コンピュータ技術への符号理論の応用

齊 藤 実†

1. ま え が き

今回は、美しい理論体系からなる誤り訂正符号 (ECC: Error Correcting Code) の応用事例として、コンピュータ技術への適用について紹介する。ECC のコンピュータシステムへの最初の本格的な導入は、1961 年に IBM 7030 システムにおいてなされたものである。このシステムの主記憶装置にはハミング符号、浮動小数点演算装置には誤り検出のための剰余符号が用いられた¹⁾。

その後、システム高信頼化への要求の高まり、ならびに LSI 技術の進展による符号化・復号化回路の実現性の向上などの要因から、ECC のコンピュータシステムへの応用が活発化してきている。適用分野としては、記憶装置と論理演算装置とに大別されるが、論理演算装置への導入²⁾³⁾に比べ、記憶装置への導入がかなり先行している。したがって、本講座では、特にコンピュータ用記憶装置への ECC の応用に絞って話を進める。

2. 記憶装置への応用

まず、コンピュータシステムにおいて使用されている記憶装置の概要を簡単に説明する。各種記憶装置は、性能および経済性の面から、図 1 に示すような記憶階層を構成する。高価だが高速アクセスが可能な半導体記憶装置は、キャッシュメモリおよびメインメモリとして、プロセッサと直結している。この下に、オンラインファイル記憶装置の代表格である磁気ディスク装置が位置する。磁気ディスク装置は高速かつ大容量化を経済的に実現している。また、媒体可換

性を有する磁気テープ装置、光ディスク装置なども用途に応じて使い分けられている。さらに、オフラインファイル記憶装置として、大規模な媒体収納庫とその自動交換機構を有する大容量記憶装置 (MSS: Mass Storage System) がある。

このような各種記憶装置の高信頼化を図るため、ECC が有効に利用されている。通常、記憶装置への ECC の適用に当っては、以下の点が主に考慮されるべきである。

- (1) 誤り訂正・検出能力
- (2) 符号効率
- (3) 符号化・復号化の処理速度
- (4) 符号化・復号化回路の規模
- (5) 復号誤り確率 (誤り訂正率, 誤り見逃し率)

これらを踏まえて ECC の種類および構成を決定したうえで、符号化・復号化回路の具体的な設計などを行うことになる。

図 1 コンピュータシステムにおける記憶階層

† NTT 電子応用研究所

“Introduction to Coding Theory: (14) Application of Coding Theory to Computer Technology” by Minoru Saito (NTT Applied Electronics Laboratories, Tokyo)

一般に、半導体記憶装置においては、第一に高速復号が強く要求される。また、アクセス単位が小さいので、冗長度（検査ビット）がより少なく符号効率が高いことが望まれる。一方、ファイル記憶装置においては、媒体欠陥などによる比較的大きな誤りが発生する可能性があるため、高い誤り訂正能力が必要とされる。

3. 応用事例

コンピュータシステムへの ECC の応用として、半導体記憶装置、磁気テープ装置、磁気ディスク装置、光ディスク装置の事例について述べる。

3.1 半導体記憶装置への応用

当初、集積度が比較的低い記憶素子で構成された半導体記憶装置における ECC の訂正対象は、媒体上の欠陥に起因する固定的な誤りではなく、雑音等による間欠的な誤りを想定していた。すなわち、あくまでも“保険”という位置づけであった。工場出荷時の検査において、誤りの引金と認識される媒体欠陥は皆無のものだけを合格としていた。このようにしても充分製造歩留りは確保できた。

このような目的で適用された ECC は、1 ビット誤り訂正・2 ビット誤り検出機能を有するハミング符号 (SEC-DED 符号) である。情報ビット数と検査ビット数との関係を表 1 に示す。この符号は、IBM 7030 (1961 年) および IBM 360/85 (1968 年) の主記憶装置に採用された。

さらに、1970 年に最小重みおよび巡回性などの観点から最適化された SEC-DED 符号が提案された⁴⁾。一例として、情報ビット数が 64、検査ビット数が 8 である場合のパリティ検査行列 (H) を図 2 に示す。この符号は、誤り検出能力が高く、符号化および復号化時間が短いことなどから、ミニコン以上の主記憶装置には急速に普及した。

