0}^{n-1} (y_i - x_i)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (w_i - z_i)^2 \quad (54)$$

このことは、 $\mathbf{y}$ に含まれる2乗誤差と $\mathbf{w}$ に含まれる2乗誤差は等しいことを意味する。第2の特色は行列 Ψ は(52)式で与えられる信号 $\mathbf{z}$ の各成分を無相関とする行列であることである。このことは $\mathbf{z}$ の相関行列が,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{z}\mathbf{z}^T} &= \overline{\Psi \mathbf{x} \mathbf{x}^T \Psi^T} = \Psi \overline{\mathbf{x} \mathbf{x}^T} \Psi^T \\ &= \Psi \Psi^T \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (55)$$

のように対角行列となることからわかる。 $\mathbf{z}$ はガウス分布に従う $\mathbf{x}$ を線形変換したものであるから、やはりガウス分布に従う。無相関数性と独立性は一般に異なるが、ガウス分布に従う場合は無相関性と独立性は一致し、 $\mathbf{z}$ は,

$$p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_i}} \exp\left(-\frac{z_i^2}{2\lambda_i}\right) \quad (56)$$

なる分散 λ_i の独立なガウス分布に従う。

以上より(45)、(46)式の独立なガウス分布の場合に帰着され、(47)~(49)式とまったく同様にして各成分 z_i に,

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \log_2 \frac{\lambda_i}{D_*} \text{ (bit)}; & \text{if } \lambda_i \geq D_* \\ 0 \text{ (bit)}; & \text{if } \lambda_i < D_* \end{cases} \quad (57)$$

図7 ガウス性マルコフ過程の Rate-distortion 関数^{*)}
($\rho=0.95$, $n=256$)

ただし D_* は,

$$D_* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \min(D_*, \lambda_i) \quad (58)$$

を割当てて伝送するのが最適で、そのとき Rate-distortion 関数は,

$$R(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} \log_2 \frac{\lambda_i}{\min(D_*, \lambda_i)} \quad (59)$$

となる。信号 $\mathbf{x}$ を相関係数 $\rho=0.95$ のガウス性単純マルコフ過程と仮定して求めた Rate-distortion 関数の値は図7のようになる^{*}。信号 $\mathbf{x}$ にフーリエ変換、アダマール変換を施して伝送する場合の情報量、信号 $\mathbf{x}$ をそのまま伝送する場合の情報量も図示してある。これよりフーリエ変換、アダマール変換はカルーネン・レーベ変換に準ずる有効な変換であることがわかる。またここには示していないが予測変換もカルーネン・レーベ変換に準ずる有効な変換であることが知られている⁹⁾。

誤差の評価関数として、視覚的空間周波数特性を考慮した荷重2乗誤差を採用する場合も、(57)~(59)式と同様にして解くことができる。

(47)式、(57)式に対する補足説明をしておきたい。各成分 x_i あるいは z_i に(57)式あるいは(57)式のビット数を割当てて伝送するということは、 n 次元信号空間の各軸に等価的にこれらのビット数が割当てられるような多次元符号化を行うという意味であり、各成分をそれぞれ個別に量子化し符号化するという意味ではない。もっとも、各成分を個別に量子化することによる能率の劣化は $1/4$ (bit/sample) 程度である¹⁰⁾。

テレビ信号がガウス分布に従い、画質の評価を2乗誤差で評価できるとすれば、直交変換符号化、予測変換符号化は非常に能率の良い帯域圧縮符号化法であるといえる。ガウス分布、2乗誤差評価という仮定が少なからず妥当でないことが、帯域圧縮符号化の研究を行ううえで

^{*} 図7は(59)式で $n \rightarrow \infty$ なる極限に対する値ではなく、 $n=256$ に対する値を図示したものであるが、その差は $2.4/n$ (bit/sample) と小さく、ほとんど差はない。

の悩みでもあり、興味ある点でもある。

終りに、本稿の執筆にあたり御教示いただいた本学
滝保夫教授に深謝する。

〔参考文献〕

- 1) E.R. Kretzmer: Statistics of television signals, BSTJ, **31**, 4, July, (1952) 751-763
- 2) 滝, 田中, 松村: テレビジョン信号のフレーム相関および振幅分布の測定, NHK 技術研究, **11**, 3 (1959) 117-126
- 3) C.E. Shannon: Coding theorems for a discrete source with a fidelity criterion, IRE Nat. Conv. Rec., pt. 4 (1959) 142-163
- 4) 石黒: テレビジョン信号のデジタル伝送, テレビ誌, **27**, 1 (1973) 2-9
- 5) 吹抜: 画像信号の符号化, テレビ誌, **28**, 6 (1974) 426-432
- 6) Special Issue on Digital Picture Processing, Proc. of IEEE, **60**, 7 (1972)
- 7) 画像通信特集号, 信学誌, **57**, 11 (1974)
- 8) H.C. Andrews: Walsh function in image processing, feature selection and pattern recognition, Proc. of Symp. on Appl. of Walsh Functions. (1971) 26-32
- 9) 似鳥: 線形変換符号化——離散的パラメータを持つ連続情報源のための二つのデジタル符号化法, 信学論誌, **53-A**, 2 (1970) 97-104
- 10) T.J. Goblick Jr., J.L. Holsinger: Analog source digitization; A comparison of theory and practice, IEEE Trans., **IT-13**, Apr. (1967) 323-326