正会員 松 永 浩 之[†],岡 田 正 之^{††},浦 浜 喜 一^{†††}

Gradient Algorithms for Fuzzy Hough Transform

Hiroyuki Matsunaga[†], Masayuki Okada^{††} and Kiichi Urahama^{†††}

あらまし テンプレートマッチングを最適化問題として定式化して、ハフ変換のテンプレートマッチングやロバスト回帰との等価性を示す。また、ファジイハフ変換におけるメンバーシップ関数をこの定式化から導出し、データ点とテンプレートとの距離が解析的には表せない場合の勾配法によるファジイハフ変換アルゴリズムを導く。

1. ま え が き

ハフ変換がテンプレートマッチングと等価であることは周知である¹⁾。また別の観点として、ハフ変換がロバスト回帰の1種とも見れることも知られている²⁾。本報告ではテンプレートマッチングの最適化問題としての定式化に基づいて、これらの等価性を統一的に導く。また、これまで経験的に設定されていたファジイハフ変換³⁾のメンバーシップ関数をこの定式化から導く。ファジイハフ変換のこの最適化問題による定式化のひとつの応用例として、テンプレートが高次の関数で表される場合のように、データ点とテンプレートとの距離が解析的には表せない場合の勾配法によるファジイハフ変換アルゴリズムを導いて、簡単な実験によりこのアルゴリズムの有効性を検証する。

2. 可変型テンプレートマッチング

データとして m 個の点 d_i ($i = 1, \dots, m$) が与えられるとする。この点パターンから n 個のテンプレートを抽出する。テンプレートのパラメータを

p_j ($j = 1, \dots, n$) とする。例えばテンプレートが直線 $y = ax + b$ である場合には $p_j = (a_j, b_j)$ である。点 d_i と第 j テンプレートとの距離を $D(d_i, p_j)$ と記す。このように定義するとテンプレートマッチングは

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} D(d_i, p_j) \\ \text{subj.to} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, m) \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (1)$$

という混合整数計画問題として定式化される。バイナリ変数 x_{ij} は点 d_i が第 j テンプレートに属すメンバーシップを表す。(1) 式で最適化すべき変数は x_{ij} と p_j である。(1) 式は可変形 (deformable) テンプレートマッチングと呼ばれ、近似最適解を求めるニューラルネットワークアルゴリズムが提案されている⁴⁾。似た解法として、ホップフィールドネットワークによる方法も試みられている⁵⁾。しかし (1) 式では各 d_i は必ずどれか1つのテンプレートに属することになるので、テン

キーワード：ハフ変換，ファジイハフ変換，テンプレートマッチング，ロバスト回帰

1996年5月7日受付，1996年5月31日再受付

[†] 株式会社富士通九州システムエンジニアリング (〒814 福岡市早良区百道浜 2-2-1, TEL 092-852-3130)

^{††} 北九州職業能力開発短期大学校 情報技術科 (〒803 北九州市小倉南区志井 1665-1, TEL 093-963-0125)

^{†††} 九州芸術工科大学 画像設計学科 (〒815 福岡市南区塩原 4-9-1, TEL 092-553-4510)

[†] Fujitsu Kyushu System Engineering (2-2-1, Momotihama, Sawara-ku, Fukuoka-shi, Fukuoka 812, Japan)

^{††} Kitakyushu Polytechnic College (1665-1, Shii, Kokuraminami-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka 803, Japan)

^{†††} Kyushu Institute of Design (4-9-1, Siobaru, Mianmi-ku, Fukuoka-shi, Fukuoka 815, Japan)

プレートから大きく外れたノイズデータがあると抽出されるテンプレートが正しい位置からずれてしまう。この問題点を解消して外れデータ (outliers) に対してロバストにするには (1) 式を

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} D(d_i, p_j) + \alpha \sum_{i=1}^m x_{i,n+1} \\ \text{subj.to} \quad & \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, m) \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (2)$$

と変更すればよい。こうすれば、どのテンプレートからも距離 α 以上離れているような外れデータでは $x_{ij} = 0$ ($j = 1, \dots, n$), $x_{i,n+1} = 1$ となり、そのような外れデータは無視される。同様なロバスト化はクラスタリングでも使われており⁶⁾, (2) 式はその一般化になっている (テンプレートが代表点である場合が通常のクラスタリングである)。

この方法では抽出するテンプレートの数 n をあらかじめ設定しなければならないが、この設定は一般には困難である。そこでいっそのこと $n = 1$ としてみる。すなわちテンプレート図形を 1 個抽出する場合を考える。すると (2) 式は