近年、半導体記憶装置を構成するダイナミック型ランダムアクセスメモリー (DRAM) である MOS メモリーの大容量化は著しい。しかし、チップ容量がメガビットクラス以上になると、高密度化に伴う次のような課題が生じてくる。

- (1) パターンの微細化により、固定的および間欠的な欠陥箇所が増加する。
- (2) ビット線に接続されるメモリーセルの増加により、読出し電圧が微弱となるため、耐雑音性が低下する。
- (3) メモリーセル縮小による蓄積電荷量の減少で、アルファ線の入射で電荷が失われ易くなる。

表 1 SEC-DED 符号の情報ビット数と検査ビット数との関係

情報ビット数	検査ビット数
16	6
32	7
64	8
128	9
256	10

Data bits (64)

Check bits (8)

01234567 89 63 01234567

$$H = \begin{bmatrix} 11111111 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 11111111 & & & & & 11 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11111111 & & & 111 & 11 & & 1 \\ 111 & 11 & 11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 111 & 1 & & 1 \\ & 111 & 1 & 111 & 11 & 11 & 1 & 1 & & & 1 & & 1 \\ & & 1 & 111 & 1 & 111 & 11 & & & & & & 1 \\ & & & 1 & 111 & 1 & & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & 11111111 & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

図 2 SEC-DED 符号のパリティ検査行列の例

以上の課題を解決するため、微細加工技術ならびに回路構成技術などの一層の向上が望まれるとともに、SEC-DED 符号よりも高い訂正能力を有する ECC の適用が要求される。

このような状況において、連続する複数ビット (b ビット) を塊と見なし、これを訂正単位とする ECC の構成法の研究がなされた。実用面では、超大型汎用コンピュータシステムの高信頼化のため、一重誤り訂正・二重誤り検出符号 (SbEC-DbED 符号: $b=4$ or 8) を主記憶装置に適用した例などがある⁵⁾。

3.2 磁気テープ装置への応用

磁気テープ装置は、磁気ディスク装置のバックアップ、長期保存データの格納、およびデータの交換などに広く用いられている。1/2 インチ幅オープンリール型の磁気テープのデータフォーマットとして導入された GCR (Group Coded Recording) と称される記録方式の中には、隣接符号 (b -adjacent code) と巡回検査符号 (CRCC: Cyclic Redundancy Check Code) が使用されている。GCR は、最近普及が目ざましいカ

ートリッジ型磁気テープにも用いられている標準的な方式であるので、これについて詳しく説明する⁶⁾。

GCR のデータフォーマットの概略を図 3 に示す。1 つのデータブロックは、読取りの同期をとるためのプリアンプルとポストアンプルで囲まれている。この中に、複数のデータグループが形成される。1 つのデータグループは、7 バイトのユーザデータ、1 バイトの隣接符号の検査バイト、および各バイトにつき 1 ビットのパリティから構成される。最終データグループの後端には CRCC が置かれる。これらは媒体上に 9 トラック並列に記録される。

誤りの検出および訂正には次のような手段を用いることが可能である。

- ① 隣接符号
- ② パリティ (各バイトに 1 ビット)
- ③ ポインタ (再生信号振幅および位相の誤差などから検出)
- ④ CRCC

これらを適宜組合せることにより、各種誤りの訂正・検出を行う。単一トラック誤りは、①と②の手段を用いて訂正される。2 トラック誤りは、①、②に加えて、③のポインタの助けを借りて訂正される。3 トラック以上の誤りは、④の CRCC によって検出され、読取り動作の再試行がなされる。

なお、GCR では、上記 ECC、CRCC を形成したのち、“0”が 3 個以上連続することがないように変換規則に基づき、4 ビットのデータを 5 ビットに変換してから、磁気テープに記録している。

3.3 磁気ディスク装置への応用

磁気ディスク装置は、高速アクセスが可能な大容量

オンラインファイル装置として広く用いられている。記憶容量の増加に関しては、媒体・ヘッド技術、変調方式等の信号処理技術の向上とともに、ECC の寄与も大きい。磁気ディスク装置における情報の誤りの発生は、媒体欠陥、ヘッドのオフトラック、再生信号のひずみなどの種々の原因による。

