16. インポートランス方程式の物理的意味

大塚 益比古*

Physical Meaning of the Importance Equation

By M. OTSUKA

Since the importance function has the clear meaning in the reactor theory, the importance equation should also have a certain physical meaning. In the present paper the importance equation and its boundary condition in the diffusion approximation are examined, and it is shown that the equation and the boundary condition are based on the same physical approximation as the original reactor equation, to which the importance equation is adjoint.

まえがき

インポートランス (Importance) の従う方程式は数学的には原子炉方程式の随伴方程式であり、インポートランスは随伴関数である。物理的にはそれは定常状態にある原子炉中のある場所におかれた中性子が自分自身とその子孫のすべてによって連鎖反応に寄与する程度 (相対的価値) を示す量である。してみればインポートランス方程式もまた明瞭な物理的意味をもっているべきである。Boltzmann 方程式型 (輸送方程式) の随伴方程式に対してはすでに明快な論文⁽¹⁾があるが、ここでは拡散型のものについて考察した。また境界条件に対しても考察を行なった。

I. インポートランス方程式の誘導

原子炉方程式として拡散型のものを取り、定常状態で

$$D \Delta \phi(\mathbf{x}) - \Sigma_a(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) + \iiint K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') k \Sigma_a(\mathbf{x}') \phi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = 0 \quad (1)$$

とする。ただし $\phi(\mathbf{x})$ は熱中性子束、 $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ は減速積分核であり、 D は空間的に一定としている。

$t=0$ で点 $\mathbf{x}_0$ にあった 1 個の熱中性子に注目するとその空間移動を支配する方程式は、したがって

$$D_0 \Delta n(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial n(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (2)$$

$$D_0 = Dv \quad (3)$$

$$n(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (4)$$

である。吸収の過程は無視した。

この解はただちにえられて

$$n(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{3/2}} e^{-|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 / 4D_0 t} \quad (5)$$

となり、存在確率は点 $\mathbf{x}_0$ を中心にした Gauss 分布をとる。 $t=0$ において $\phi^*(\mathbf{x}_0)$ なるインポートランスをもっていた中性子は、この空間移動によって、時刻 t においてもつインポートランスは

$$\iiint \phi^*(\mathbf{x}) n(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (6)$$

となる。 t が十分小さく $t = \delta t$ とおけば、 $n(\mathbf{x}, \delta t)$ は $\mathbf{x}_0$ の近くでしか値をもたないから、 $\phi^*(\mathbf{x})$ を点 $\mathbf{x}_0$ で Taylor 展開し、展開の第 3 項までにとどめれば、

$$\begin{aligned} & \iiint \phi^*(\mathbf{x}) n(\mathbf{x}, \delta t) d\mathbf{x} \\ &= \iiint \left[\phi^*(\mathbf{x}_0) + \sum_i (x_i - x_{0i}) \frac{\partial \phi^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) \frac{\partial^2 \phi^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \right] \\ & \quad \cdot \frac{1}{(4\pi D_0 \delta t)^{3/2}} e^{-|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 / 4D_0 \delta t} d\mathbf{x} \\ &= \phi^*(\mathbf{x}_0) + D_0 \delta t \cdot \Delta \phi^*(\mathbf{x}_0) + \dots \quad (7) \end{aligned}$$

となる。省略した項は δt に関して 2 次以上である。

さて同じ δt 時間中の吸収について考えると、 $v\delta t / \lambda_a(\mathbf{x}_0) = \Sigma_a(\mathbf{x}_0) v\delta t$ の確率で中性子が消失しているから、そのために

$$-\phi^*(\mathbf{x}_0) \Sigma_a(\mathbf{x}_0) v\delta t \quad (8)$$

だけのインポートランスの減少がある。けれども核分裂

* 電源開発株式会社 (Electric Power Development Co.)