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m x_i D(d_i, p) + \alpha \sum_{i=1}^m (1 - x_i) \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (3)$$

となり、定数項は取り除いてよいので結局

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m [D(d_i, p) - \alpha] x_i \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (4)$$

となる。(3) 式はマルコフランダム場による画像復元で使われるラインプロセスと同じ形の式であり、この形の最適化問題がロバスト推定の一形態である M 推定と等価であることが知られている⁷⁾。(4) 式の解 x_i は

$$x_i = \begin{cases} 1 & D(d_i, p) \leq \alpha \\ 0 & D(d_i, p) > \alpha \end{cases} \quad (5)$$

となる。距離 $D(d_i, p)$ の取り方はいろいろあるが、特殊な場合として

$$D(d_i, p) = \begin{cases} 0 & D_E(d_i, p) \leq \alpha \\ D_E(d_i, p) & D_E(d_i, p) > \alpha \end{cases} \quad (6)$$

というのを考える。ここで $D_E(d_i, p)$ は d_i とテンプレートとのユークリッド距離である。 $D(d_i, p)$ がこの

ような距離であるときには (4) 式は

$$\min -\alpha \sum_{i=1}^m x_i \quad (7)$$

すなわち

$$\max \sum_{i=1}^m x_i \quad (8)$$

となり、(5) 式は

$$x_i = \begin{cases} 1 & D_E(d_i, p) \leq \alpha \\ 0 & D_E(d_i, p) > \alpha \end{cases} \quad (9)$$

となる。すなわちパラメータ p の空間で (9) 式に従って x_i を算出すれば、その累積値 $\sum x_i$ が最大になる p がテンプレートの位置を与えることになる。これはロバストハフ変換法の一形態である⁸⁾。 $\alpha \downarrow 0$ の極限が狭い意味のハフ変換すなわちラドン変換になる⁹⁾。

以上により、ハフ変換がテンプレートマッチングやロバスト回帰と等価であることが最適化問題による定式化から導かれた。なお、テンプレートにマッチするパターンが複数個あるときには、それぞれに対応する p で $\sum x_i$ が極大になるから、以上の方法で複数個のテンプレートパターンを抽出できる。これはロバスト回帰の性質すなわち各パターンにとって他のパターンはすべて外れデータになることによる。

3. ファジイハフ変換

以上の方法すなわちハフ変換は x_i が 0 か 1 の整数値であるのでデジタルアルゴリズムであり、コンピュータで効率的に実行できるが、テンプレートのパラメータの数が増えると計算量が増加し、また量子化誤差などの問題がある¹⁰⁾。このような問題に対処する 1 方法としてファジイハフ変換が提案されている³⁾。前節のテンプレートマッチング法をファジイ化するには x_i が取る値を実数値 $[0, 1]$ として (4) 式を

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m [D(d_i, p) - \alpha] x_i + \sum_{i=1}^m \phi(x_i) \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \end{aligned} \quad (10)$$

とする。関数 $\phi(x_i)$ に対する条件について考える。(10) 式の解 x_i は

$$D(d_i, p) - \alpha + \frac{d\phi}{dx_i} = 0 \quad (11)$$

を満たす。これから $D(d_i, p) - \alpha = -d\phi/dx_i$ となるからこれを (10) 式に代入すると (10) 式は

$$\min \sum_{i=1}^m [\phi(x_i) - x_i \frac{d\phi}{dx_i}] \quad (12)$$

となる. したがって k をある正定数として $\phi(x_i)$ が

$$\phi(x_i) - x_i \frac{d\phi}{dx_i} = -kx_i \quad (13)$$

を満たせば (10) 式は (8) 式すなわちハフ変換と同じになる. ただしこの場合 x_i は実数値を取るのでファジイハフ変換になる. 逆に (10) 式がハフ変換をファジイ化したものになるためには $\phi(x_i)$ は (13) 式を満たさなければならない. (13) 式の解は

$$\phi(x_i) = kx_i(\ln x_i - 1) \quad (14)$$

となる. $\phi(x_i)$ が (14) 式のと看 (10) 式の解 x_i は (11) 式から

$$x_i = e^{\frac{\alpha - D(d_i, p)}{k}} \quad (15)$$

となり, 特に $\alpha \downarrow 0$ のとき $x_i = \exp(-D(d_i, p)/k)$ となり, これを (8) 式に代入するとファジイハフ変換は