磁気ディスク装置の記録方式として、可変データブロック長の CKD (Count Key Data) 方式と FBA (Fixed Block Architecture) 方式とがある。CKD 方式のディスクにはファイア符号、FBA 方式にはリードソロモン符号が主に用いられている。

ここでは、適用例が多い CKD ディスクへのファイア符号について詳しく説明する⁷⁾。ファイア符号は、バースト誤りの証正が可能な巡回符号の一種である。一般に、生成多項式 $g(x)$ は次式で与えられる。

$$g(x) = (x^c + 1)p(x) \quad (1)$$

ただし、 $p(x)$ は m 次の既約多項式であり、その周期を ρ とする。符号長 n は c と ρ の最小公倍数、検査点数 r は $(c+m)$ で与えられる。このとき、誤り訂正可能長を l_1 、誤り検出可能長を l_2 とすると、次の関係式が成り立つ。

$$l_1 + l_2 - 1 \leq c \quad (2)$$

$$l_1 \leq m \quad (3)$$

図 4 に、ファイア符号の復号回路ブロック図を示す。誤りパターンを求めるシフトレジスタと、誤りロケーションを求めるシフトレジスタの内容が一致した時点でのレジスタ内容から誤りパターン、シフト回数から誤りロケーションが得られる。

具体例のひとつとして、大容量磁気ディスク装置に適用されたファイア符号の生成多項式 $g(x)$ を次に表

図 3 GCR フォーマット

す。

$$g(x) = (x^{13} + 1) \cdot (x^{35} + x^{23} + x^8 + x^2 + 1) \quad (4)$$

ここで、既約多項式 $p(x) = x^{35} + x^{23} + x^8 + x^2 + 1$ の周期 ρ は $(2^{35} - 1)$ なので、符号の長さ n は $13 \times (2^{35} - 1)$ となる。実際はこれを短縮化して用いている。すなわち、符号長 n を 19,069 バイトとし、4 ビット以下の誤りを訂正し、10 ビット以下の誤りを検出している。他の磁気ディスク装置にも類似のファイア符号が用いられている。

3.4 光ディスク装置への応用

最近、記録密度が高いことや媒体が交換可能である

図4 ファイア符号の復号回路ブロック図

ことなどを特徴とする光ディスク装置の研究開発が盛んであるが、これに対する ECC の適用の仕方は従来の記憶装置とは明らかに一線を画するものである。すでに説明した磁気テープ装置、磁気ディスク装置などにおいては、媒体欠陥に起因する初期誤りは極めて少ないので、例外的な処置としてユーザの使用に先立って、欠陥箇所を使用禁止としている。したがって、ユーザは初期誤りが発生していない記録領域のみを用いることになる。

これに対して、光ディスク媒体の誤り訂正処理前のビット誤り率は $10^{-6} \sim 10^{-5}$ と高いので、高信頼な光ディスク装置を効率良く実現するためには、装置設計段階から ECC を積極的に取り込む必要がある。すなわち、光ディスクでは、媒体欠陥に起因する初期誤りの残存をある程度許容し、これらの誤りの訂正に ECC を用いている。許容誤りを越える場合は、交代処理によって予備領域に書き換える。また、光ディスク媒体では、酸化などによる経時劣化があり得るので、これに伴い発生する誤りにも同じ ECC を効かせて、所定の媒体寿命を確保している。

このように極めて重要な役割を果たす ECC の適用にあたっては、光ディスク媒体の誤り特性や劣化特性を定量的に充分把握すべきである。この結果に基づいて、誤り訂正方式・構成を設計する必要がある。このとき、上記の交代処理技術とも密接に係わることに留

