回路網の状態空間表示

慶応義塾大学工学部 高 橋 進 一

近年、動的システムの理論が完備されつつある。本文は、このシステム理論に影響された回路網理論のいくつかの話題を中心にまとめたものである。ひとつはシステム理論的に展開される RC 能動フィルタの実現法であり、他のひとつは回路網関数のシステム理論的表現といわれる時間域表現の話である。

1. ま え が き

電気工学の基礎理論として重要な役割を果たしている回路網理論は、工学理論の中でも最も美しい体系を成しているもののひとつであり、1960年代に始まるといわれる線形システム理論は本来、回路網理論の総合化をめざしたものであった。しかるに、独自の発展をとげたシステム理論は反対に回路網理論の発展に貢献することとなる。本文は、回路網理論がシステム理論の影響を強く受けたいくつかの話題をまとめたものである。2章では回路網の状態微分方程式の概要を、3章では積分器を含まない状態変数形能動フィルタの実現法を、4章では回路網のシステム理論的表現について述べる。

2. 回路網の状態微分方程式

まず最初に、回路網に関する状態空間表現の基礎的事項を例題を通して概観しておこう。図1に示す回路において、定電圧源による入力 $u(t)$ に対する出力応答電圧 $y(t)$ を考えてみる。 $Y(s)$, $U(s)$ を $y(t)$, $u(t)$ のラプラス変換とすると、従来の方法を用いれば¹⁾,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 1} \quad (1 \cdot a)$$

または $\ddot{y} + 3\dot{y} + y = u(t)$ (1 \cdot b)
 で与えられる。ここで、 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{x}_1$ とすると、

図 1 例題の回路

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 = \dot{y} = -3\dot{y} - y + u = -x_1 - 3x_2 + u$$

したがって、 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]'$ と置くと ('は転置)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2 \cdot a)$$

$$y = [1 \ 0] \mathbf{x} + 0 \cdot u \quad (2 \cdot b)$$

が求まる。

一方、静電容量の枝電圧を図1のように x_1 , x_2 とすると、 x_1 , x_2 に関する微分方程式は¹⁾

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + u, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2, \quad y = x_2$$

ここで、 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]'$ とすると、

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3 \cdot a)$$

$$y = [0 \ 1] \mathbf{x} + 0 \cdot u \quad (3 \cdot b)$$

(1 \cdot b) 式がスカラー微分方程式、(2) 式、(3) 式がベクトル微分方程式である。前者が入出力関係だけに注目しているのに対して、後者は回路内部の状態に着目しているという大きな違いがある。後者の表現は状態空間表現または状態微分方程式による表現といわれ、 x_1 , x_2 のようにシステムの状態を定量的に記述できる最小限の変数の組を状態変数と呼んでいる。このような状態変数ベクトル $\mathbf{x}$ に関する微分方程式は r 入力、 m 出力、状態変数を n 個とすると一般には、

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (4)$$

と表現される。ここに $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ はそれぞれ $n \times n$, $n \times r$, $m \times n$, $m \times r$ 行列である。さらに、回路網の場合、静電容量だけから成る閉路、インダクタンスだけから成るカットセットが存在しないかぎり状態変数の数はリアクタンス素子の総数に一致することが知られている。

初期値がすべて零であるとき、(4) 式のラプラス変換より、

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s) = \mathbf{F}(s)\mathbf{U}(s)$$

"State Space Representation of Networks" by Shin-ichi Takahashi
 (Faculty of Engineering, Keio University, Yokohama)

(5)

が求まる。 $F(s)$ は伝達関数行列である。 $r=m=1$ なる単入出力系るとき、 $F(s)$ は伝達関数、

$$F(s)=c(sI-A)^{-1}b+d \quad (6)$$

となる。 c, b はベクトル、 d はスカラーである。これら2つの式は周波数領域と時間領域における表現とを結びつける重要な関係式である。このとき、(4)式は $F(s)$ の実現システムであるともいわれる。そして、 x の次元をその実現システムの次数といい、最も次数の低いものを最小実現と呼ぶ。

システムの伝達関数行列 $F(s)$ が最初与えられ、それに対する状態微分方程式の係数 A, B, C, D が求まれば具体的に回路網が構成されない場合でもアナログ計算機をプログラムするようにして、すくなくとも積分器、加算器、係数器によって(4)式を実現することができ一般的である。そこで、(4)式を簡略化し、実現 (A, B, C, D) と表現することも多い。

