27. 中性子減速過程の積分方程式について

中山 隆*, 磯田 和男*

On the Integral Equation of the Slowing-down of Neutrons

By T. NAKAYAMA and K. ISODA

For the study of asymptotic properties of the Placzek Function, it seems reasonable that the application of the renewal theory, which has been developed by Feller and others, is useful. In this report, the slowing-down process of neutrons in an infinite homogeneous medium is analyzed by the use of the results of the renewal theory. Though more detail investigations are needed, we believe that this mathematical model is one of the efficient methods.

緒 言

従来 Placzek⁽¹⁾, Marshak⁽²⁾ らが取扱ってきた中性子減速の理論は数学的厳密さと統一性に欠けるところが多いと考えられる。これらの欠点をうめるため、本報では再生積分方程式の理論を用いて、一般的モデルから二、三の結果を導きうることを示す。たとえば中性子の散乱が重心系において、球対称、すなわち等方的であるという仮定はある場合にはゆるめることができる。ここでえられた結果は新しい結果ではないが、それを導く方法の厳密性と一般化を目標にしている。

I. 中性子減速に関する積分方程式の解の漸近的性質

1. 捕獲のない場合

無限に一樣な媒質の中で単一エネルギー源があり、質量数 A の減速材原子に中性子が衝突するときに、重心系で等方散乱を仮定して1回の衝突で E_0 と αE_0 の間に一樣にエネルギーが分布する。ここに $\alpha = \{(A-1)/(A+1)\}^2$ である。

$x = E_0/E_1$ とし、 $K(x)(dx/x)$ を $\log x$ と $\log x + d\log x$ の間にある区間において、中性子がうける衝突の平均回数をあらわすとすれば、考える積分方程式は

$$K(x) = k(x, 1) + \int_1^x K(x') k(x, x') dx'/x' \quad (1)^{(1)}$$

ここで $k(x, x') dx/x'$ は衝突前のエネルギーを E_0/x' とするときに、衝突後 x と $x+dx$ の間のエネルギーにおちる確率をあらわす。 $k(x, x')$ の形は

$$k(x, x') = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \frac{x'}{x} & \alpha x < x' < x \\ 0 & x' / \alpha < x, x' > x \end{cases}$$

それゆえに(1)式は次のようになる。

$$K(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x} \left\{ 1 + \int_1^x K(x') dx' \right\} \quad 1 < x < \frac{1}{\alpha} \quad (2)$$

$$K(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x} \int_{\alpha x}^x K(x') dx' \quad x > \frac{1}{\alpha}$$

ここでは変数として、レサジー u をとって(3)式を変形し、また衝突密度を $F(u)$ であらわすことにして次式をうる。

$$F(u) = g(u) + \int_0^u F(u-s) f(s) ds \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } f(u) = g(u) &= \frac{1}{1-\alpha} e^{-u} \quad (0 \leq u \leq q) \\ &= 0 \quad (u > q, u < 0) \end{aligned}$$

$$F(u) = (\Sigma_a + \Sigma_s) \phi(u) \quad q = \log \frac{1}{\alpha}$$

確率密度関数 $f(u)$ であらわされる確率変数の平均値は ξ となる。すなわち簡単な計算によって

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u f(u) du &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^q u e^{-u} du \\ &= 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \log \alpha \\ &= \xi \quad (1 \text{ 衝突当りのエネルギー対数の平均減少}) \end{aligned}$$

(3)式は $u=0$ に単一エネルギー源のある場合の式であるが、中性子源が $S(u)$ なる分布をしている場合、(3)式は

$$F(u) = \int_0^u S(u') g(u-u') du' + \int_0^u F(u-s) f(s) ds \quad (3')$$

* 日本原子力研究所 原子炉開発部 (Japan Atomic Energy Res. Inst., Reactor Development Div.)