$$\max \sum_{i=1}^m e^{\frac{-D(d_i, p)}{k}} \quad (16)$$

となる. これはすでに提案されているファジイハフ変換の式のひとつに一致する³⁾. ファジイハフ変換のメンバーシップ関数 $e^{-D(d_i, p)/k}$ は従来経験的に設定されていたが, ここの導出によりひとつの理論的な根拠が与えられたことになる. すなわち (10) 式はファジイハフ変換の原型となる式であり, ファジイハフ変換の理論的基礎だけでなく, より一般的な状況やアルゴリズムを扱うときの基本式となる. そのような応用の一例として, テンプレートが直線や円といった簡単なものでなく高次の関数で表される場合のように, データ点とテンプレートとの距離が解析的には表せないような場合に対する近似解法を導く. テンプレートの式が $f(e, p) = 0$ であるとする. e は空間座標であり, p はパラメータである. 例えば 2 次元空間内の直線のときには $e = (e_x, e_y)$, $p = (a, b, c)$ として $f(e, p) = ae_x + be_y + c$ である. このときテンプレートマッチングは (10) 式の一般形として

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m x_i \|d_i - e_i\|^2 + k \sum_{i=1}^m x_i (\ln x_i - 1) \\ \text{subj.to} \quad & f(e_i, p) = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \end{aligned} \quad (17)$$

と表せる. ただし α は 0 とした. (17) 式で最適化すべ

き変数は e_i, x_i および p である. (17) 式から直ちに分かるように e_i の最適解は d_i に最も近いテンプレート上の点となる. (17) 式の解はラグランジュ関数

$$\begin{aligned} L = & \sum_{i=1}^m x_i \|d_i - e_i\|^2 + k \sum_{i=1}^m x_i (\ln x_i - 1) \\ & + \sum_{i=1}^m \lambda_i f(e_i, p) \end{aligned} \quad (18)$$

の鞍点, すなわち

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \|d_i - e_i\|^2 + k \ln x_i = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial e_i} = 2x_i(e_i - d_i) + \lambda_i \frac{\partial f}{\partial e_i}(e_i, p) = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = f(e_i, p) = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial f}{\partial p}(e_i, p) = 0 \quad (22)$$

の解である. この 4 つの式を連立させて解けば解が得られるが, 変数の数が多いので p 以外の変数を消去しよう. そのために (20) 式を

$$2x_i(e_i - d_i) + \lambda_i \frac{\partial f}{\partial e_i}(d_i, p) = 0 \quad (23)$$

と近似する. 次に (21) 式をテーラー展開すると

$$f(d_i, p) + (e_i - d_i)^T \frac{\partial f}{\partial e_i}(d_i, p) = 0 \quad (24)$$

となる. (23) 式に $\partial f / \partial e_i(d_i, p)$ をかけると

$$2x_i(e_i - d_i)^T \frac{\partial f}{\partial e_i}(d_i, p) + \lambda_i \left\| \frac{\partial f}{\partial e_i}(d_i, p) \right\|^2 = 0 \quad (25)$$

となる. (24) 式と (25) 式とから λ_i が

$$\lambda_i = \frac{2x_i f(d_i, p)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial e_i}(d_i, p) \right\|^2} \quad (26)$$

と得られる. (26) 式を (23) 式に代入して $e_i - d_i$ を求めて, そのノルムをとると

$$\|e_i - d_i\|^2 = \frac{f^2(d_i, p)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial e_i}(d_i, p) \right\|^2} \quad (27)$$

となる. 次に (19) 式から

$$x_i = e^{\frac{-\|e_i - d_i\|^2}{k}} \quad (28)$$

となり, これに (27) 式を代入したものを (26) 式に代入し, さらにその (26) 式を (22) 式に代入すると (22) 式は

$$\sum_{i=1}^m \frac{f(d_i, p) \frac{\partial f}{\partial p}(d_i, p)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial e_i}(d_i, p) \right\|^2} e^{\frac{-f^2(d_i, p)}{k \left\| \frac{\partial f}{\partial e_i}(d_i, p) \right\|^2}} = 0 \quad (29)$$

図1 データ例
Example of data.

図2 不適切な k の値での結果
Parabolas extracted with inappropriate values of k .