一方、 x を $n \times n$ なる正則行列 P を用い $x=P\xi$ と相似変換すると、(4)式は、

$$\frac{d}{dt}(P\xi)=AP\xi+Bu, y=CP\xi+Du$$

$$\text{または、} \dot{\xi}=P^{-1}AP\xi+P^{-1}Bu \quad (7 \cdot a)$$

$$y=CPx+Du \quad (7 \cdot b)$$

伝達関数行列 $F(s)$ は、

$$F(s)=CP(sI-P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B+D \\ =C(sI-A)^{-1}B+D$$

であり、実現 $(P^{-1}AP, P^{-1}B, CP, D)$ と実現 (A, B, C, D) は同じ伝達関数行列を持つ。このような、正則行列 P で結ばれたシステムは互いに代数的に等価であるといわれる。 P の選択は任意であるから、代数的に等価なシステムは無数に存在する。代数的に等価なシステムを回路網理論の立場でみれば、一般化された等価回路の表現式であるとも解釈されよう。

図1に示された回路を例としてとりあげる。(2)式より、

$$(A, b, c, d)=\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, 0\right) \quad (8)$$

ここで、変換行列 P として、

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

とすると、代数的に等価なシステム、

$$(P^{-1}AP, P^{-1}b, cP, d) \\ =\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, 0\right) \quad (10)$$

が求まる。(10)式は(3)式に一致している。

3. 積分器を含まない状態変数形能動フィルター

3.1 同伴形状態微分方程式¹⁾

まず、分子、分母に共通根を持たない次のような伝達関数、

$$F(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}+d_0 \\ \triangleq \frac{N_0(s)}{D_0(s)}+d_0 \quad (11)$$

が与えられた場合の状態微分方程式の導き方を考えてみる。代表的なひとつの方法は、

$$\frac{X_1(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}, \\ Y(s)=[b_1s^{n-1}+\cdots+b_n]X_1(s)+d_0U(s) \quad (12)$$

なる変数 $X_1(s)$ を導入する方法である。さらに、 $X_1(s)$ の逆変換 x_1 から変数 $x_2, x_3, \dots, x_n$ を次のように定める。

$$x_2=\dot{x}_1=x_1^{(1)}, x_3=\dot{x}_2=x_1^{(2)}, \dots, x_n=\dot{x}_{n-1} \\ =x_1^{(n-1)} \quad (13)$$

そうすると $x=[x_1 x_2 \cdots x_n]'$ に対して、

$$\dot{x}=A_c x+b_c u \quad (14 \cdot a)$$

$$y=c_c x+d_c u \quad (14 \cdot b)$$

ここに

$$A_c=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (14 \cdot c)$$

$$b_c=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14 \cdot d)$$

$$c_c=[b_n \ b_{n-1} \ \cdots \ b_2 \ b_1] \quad (14 \cdot e)$$

$$d_c=d_0 \quad (14 \cdot f)$$

なるベクトル状態微分方程式が導かれる。このようにして作られた微分方程式、すなわち最小実現 (A_c, b_c, c_c, D_c) は(11)式の伝達関数の分子分母多項式の係数と密接な対応関係を持っている。この表現形式は伝達関数を時間域表現する際の最も基本的なものであって、同伴形の状態方程式と呼ばれている。

3.2 対角形状態微分方程式¹⁾

いま、(11)式がRCアドミタンス関数を表わしてい

図 2 Foster II 形 RC 並列回路

るとすれば、 $F(s)$ は部分分数展開されて、いわゆる Foster II 形 RC 回路図 2 が得られるはずである。

$$F(s) = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{1+sC_1R_1} + \cdots + \frac{1}{1+sC_nR_n} \quad (15 \cdot a)$$

$$= \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} + \cdots + \frac{1}{R_n} \right) + \left(-\frac{1}{R_1} \right) \frac{1/C_1R_1}{s+1/C_1R_1} + \cdots + \left(-\frac{1}{R_n} \right) \frac{1/C_nR_n}{s+1/C_nR_n} \quad (15 \cdot b)$$