となる。(g(u)は減速核であるから)

前の単一エネルギー源の場合の(3)式の解を $P_A(u)$ とすれば Laplace 積分を用いて(3')式の解は

$$\begin{aligned} L\{F\} &= \int_0^\infty e^{-pu} F(u) du \text{ とあわせて} \\ L\{F\} &= \frac{L\{S\} \cdot L\{g\}}{1 - L\{f\}} = L\{S\} L\{P_A\} \\ \therefore F(u) &= \int_0^\infty S(u') P_A(u-u') du' \quad (4) \end{aligned}$$

さらに(3)式の $g(u)$ の項が $S_1(u)$ と $S_2(u)$ の2項の和からなるとき

$$F(u) - \int_0^u F(u-s) f(s) ds = S_1(u) + S_2(u)$$

の場合の解は、それぞれ右辺が $S_1(u)$ のみの場合の解 $F_1(u)$ と $S_2(u)$ のみの場合の解 $F_2(u)$ の和であることも方程式の線形なことから明らかであろう。

捕獲のある場合は(3)式に対応して

$$F(u) = g(u) + \int_0^u b(u-s) F(u-s) f(s) ds \quad (5)$$

なる形の積分方程式となる。

$$\text{ここに } b(u) = \frac{\sum s(u)}{\sum a(u) + \sum s(u)}$$

次に減速密度 $q(u)$ に対する積分方程式は捕獲のある場合は(捕獲のない場合 $b(u) \equiv 1$)

$$q(u) = g_1(u) + \int_0^u b(u-s) F(u-s) f_1(s) ds \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } g_1(u) &= f_1(u) = \int_u^\infty f(t) dt \\ &= \frac{1}{1-\alpha} e^{-u} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad (0 \leq u \leq q) \\ &= 0 \quad (u > q, u < 0) \end{aligned}$$

となる。

方程式(3)の解 $F(u)$ すなわち衝突密度の漸近的性質はよく知られているように、

$$\lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = \frac{1}{\xi} \quad (7)$$

となるが、このことは次の再生積分方程式の定理の系として導けることを示そう。

〔定理1〕⁽³⁾

積分方程式

$$x(t) - \int_0^\infty x(t-s) dF(s) = g(t) \quad (8)$$

において((8)式の $F(s)$ は前の $F(u)$ とは異なり、確率分布をあらわす)

仮定として

$$(1) \int_0^\infty dF(t) = 1 \quad F(t) \text{ は非減少}$$

$$(2) \int_0^\infty |g(t)| dt < \infty \quad g(t) \text{ は有界}$$

(3) $F(t)$ は格子型の分布ではない。

$$(4) \int_0^\infty |t| dF(t) < \infty, \int_0^\infty t dF(t) = m > 0$$

このとき(8)式に2つの有界な解があれば、それらは定数しか違わない。

もし $x(t)$ が(8)式の解で $F=F_1+F_2$, F_1 は絶対連続, F_2 の全変分は1より小とする。

このとき、 $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ とすると $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ が存在する。

そして、 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ ならば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \phi_0(g_1)/m$$

$$\text{ここに } \phi_0(g_1) = \int_0^\infty dg_1(t)$$

$$g_1(t) = \int_0^t g(s) ds \text{ である。}$$

上の定理1を用いれば(3)式において

$$\int_0^\infty g(s) ds = 1, \quad m = \int_0^\infty s f(s) ds = \xi$$

が明らかであるから、

$$\lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = \frac{1}{\xi}$$

が推移確率(減速核)の形に関係なく成立つことがわかる。

2. 捕獲のある場合

次に捕獲のある場合の(5)式を考察してみよう。捕獲は $u \geq u_0 \gg q$ で起こるとする。

積分方程式(5)を変形して

$$\begin{aligned} b(u) F(u) - \int_0^u b(u-s) F(u-s) f(s) ds \\ = g(u) - a(u) F(u) \end{aligned}$$

ここに $a(u) = 1 - b(u) = \sum a(u) / \sum (u)$

かつ十分大なる u に対して $a(u) \equiv 0$ とする。

$b(u) F(u) = F_1(u)$ において

$$F_1(u) - \int_0^u F_1(u-s) f(s) ds = g(u) - a(u) F(u)$$

$g(u) - a(u) F(u) \in L_1(-\infty, \infty)$ であるから定理1を用いて

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} F_1(u) &= F(u)_{\text{asym}} \\ &= \frac{1}{\xi} \left\{ \int_0^q g(t) dt - \int_0^{u_c} a(t) F(t) dt \right\} \end{aligned}$$