によって同じ δt 中に $k \sum_a(x_0) v \delta t$ 個の分裂中性子が生み出され、やがて $K(x, x_0)$ の確率で点 x において熱中性子となり、その熱中性子は $\phi^*(x)$ なるインポートランスをもつ。したがってこのインポートランスの総量は

$$k \sum_a(x_0) v \delta t \iiint \phi^*(x) K(x, x_0) dx \quad (9)$$

となる。

まえがきに述べたインポートランスのもつ物理的内容から考えて、この量は時間的に保存しなければならない。すなわち $t=0$ においてもっていた値と、 $t=\delta t$ における値すなわち (7), (8), (9) 式の和は等しくなければならない。

$$\begin{aligned} \phi^*(x_0) &= \phi^*(x_0) + D_0 \delta t \cdot \Delta \phi^*(x_0) \\ &\quad - \sum_a(x_0) v \delta t \phi^*(x_0) \\ &\quad + k \sum_a(x_0) v \delta t \iiint K(x, x_0) \phi^*(x) dx \end{aligned} \quad (10)$$

この方程式から共通の項を消去し、両辺を $v \delta t$ で割り、 x_0 を x とあらためれば

$$\begin{aligned} D \Delta \phi^*(x) - \sum_a(x) \phi^*(x) \\ + k \sum_a(x) \iiint K(x', x) \phi^*(x') dx' = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

となる。これは (1) 式の随伴方程式にはかならない。こうしてインポートランス方程式はインポートランスの保存則にはかならないことが示された。

多数組近似の場合も同様にインポートランス保存則を意味している。二組近似を例にとれば、随伴方程式は

$$\begin{aligned} D_1 \Delta \phi_1^* - \sum_1 \phi_1^* + \sum_1 \phi_2^* &= 0 \\ D_2 \Delta \phi_2^* - \sum_2 \phi_2^* + k \sum_2 \phi_1^* &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

である。添え字 1 は速い中性子の組、2 は熱中性子の組を示す。(1) 式に $v_1 \delta t$ を乗ずれば、第 1 項は δt 間の空間移動によって生ずるインポートランスの変化量のである。同じ δt 中に減速によって $\sum_1 v_1 \delta t$ の割合いで速い中性子は消失するが、その結果は ϕ_2^* なるインポートランスをもつ熱中性子の誕生になるから、この間の正味の変化は $\sum_1 v_1 \delta t (\phi_2^* - \phi_1^*)$ となる。これが第 2 項と第 3 項に相当する。(12) 式の第 2 式についても同様に解釈される。

II. 境界条件の誘導

Boltzmann 型のインポートランス方程式の場合の境界条件はほとんど自明であるが、拡散型の方程式の場合

はそうではない。もちろん数学的には随伴函数のもつべき性質からただちに境界条件がえられる。すなわち中性子束に対する境界条件が、自由表面で (外挿表面上で) $\phi=0$ 、2 媒質間の境界で ϕ と $D \partial \phi / \partial \nu$ が連続である ($\partial / \partial \nu$ は境界面の法線方向の微分) ならば、随伴函数 ϕ^* に対しても

$$\begin{aligned} \text{自由表面 (外挿表面) で} \quad \phi^* &= 0 \\ \text{2 媒質間の境界で} \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi^* \text{ 連続} \\ D \frac{\partial \phi^*}{\partial \nu} \text{ 連続} \end{array} \right. & \quad (13) \end{aligned}$$

となるべきことはたやすく示すことができる。ここではこれらの条件を物理的に導きたい。

もっとも簡単な条件からふれることにする。

1. 自由表面、 $\phi^*=0$

中性子束を外挿表面で 0 とする手続きはよく知られているように物理的手続きではない。そのためインポートランスに対しても $\phi^*=0$ を物理的手続きから求めることはできない。しいていえば、(外挿) 表面上におかれた中性子はある抽象的手続きによって必ず消されるのであるから、したがってインポートランスは 0 であるということになる。

2. 2 媒質の境界面で ϕ^* が連続

境界をはさんで十分近い 2 点を考え、その距離を無限に接近させれば、その 2 点におかれた中性子は全く同等になる。したがってインポートランスもまた同等でなければならない。