ここで、 $C_1, C_2, \dots, C_n$ の枝電圧 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ を状態変数とし、入力電圧を u 、出力 y を流入電流とすると、

$$\dot{\xi} = A_d \xi + b_d u \quad (16 \cdot a)$$

$$y = c_d \xi + d_d u \quad (16 \cdot b)$$

ここに、

$$A_d = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1R_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{C_nR_n} \end{pmatrix} \quad (16 \cdot c)$$

$$b_d = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1R_1} \\ \frac{1}{C_2R_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{C_nR_n} \end{pmatrix} \quad (16 \cdot d)$$

$$c_d = \left[-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \cdots -\frac{1}{R_n} \right] \quad (16 \cdot e)$$

$$d_d = \left[\frac{1}{R_0} + \cdots + \frac{1}{R_n} \right] \quad (16 \cdot f)$$

が求まる。これも基本的な表現形式であって、対角形の状態微分方程式と呼ばれる。

伝達関数 $F(s)$ から 2 つの最小実現 (14) 式と (16) 式が得られたのであるから、すでに 2 章で述べたごとく、

$$P^{-1}A_cP = A_d, \quad P^{-1}b_c = b_d, \quad c_dP = c_d \quad (17)$$

なる変換行列 P が存在するはずである。 P は同伴行列 A_c を対角行列 A_d に変換する行列であり、 A_c の固有

値 $-\lambda_i = -1/C_iR_i (i=1, 2, \dots, n)$ が相異なるとき次の行列 M (Vandermonde 行列) で同伴行列は対角化される²⁾。

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & \cdots & -\lambda_n \\ (-\lambda_1)^2 & (-\lambda_2)^2 & \cdots & (-\lambda_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-\lambda_1)^{n-1} & (-\lambda_2)^{n-1} & \cdots & (-\lambda_n)^{n-1} \end{pmatrix} \quad (18)$$

しかしながら、この M で変換すると係数 b_c から b_d が求まらない。そこで、対角行列 $M^{-1}A_cM$ を対角行列 U

$$U = \text{diag}(u_1 \ u_2 \cdots u_n) \quad (19)$$

でさらに変換すると $U^{-1}(M^{-1}A_cM)U = M^{-1}A_cM$ となり不変であるから、変換行列を $P = MU$ とし、 b_c が b_d となる MU を定めればよい。すなわち、

$$Pb_d = MUb_d = b_c = [0 \cdots 0 \ 1]'$$

各要素を比較し、 $\lambda_i = 1/C_iR_i$ とすると (11) 式の $D_0(s) = (s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\cdots(s+\lambda_n)$ を用い、

$$u_i = 1/\lambda_i \prod_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i) = 1/\lambda_i \frac{d}{ds} D_0(s) |_{s=-\lambda_i}$$

すなわち、

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 \prod_{j \neq 1} (\lambda_j - \lambda_1)} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n \prod_{j \neq n} (\lambda_j - \lambda_n)} \\ -\lambda_1 & & -\lambda_n \\ \frac{1}{\lambda_1 \prod_{j \neq 1} (\lambda_j - \lambda_1)} & & \frac{1}{\lambda_n \prod_{j \neq n} (\lambda_j - \lambda_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(-\lambda_1)^{n-1}}{\lambda_1 \prod_{j \neq 1} (\lambda_j - \lambda_1)} & \cdots & \frac{(-\lambda_n)^{n-1}}{\lambda_n \prod_{j \neq n} (\lambda_j - \lambda_n)} \end{pmatrix} \quad (20)$$

が求められる。

3.3 負の実軸上に一位の極を持つ伝達関数

以上の結果を用いて、負の実軸上に一位の極を持つ伝達関数、

$$F(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\cdots(s+\lambda_n)} \triangleq \frac{N(s)}{D_0(s)} \quad (21)$$

の実現を考える。(21) 式に対する同伴形微分方程式に (20) 式の P を用いて変換すると、

$$\dot{\xi} = A_d \xi + b_d u, \quad y = c_d \xi \quad (22)$$

ここに、 A_d, b_d は (16) 式と同じであるが、 c_d は $F(s)$ の分子多項式 $N(s)$ を用いると、

$$c_d = [e_1 e_2 \cdots e_n], \quad e_i = N(-\lambda_i)/\lambda_i \prod_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i) \quad (23)$$

明らかに (22) 式は図 3 に示される回路で実現される。(23) 式より ξ_i は C_i の枝電圧であり、これらの枝電圧をそれぞれ e_i 倍し加算すれば出力となるからである。