ここに u_c は捕獲の終るレサジーである。

$$\therefore \lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = \frac{1}{\xi} \left\{ 1 - \int_0^{u_c} a(u') F(u') du' \right\} \quad (u > u_c) \quad (9)$$

共鳴の幅が q に比較して小さければ(9)式より次式

をうる⁽²⁾。

$$F(u)_{\text{asym}} = \frac{1}{\xi} \left\{ 1 - \frac{1}{\xi} \int_{\text{res}} \frac{\sum a(u')}{\sum (u')} du' \right\} \quad (10)$$

また(5)式の右辺の第1項 $g(u)$ を $S(u)$ でおきかえて

$$F(u) = S(u) + \int_0^u b(u-s) F(u-s) f(s) ds \quad (5a)$$

を考えれば、(9)式と同様に

$$\lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = \frac{1}{\xi} \left\{ S - \int_{u_0}^u a(u') F(u') du' \right\} \quad (9a)$$

となる。ここに $S = \int_0^\infty S(u') du'$

捕獲のある場合の興味ある方法は Weinberg ら⁽⁴⁾の考えを用いて $\sum a\phi$ を負の中性子源とみなして実際の中性子源 $S(u)$ に加えて考察する方法である。 $\sum a\phi$ は $a(u)F(u)$ に等しいから(4)式を用いて

$$F(u) = \int_0^u \{ S(u') - a(u') F(u') \} P_A(u-u') du' \quad (11)$$

ここで、 $\xi P_A(u) = 1 - p_A(u)$ とおいて、あとは Weinberg ら⁽⁴⁾と同様にして

$$F(u) = \frac{1}{\xi} \left\{ S - \int_0^u a(u') F(u') du' \right\} + \frac{1}{\xi} F(u) \xi_1(u) \quad (12)$$

$$F(u) = \frac{S}{\xi - \xi_1(u)} \exp \left(- \int_0^u \frac{a(u'')}{\xi - \xi_1(u'')} du'' \right) \quad (13)$$

$$\text{ただし、} \int_0^u du' a(u') p_A(u-u') \exp \left\{ \int_{u'}^u a(u'') du'' / \xi \right\} = \xi_1(u)$$

(9a) 式によって $\frac{1}{\xi} F(u) \xi_1(u)$ は漸近値からの偏差をあらわすものと解釈できる。

上にえられた式は Weinberg らの結果と形式的には同一であるが、等方散乱という仮定を一般の分布でいっている点と $\xi_1(u)$ の意味が多少異なる。

II. 平均衝突回数

中性子がエネルギー E_0 から出発して熱中性子になるまでの平均衝突回数についての De Marcus の結果⁽⁵⁾は次の再生積分方程式の定理から容易に導きうることを示そう。

〔定理2〕⁽³⁾

$\Phi(x)$ を次の積分方程式の単調な解とする

$$\Phi(x) = Q(x) + \int_0^x \Phi(x-y) dF(y) \quad (14)$$

ここに $\Phi(x)$ は連続であり、 $\phi(0) = 0$ 、 $Q(x)$ は $(0, \infty)$ の上の分布関数で、一次モーメントは有限と

する。また F は格子型でない分布で、0 で連続で有限な二次モーメントをもつとすれば、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\Phi(x) - \frac{1}{m} x + \frac{\mu}{m} - \frac{\alpha_2}{2m^2} \right] = 0 \quad (15)$$