となり p だけに関する式となる。この解は勾配法

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial p} \quad (30)$$

で求まる ($\partial L/\partial p$ は (29) 式の左辺である)。すなわち p の適当な初期値から出発して (30) 式の軌道が収束した値として1つの解が得られる。このとき解は一般に複数個あるから初期値に最も近い解に収束する。

例題として図1左のような点パターンから放物線

$$f(e, p) = ae_x + be_x^2 + e_y + c = 0 \quad (31)$$

を抽出してみた。いろいろな初期値から出発して (30) 式をシミュレーションしてみたところ、どのような初期値から出発しても図1右に示す2つの放物線のどちらかに収束した。 k の値は 0.1 とした。 k の値は適当な範囲内になければならない。小さすぎると局所最適解につかまり、図2(a)のように正解に行かず、逆に大きすぎるとノイズデータの影響を受けるようになり、やはり図2(b)のように正解からずれる。

4. む す び

ハフ変換を混合整数計画問題によって定式化した。この定式化は、各データ点がテンプレートに属す割合を表す局所的な変数 x_i とテンプレートの大局的な布置を表すパラメータ p との互いの相互作用を記述している。すなわち p が与えられれば x_i は各データ点で個別に計算され、 x_i がすべて与えられればその累積に

よって p が決まる。このような x_i と p の逐次更新による解法は EM アルゴリズム¹¹⁾の一種であり、ハフ変換と統計論との接点ともなる。また、最適化問題の目的関数にエントロピーに似た関数を付け加えることによりファジイハフ変換が得られることも示した。この付加関数の係数 k を固定したものがファジイハフ変換であるが、適当に大きな値から k を徐々に減少させながら解を追跡すればハフ変換の大域最適解を得ることができる。これはニューラルネットによる最適化で用いられる決定論的アニーリング¹²⁾と同じ手法であり、非凸な最適化問題であるハフ変換の大域近似解法となる。ここで導出したファジイハフ変換の勾配解法は、テンプレートのパラメータ数が多い場合に全空間探索のハフ変換に代わる解法として、あるいはまず最初に粗い分割のハフ変換で近似値を求めた後、本勾配法で精度を高めるといった使用法などが考えられる。いろいろな画像で本方法の実用性を検証するのが今後の課題である。

〔参 考 文 献〕

- 1) G.C. Stockman and A.K. Agrawala: "Equivalence of Hough curve detection to template matching", Comm. ACM, **20**, pp.820-822 (1977)
- 2) G. Roth and M.D. Levine: "Extracting geometric primitives", CVGIP: Image Understanding, **58**, pp.1-22 (1993)
- 3) J.H. Han, L.T. Koczy and T. Poston: "Fuzzy Hough transform", Patt. Recog. Lett., **15**, pp.649-658 (1994)
- 4) M. Ohlsson, C. Peterson and A.L. Yuille: "Track finding with deformable templates-the elastic arms approach", Comput. Phys. Comm., pp.77-98 (1992)
- 5) B. Kamgar-Parsi and B. Kamgar-Parsi: "Simultaneous fitting of several planes to point sets using neural networks", Comput. Vision Graph. Image Process., **52**, pp.341-359 (1990)
- 6) K. Urahama and Y. Furukawa: "Gradient descent learning of nearest neighbor classifiers with outlier rejection", Patt. Recog., **28**, pp.761-768 (1995)
- 7) S.Z. Li: "Markov Random Field Modeling in Computer Vision", Springer-Verlag (1995)
- 8) S.D. Shapiro: "Generalization of the Hough transform for curve detection in noisy digital images", 4th IJCPR, pp.710-714 (1978)
- 9) S.R. Deans: "Hough transform from the Radon transform", IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell., **PAMI-3**, pp.185-188 (1981)
- 10) J. Illingworth and J. Kittler: "A survey of the Hough transform", Comput. Vision Graph. Image Process., **44**, pp.87-116 (1988)
- 11) A.L. Yuille, P. Stolorz and J. Utans: "Statistical physics, mixtures of distributions, and the EM algorithm", Neural Comp., **6**, pp.334-340 (1994)
- 12) K. Urahama: "Analog method for solving combinatorial optimization problems", IEICE Trans. Fund., **E77-A**, pp.302-308 (1994)

まつなが ひろゆき

松永 浩之 1985年，九州芸工大学芸術工学部画像設計卒業。1987年，同大学院修士課程修了。同年，(株)富士通九州システムエンジニアリング入社。1995年，九州芸工大大学院修士課程在学中。ニューラルネット，画像処理を研究。正会員。

おかだ まさゆき

岡田 正之 1981年，東海大学工学部光学工学科卒業。1987年，雇用促進事業団入団。1996年，九州芸工大研究生。画像処理を研究。

うらはま きいち

浦浜 喜一 1976年，九州大学工学部電子工学科卒業。1981年，同大学院修士課程修了。同年同大学情報助手。1989年，九州工業大学情報工学部電子情報助教授。1995年，九州芸術工科大学画像設計学科教授。ニューラルネット，画像処理を研究。