3.4 一般の伝達関数の実現

図3 負の実軸上一位の極を持つ伝達関数の実現

上述した方法に加えて状態フィードバックの理論³⁾を導入すれば、分母が Hurwitz 多項式であるすべての伝達関数を構成することができる。

$$F(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n} \triangleq \frac{N(s)}{D(s)} \quad (24)$$

なる伝達関数を考える。簡単のためここでは $m < n$ とする。まず Hurwitz 多項式 $D(s)$ を次のように分解する。

$$D(s) = D_0(s) + D_1(s) \quad (25 \cdot a)$$

$$\text{ここに } D_0(s) = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \dots (s + \lambda_n) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n \quad (25 \cdot b)$$

$$D_1(s) = f_1 s^{n-1} + f_2 s^{n-2} + \dots + f_n \quad (25 \cdot c)$$

そうすると伝達関数 $N(s)/D_0(s)$ に関する同伴形微分方程式はすでに (14) 式で求められており、

$$\dot{x} = A_c x + b_c u, \quad y = c_c x$$

これに状態フィードバック、

$$u = v - f x \quad (26 \cdot a)$$

$$\text{ここに } f = [f_n \ f_{n-1} \ \dots \ f_1] \quad (26 \cdot b)$$

を施すと (v は新しい入力)、

$$\dot{x} = (A_c - b_c f) x + b_c v, \quad y = c_c x \quad (27)$$

行列 $(A_c - b_c f)$ は、

$$\begin{aligned} A_c - b_c f &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} [f_n \ f_{n-1} \ \dots \ f_1] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -(a_n + f_n) & -(a_{n-1} + f_{n-1}) & \dots & -(a_1 + f_1) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

であって、 $(a_n + f_n) = \alpha_n$, $(a_{n-1} + f_{n-1}) = \alpha_{n-1}$, $\dots$, $(a_1 +$

図4 一般の伝達関数の実現

$f_1) = \alpha_1$ より (28) 式は (24) 式の同伴形状微分方程式の表現となっている。

さらに、先に求めた行列 P を用いて変換 $x = P \xi$ を施すと、

$$\dot{\xi} = [A_d - b_d f_d] \xi + b_d v, \quad y = c_d \xi \quad (29)$$

ここに、 $f_d = fP$ であって (20), (25・c), (26) 式より、

$$f_d = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_n]$$

$$\text{ここに } \gamma_i = D_1(-\lambda_i) / \lambda_i \prod_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i)$$

であり、各要素 γ_i は (25・c) 式で与えられる $D_1(s)$ を用いて表現される。このようにして、伝達関数 (24) 式は図3の回路に、さらにフィードバック f_d を c_i の枝電圧 ξ_i から入力に施すことによって実現される。これを図4に示す。

ここで述べたように、同伴行列を、Foster II 形 RC 回路を表現する対角行列のように、ある特定の RC 回路の状態方程式に変換する行列 P が決定できる場合には、同様にして種々の RC 能動フィルタが実現される⁴⁾。従来の状態変数形フィルタは積分器を必要としたが、システム理論の立場に立てば、各静電容量素子そのものが積分器の役割を果しているのであって、積分器をもちや unnecessary なものとしてしまうのである。

4. 線形受動回路網のシステム理論的表現

回路網の特性を記述するのに、従来は周波数領域における表現を用いることが多い。受動回路網のイミタンス表現である正実関数や2種素子回路における回路網関数の零点、極の制限がそれである。これに対して、回路網のより厳密な記述である状態変数表現 (A, B, C, D) の係数行列の関係によって、回路網の入出力特性を表現することをシステム理論的表現と呼んでいる¹⁾。このシステム理論的表現は従来の周波数域表現に対して時間域表現であるといえる。回路網に関するシステム理論表現の最初のは正実関数を表現したものであって、Kalman⁵⁾-Yakubovich⁶⁾ の補助定理として広く知られている。ここでは、システム理論的表現をとりあげ、システム理論の回路網理論へ影響の一端を紹介することにしよう。

ここでは簡単のため、単入出力システムを取り扱う。

4.1 正実関数のシステム理論的表現¹⁾⁵⁾⁶⁾

(定理1) 実有理関数 $F(s)$ が最小実現 $(A, b, c, d \geq 0)$ を持つとき、 $F(s)$ が正実関数であるための必要十分条件は、次の2つを同時に満たす対称な正定値行列 S と n 次元横ベクトル l とが存在することである。

$$A'S + SA = -l'l \quad (30 \cdot a)$$

$$Sb = c' - \sqrt{2d}l' \quad (30 \cdot b)$$

$F(s)$ が S の右半平面で正則であることと、 $F(s)$ の実部が非負であることが正定値行列 S とベクトル l の存在という表現に変わっているのである。ここでは簡単に定理1の十分性を証明しておこう。