3. 2 媒質の境界面で $D \partial \phi^* / \partial \nu$ が連続

境界が平面であるとし、 $t=0$ において境界面上に単位面積当たり 1 個のわりで中性子が存在したとする。その後の挙動は (2), (3), (4) 式を一次元化した方程式で与えられ、解はすぐにえられる。すなわち

$$\begin{aligned} n(x, t) &= \frac{A}{(4\pi D_A t)^{1/2}} e^{-x^2/4D_A t} \quad (x < 0) \\ &\quad + \frac{B}{(4\pi D_B t)^{1/2}} e^{-x^2/4D_B t} \quad (x > 0) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= 2 / (1 + (D_B/D_A)^{1/2}) \\ B &= 2 / (1 + (D_A/D_B)^{1/2}) \\ A/B &= (D_A/D_B)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となる。ただし、境界面を原点にとり垂直に x 軸をとって、 $x < 0$ を A 媒質、 $x > 0$ を B 媒質とした。 D_A と D_B は各媒質のもつ D_0 ((3) 式) である。定数 A および B は、 $x=0$ における $n(0, t)$ の連続性と、規格化条件 $\int n(x, t) dx = 1$ からきまる。

$t=0$ において $\phi^*(0)$ なるインポートランスをもっていた中性子は、したがって $t=\delta t$ においては

$$\int \phi^*(x) n(x, \delta t) dx \quad (16)$$

をもつこととなり、インポータンスの保存則により両者は相等しい。(14)式を用い、前節と同様に δt が小さいとして、 $\phi^*(x)$ を Taylor 展開して高次の項を無視すれば

$$\begin{aligned} \phi^*(0) &= \int_{-\infty}^0 \left[\phi^*(0-) + x \frac{d\phi^*(0-)}{dx} + \dots \right] \\ &\quad \cdot \frac{A}{(4\pi D_A \delta t)^{1/2}} e^{-x^2/4D_A \delta t} dx \\ &+ \int_0^{\infty} \left[\phi^*(0+) + x \frac{d\phi^*(0+)}{dx} + \dots \right] \\ &\quad \cdot \frac{B}{(4\pi D_B \delta t)^{1/2}} e^{-x^2/4D_B \delta t} dx \\ &= \frac{A}{2} \phi^*(0-) - \frac{A}{2} \left(\frac{4D_A \delta t}{\pi} \right)^{1/2} \frac{d\phi^*(0-)}{dx} + \dots \\ &+ \frac{B}{2} \phi^*(0+) + \frac{B}{2} \left(\frac{4D_B \delta t}{\pi} \right)^{1/2} \frac{d\phi^*(0+)}{dx} + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

となる。前項に述べた $\phi^*(0-) = \phi^*(0+) = \phi^*(0)$ という境界条件を用い、(15)式で与えた A, B の関係式を用いれば

$$D_A \frac{d\phi^*(0-)}{dx} = D_B \frac{d\phi^*(0+)}{dx} \quad (18)$$

をうる。これが(13)式にあげた $D \partial \phi^* / \partial x$ が連続の条件にほかならない。

II. む す び

中性子が自由表面の近くや、2媒質の境界、中性子源の近くでは Fick の法則に従う拡散を行なわないことはすでに詳しく解析されているので⁽²⁾、その意味では(5)式や(14)式の中性子密度分布は正確なものではない。けれども拡散型の原子炉方程式を採用した以上は、中性子束はいたるところで Fick の法則に従う拡散を行なうと仮定したことになる。その結果として、インポータンスの保存則から自動的にインポータンス方程式と境界条件を導くことができることを示したのであって、いいかえれば、中性子束の方程式とインポータンス方程式およびその境界条件が物理的に同じ近似の上に立っていることを明らかにしたといえる。

(1959年 6月29日 受理)

— 参 考 文 献 —

- (1) L. N. USSACHOFF : *Proceedings of the International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, 5, 503 (1955).
- (2) B. DAVISON : "*Neutron Transport Theory*", (1957), Oxford Univ. Press.