が成立つ。ここに

$$m = \int_0^\infty x dF(x), \quad \alpha_2 = \int_0^\infty x^2 dF(x),$$

$$\mu = \int_0^\infty x dQ(x)$$

いま捕獲のない場合 $C(u) = \int_0^u F(u') du'$ の満足する積分方程式は(3)式より

$$C(u) = G(u) + \int_0^u C(u-s) f(s) ds \quad (16)$$

ここに $G(u) = \int_0^u g(u') du'$ (これは Laplace 積分をとって考えれば明らか)。 $C(u)$ は単調増加で $C(0) = 0$ であるから、定理2を用いて (この場合 $g(u) = f(u)$ であるから $m = \mu$)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(C(u) - \frac{u}{\xi} \right) = \frac{\alpha_2}{2\xi^2} - 1$$

$$\text{すなわち } \frac{u}{\xi} \gg 1 \text{ のときは } C(u) \sim \frac{u}{\xi} + \Gamma(\xi) - 1 \quad (17)$$

$$\text{ここに } \Gamma = \frac{\alpha_2}{2\xi^2} = \frac{1}{\xi^2} \left\{ 1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} q \left(1 + \frac{q}{2} \right) \right\},$$

$$q = \log \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2,$$

それゆえに等方散乱の場合は、 $a/2\xi^2$ が Demarcus⁽⁵⁾の $\Gamma(\xi)$ に等しい。(Demarcus の結果と形式上 $C(u)$ の値に1の差があるのは $C(u)$ の定義のちがいによるものである)。 Γ の値はたとえば $A=1$ のとき1、 $A=12$ のとき0.6858となる⁽⁵⁾。

次にこの $\Gamma(\xi)$ と共鳴をのがれる確率の計算に用いられる γ の値との関係を導こう。

捕獲の変化がゆるやかな場合における共鳴吸収を逃れる確率の計算は⁽⁶⁾次のようになる。

(6)式で $b(u)F(u) = F_s(u)$ において区間 $(u-q, u)$ で $F_s(u')$ を u のところで Taylor 展開してその第2項までとり、

$$F_s(u') = F_s(u) + (u'-u) \frac{dF_s(u)}{du} \quad (18)$$

また(6)式より $u \gg q$ に対して

$$q(u) = \int_{u-q}^u F_s(u') f_1(u-u') du'$$

これに(18)式を代入して

$$q(u) = \int_{u-q}^u F_s(u) f_1(u-u') du' + \int_{u-q}^u (u'-u) f_1(u-u') du' \frac{dF_s(u)}{du} = \xi F_s(u) + c \frac{dF_s(u)}{du}$$

$$\text{ここに } c = -\frac{\alpha_2}{2} = \int_0^q u f_1(u) du \quad (19)$$

c は分布 $f_1(u)$ の第一次モーメント、すなわち分布 $f(u)$ の第二次モーメント α_2 と (19) 式のように結ばれている。これは一般の分布について成立する。後は文献⁽⁶⁾と全く同様に式を導けば

共鳴の吸収をのがれる確率

$$= \exp \left\{ - \int_0^u \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s + \gamma \Sigma_a} du \right\} \quad (20)$$

ここに $\gamma = \frac{\alpha_2}{2\xi}$ となる。

それゆえに平均衝突回数 $\Gamma(\xi)$ とは

$$\gamma = \xi \cdot \Gamma(\xi) \quad (21)$$

なる関係がある。

■. 結 論

中性子の減速過程は1つの確率過程であるから、上に述べたように再生理論のモデルから従来の結果を统一的に導くことが可能なのであろう。本報で論じなか

った減速過程の諸結果の中にも、再生理論の応用で説明されるものがあると思われる。

今後ともさらに減速過程に関する諸結果をあつめて、それが一般理論から説明しうる可能性を検討してゆきたいと思う。

(1959年 9月3日 受理)

— 参 考 文 献 —

- (1) G. PLACZEK : *Phys. Rev.*, **69**, 423 (1946).
- (2) R. E. MARSHAK : *Rev. Mod. Phys.*, **19**, 185 (1947).
- (3) S. KARLIN : *Pacific J. Math.*, **5**, 229~257 (1955).
- (4) A. M. WEINBERG, E. P. WIGNER : *Proceedings of the Brookhaven Conference on Resonance Absorption of Neutrons in Nuclear Reactors*, BNL-433, 125 (1956).
- (5) W. C. DEMARCUS : *Nucl. Sci. Engng.*, **5**, 336~337 (1959).
- (6) S. GLASSTONE, M. C. EDLUND : "Elements of Nuclear Reactor Theory", (1952), Van Nostrand, New York.