$d \geq 0$ に注意すると、 $\sigma \geq 0$ に対して $F(\sigma + j\omega)$ の実部は、 $F(s)$ がスカラー量であること、すなわち (6) 式から $F(s) = F'(s) = c(sI - A)^{-1}b + d = b'(sI - A')^{-1}c' + d$ であることより、

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} F(\sigma + j\omega) &= F'(\sigma - j\omega) + F(\sigma + j\omega) \\ &= 2d + b' \{ (\sigma - j\omega)I - A' \}^{-1} c' + c \{ (\sigma + j\omega)I - A \}^{-1} b \\ &= 2d + b' [\{ (\sigma - j\omega)I - A' \}^{-1} S \\ &\quad + S \{ (\sigma + j\omega)I - A \}^{-1}] b + \sqrt{2d} b' \{ (\sigma - j\omega)I \\ &\quad - A' \}^{-1} l' + \sqrt{2d} l \{ (\sigma + j\omega)I - A \}^{-1} b \\ &= 2d + b' [\{ (\sigma - j\omega)I - A' \}^{-1} \{ (\sigma + j\omega)I \\ &\quad - A \} \{ (\sigma + j\omega)I - A \}^{-1} S + S \{ (\sigma - j\omega)I \\ &\quad - A' \}^{-1} \{ (\sigma - j\omega)I - A' \} \{ (\sigma + j\omega)I - A \}^{-1}] b \\ &\quad + \sqrt{2d} b' \{ (\sigma - j\omega)I - A' \}^{-1} l' + \sqrt{2d} l \{ (\sigma \\ &\quad + j\omega)I - A \}^{-1} b \\ &= (\sqrt{2d})^2 + b' \{ (\sigma - j\omega)I \\ &\quad - A' \}^{-1} \{ 2\sigma S - A'S - SA \} \{ (\sigma + j\omega)I \\ &\quad - A \}^{-1} b + \sqrt{2d} b' \{ (\sigma - j\omega)I - A' \}^{-1} l' \\ &\quad + \sqrt{2d} l \{ (\sigma + j\omega)I - A \}^{-1} b + b' \{ (\sigma - j\omega)I \\ &\quad - A' \}^{-1} l' l \{ (\sigma + j\omega)I - A \}^{-1} b \\ &= 2\sigma b' \{ (\sigma - j\omega)I - A' \}^{-1} S \{ (\sigma + j\omega)I - A \}^{-1} b \\ &\quad + [\sqrt{2d} + b' \{ (\sigma - j\omega)I - A' \}^{-1} l'] [\sqrt{2d} \\ &\quad + l \{ (\sigma + j\omega)I - A \}^{-1} b] \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、 $\{ (\sigma + j\omega)I - A \}^{-1} b$ はベクトルで S は対称正定値行列であるから、最後の式の1項目は正定値をとる。さらに複素共役ベクトルの積である2項目も非負値をとる。すなわち $\sigma \geq 0$ に対して $\operatorname{Re} F(\sigma + j\omega) \geq 0$ が示された。

4.2 2種素子イミタンスのシステム理論的表現

(定理2) —LC イミタンス関数の表現⁷⁾

$F(s)$ の最小実現を $(A, b, c, d=0)$ とするとき、 $F(s)$ が LC イミタンス関数であるための必要十分条件は

$$A'S + SA = 0 \quad (32 \cdot a)$$

$$Sb = c' \quad (32 \cdot b)$$

を満たす対称正定値行列 S が存在することである。

(定理3) —RC インピーダンスならびに RL アドミタ

ンス関数の表現⁷⁾⁸⁾

$F(s)$ の最小実現を $(A, b, c, d < \infty)$ とする。このとき、 $F(s)$ が RC インピーダンスならびに RL アドミタンス関数であるための必要十分条件は、 $d \geq 0$ ならびに、