図5 ISO規格130mm径光ディスク媒体のセクタフォーマット

図 6 ISO 規格 130 mm 径光ディスク媒体のデータフォーマット

意することが大切である⁸⁾。

具体例として、ISO 規格の 130 mm 径書換型光ディスク媒体での ECC の適用形態について説明する。使用されている ECC は、 $GF(2^8)$ 上で定義されるハミング距離 17 のリードソロモン符号である。符号長が 120 バイト、情報バイトが 104 バイト、検査バイトが 16 バイトであり、8 バイトまでの誤りが訂正できる。この生成多項式を次に示す。

$$g(x) = \prod_{i=120}^{135} (x + \alpha^i) \quad (5)$$

セクタ容量が 1024 バイトのセクタフォーマットを図 5、データフォーマットを図 6 にそれぞれ示す。図 6 からわかるように、ユーザデータ 1024 バイトに対して、上記 ECC が 10 組構成されている。検査バイトは総計で 160 バイトとなる。さらに、ECC の誤訂正、誤り見逃し等の検出のために CRCC の検査バイトが 4 バイト、同期ずれ防止のために再同期パターンが 20 バイト毎に 1 バイトずつ付与されている。媒体への記録にあたって、一組の ECC はバイト単位に 10 バイト間隔で分散される。いわゆるセクタ内インタリーブが施される。したがって、最大 80 バイトのバー

図 7 光ディスク用 ECC の誤り訂正能力

スト誤りが訂正できることになる。

この ECC の誤り訂正能力を、インタリーブ長をパラメータとして評価した一例を図 7 に示す。誤り特性の実測値に基づいて、ランダム誤りおよびバースト誤りを考慮した結果である。例えば、訂正前の誤り率が

10^{-4} と比較的高い場合でも、インタリーブ長を 10 バイト (ISO 規格値) とすれば、訂正後は通常要求される誤り率 10^{-12} を上回る信頼性が得られることがわかる⁸⁾。

なお、復号においては、高速処理に向くユークリッド法⁹⁾がよく用いられている。最近では、8 バイト訂正を 200 μ s 以下と短時間で処理可能な専用 LSI も出現している。

4. む す び

コンピュータシステムの高信頼化のため、誤り訂正技術は重要な役割を果たしている。特に、光ディスク装置の研究開発にあたって大きくクローズアップされたように、この技術はコンピュータ用記憶装置の高密度化を支えるために不可欠である。今後、情報圧縮技術の記憶装置への導入により 1 ビットの重みが増すなかで、誤り訂正符号を中心とする符号理論の重要性はさらに高まるものと考えられる。

〔参 考 文 献〕

- 1) M. Y. Hsiao, W. C. Carter, J. W. Thomas and W. R. Stringfellow: "Reliability, Availability and Serviceability of

IBM Computer Systems: a quarter century of progress", IBM J. Res. Develop., **25**, 5, pp. 453-465 (1981)

- 2) T. R. N. Rao: "Error Coding for Arithmetic Processors", Academic Press (1974)
- 3) E. Fujiwara and K. Haruta: "Fault-Tolerant ALU Using Parity-based Codes", Trans. IECE, **E64**, 10, pp. 653-660 (1981)
- 4) M. Y. Hsiao: "A Class of Optimal Minimum Odd-Weight-Column SEC-DED Code", IBM J. Res. & Dev., **14**, 4, pp. 395-401 (1970)
- 5) 平栗, 上野, 槌本: "3 階層メモリ方式や高密度化技術により性能向上を図った大型コンピュータ M-380/382", 日経エレクトロニクス, pp. 179-199 (Oct. 26, 1981)
- 6) N. J. A. Sloane: "A Simple Description of an Error-Correcting Code for High-Density Magnetic Tape", Bell Syst. Tech. J., **55**, 2, pp. 157-165 (1976)
- 7) N. Glover: "Data Accuracy Issues for Disk Controller Developers", Computer Design, **21**, 10, pp. 127-130 (1982)
- 8) 齊藤, 武田: "ディジタル記録用光磁気ディスク装置のデータ信頼度の解析", 信学論, **J73-C-II**, 6, pp. 387-396 (1990)
- 9) Y. Sugiyama, M. Kasahara, S. Hirasawa and T. Namekawa: "A Method for Solving key Equation for Decoding Goppa Codes", Inform. Contr., **27**, pp. 87-99 (1975)

さいとう まさみと
齊藤 実 昭和 52 年、山梨大学工学部電子工学科卒業。同年、NTT 電気通信研究所に入所。以来、磁気バブルメモリー、光ディスクメモリー等の各種記憶装置の高信頼化技術の研究に従事。現在、同社電子応用研究所主任研究員。