$$A'S = SA \geq 0 \quad (33 \cdot a)$$

$$Sb = c' \quad (33 \cdot b)$$

を満たす正定値対称行列 S が存在することである。ここに $SA \geq 0$ は SA が準負定値行列であることを意味している。

(定理4) —RL インピーダンスならびに RC アドミタンス関数の表現⁷⁾⁸⁾

$F(s)$ の最小実現を $(A, b, c, d < \infty)$ とする。このとき、 $F(s)$ が RL インピーダンスならびに RC アドミタンス関数であるための必要十分条件は、 $d - cA^{-1}b \geq 0$ ならびに、

$$A'S = SA \geq 0 \quad (34 \cdot a)$$

$$Sb = -c' \quad (34 \cdot b)$$

を満たす正定値対称行列 S が存在することである。

RC, RL イミタンス関数の実部が非負値をとることは、これらが正実関数であることから明らかであろう。ここでは、定理3, 4を用い、各イミタンス関数の虚部の性質を導いてみる。まず、RC インピーダンスならびに RL アドミタンス関数 $F(s)$ の虚部を取り扱う。

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Im} F(j\omega) &= F(j\omega) - F(-j\omega) \\ &= c \{ (j\omega)I - A \}^{-1} b + d - b' \{ (-j\omega)I - A' \}^{-1} c' - d \\ &= b'S \{ (j\omega)I - A \}^{-1} b - b' \{ (-j\omega)I - A' \}^{-1} Sb \\ &= b' \{ (-j\omega)I - A' \}^{-1} [\{ (-j\omega)I \\ &\quad - A' \} S - S \{ (j\omega)I - A \}] \{ (j\omega)I - A \}^{-1} b \\ &= b' \{ (-j\omega)I - A' \}^{-1} [-j2\omega S] \{ (j\omega)I - A \}^{-1} b \\ &= -j2\omega h^* S h \end{aligned} \quad (35)$$

ここに、

$$h = \{ (j\omega)I - A \}^{-1} b \text{ (ベクトル)}, \quad h^* \text{ (} h \text{ の共役転置)}$$

これより、 $\omega \geq 0$ に対して $\operatorname{Im} F(j\omega) \leq 0$ が示される。

同様に定理4より RL インピーダンスならびに RC アドミタンス関数 $F(j\omega)$ の虚部は $\omega \geq 0$ に対して $\operatorname{Im} F(j\omega) \geq 0$ であることを導くことができる。

これらのシステム理論的表現をながめると、興味あるいくつかの事実が浮びあがってくる。定理1での表現 $A'S + SA = -l'l$ はシステムの安定性を論ずる際のリアプノフの行列方程式¹⁾であり、対称正定値行列 S の存在でシステムの安定性が保証される。定理3, 4での表現 $A'S = SA$, $Sb = c'$ は一般に、 S が対称正則行列であるとき以下に示されるようにシステムが相反システムである条件の特別な場合を表わしている。さらに S の正定値によって RC, RL イミタンスを規定し、加えて、 b の正負の符号関係によって RC, RL の表現を与える。

さらにまた、条件 $A'S=SA \leq 0$ は $F(s)$ が非振動減衰システム、すなわちシステム関数の極が複素平面上の負の実軸上に制限される条件であることを付記しておこう。

$A'S=SA$, $Sb=c'$ が相反性の条件の特別な場合に相当するということは、次のようにして容易に導かれる。伝達関数行列 $F(s)$ が相反であるとは $F'(s)=F(s)$ なることである。すなわち (5) 式より (ここでは $D=0$ として) 、

$$F(s)=C(sI-A)^{-1}B=F'(s)=B'(sI-A')^{-1}C' \quad (36)$$

これより $F(s)$ の 2 つの実現 $(A, B, C, D=0)$, $(A', C', B', D'=0)$ が求まる。システムの相似性から適当な正則行列 S によって ($P^{-1}=S$ とする) 、

$$SAS^{-1}=A', SB=C', CS^{-1}=B' \quad (37)$$

が成立する。すなわち、 $SA=A'S$, $SB=C'$ が導かれる。当然、単入出力システムである $(A, b, c, d=0)$ はこの特別な場合に相当している。

以上で考察したイミタンス関数は単入出力システムに関する表現であるが、より一般的な多入出力システムに対する表現、すなわち正実行列¹⁾、2 種素子イミタンス行列⁹⁾ に対しても類似の表現形式が得られている。他に、RC 3 端子回路網の伝達関数に対する表現¹⁰⁾ も知られているが、ここでは省略し、より身近な線形回路網のいくつかの表現を以下に与える。

4.3 代表的回路網のシステム理論的表現¹¹⁾

(定理 5) — 全域通過関数の表現 —

$F(s)$ の最小実現を $(A, b, c, d \neq 0)$ とする。このとき、 $F(s)$ が全域通過伝達関数であるための必要充分条件は、

$$A'S+SA=\frac{1}{d}c'c \quad (38 \cdot a)$$

$$Sb=c' \quad (38 \cdot b)$$

を満足する正則対称行列 S が存在することである。さらに、 $-dS$ が正定値行列であれば安定な全域通過伝達関数の条件となる。

(定理 6) — 高域通過変換の表現 —

$F(s)$ の最小実現を (A, b, c, d) とするとき、 $(A^{-1}, A^{-1}b, -cA^{-1}, d-cA^{-1}b)$ は $F(1/s)$ の最小実現のひとつである。

この定理は $F(s)=c(sI-A)^{-1}b+d$ ならびに恒等式 $\left(\frac{1}{s}I-A\right)\{-A^{-1}-A^{-1}(sI-A^{-1})^{-1}A^{-1}\}=I$ を用いて容易に導くことができる。すなわち

$$\begin{aligned} F(1/s) &= c\left(\frac{1}{s}I-A\right)^{-1}b+d \\ &= c\{-A^{-1}-A^{-1}(sI-A^{-1})^{-1}A^{-1}\}b+d \\ &= -(cA^{-1})(sI-A^{-1})(A^{-1}b)+(d-cA^{-1}b) \end{aligned} \quad (39)$$

となるからである。またここでいう、ひとつの最小実現であるとは正則変換行列を介在して無数の最小実現が存在するからである。定理 6 は代表的な低域通過-高域通過周波数変換であるが、帯域通過変換として次の表現も知られている。

(定理 7) — 帯域通過変換の表現 —

$F(s)$ の最小実現を (A, b, c, d) とするとき、2 倍の次数の実現、

$$\left(\begin{pmatrix} o & I \\ -I & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} o \\ b \end{pmatrix}, (o \ c), d\right) \quad (40)$$

は $F(s+1/s)$ のひとつの実現となっている。

さらに、回路網合成理論で重要な役割を果たす定抵抗回路網に関連して次のことも知られている。

(定理 8) — 定抵抗回路網の条件 —

(A, b, c, d) の伝達特性 $c(sI-A)^{-1}b+d$ が s に無関係に一定値をとるための必要充分条件は $d \neq 0$ であり、行列 A の次数を n とすれば、

$$cb=cAb=cA^2b=\dots=cA^{n-1}b=0 \quad (41)$$

なることである。

この定理は、行列に関するケリー-ハミルトンの定理を用いて容易に証明される。

5. む す び

以上、システム理論に影響された回路網理論のいくつかの話題を取りあげ解説を試みた。システム理論研究の歴史も浅く、その適用例もけっして多いとはいえないが、ここでの話題はそのうちの数少ない例である。より広範の応用はこれからの発展にかかっているといえよう。
(昭和 52 年 5 月 20 日受付)

【参 考 文 献】

- 1) 高橋、有本: 回路網とシステム理論, コロナ社 (昭和 49 年)
- 2) 伊藤: システム制御理論, 昭晃堂 (1973)
- 3) W. M. Wonham: On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems, IEEE Trans., **AC-12**, 6, Dec. (1967) 660-665
- 4) 高橋ほか: 能動 RC 回路のシステム理論的構成, 信学会 CST 76-65 (1976)
- 5) R. E. Kalman: Lyapunov Function for the Problem of Lur'e in Automatic Control, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 49 (1963) 201
- 6) V. A. Yakubovich: The Solution of Certain Matrix Inequalities in Automatic Control Theory, Dokl. Akad. Nauk. USSR, **143** (1962) 1304
- 7) B. D. O. Anderson: Hurwitz Polynomials, LC and RC Positive Real Functions and Hermite Matrix, IEEE Trans., **CT-19**, Sept. (1972) 495
- 8) 高橋ほか: RC 駆動点関数のシステム理論的考察, 信学論, **59-A**, 8 (1976) 607
- 9) 松本ほか: RC, RL インピーダンス行列のシステム理論的表現, 信学全大 39 (昭 51)
- 10) 松本ほか: RC 3 端子網伝達関数のシステム理論的表現, 信学全大 13 (昭 52)
- 11) 松本ほか: 線形回路網のシステム理論的表現, 信学誌, **60-A**, 8 (1977) 709