34. 熱中性子化の問題に対する変分法の応用

清水 彰 直*

Some Applications of the Variational Method for the Neutron Thermalization Problems

By A. SHIMIZU

Two forms of variational expressions are developed for the neutron energy spectrum and the effective reaction rate and its temperature coefficient in the thermal region with, "Monoatomic Heavy Gas Model".

Using the first form of variational expressions, the author obtains the upper and lower limit of neutron thermal spectrum with the above mentioned model.

Next, the effective thermal cross-section and its temperature coefficient are obtained as an extremum of functional in another form of variational expressions, and the limit of the validity of Neutron Temperature as a parameter expressing the deviation of spectrum from Maxwell distribution is discussed.

緒 言

熱領域で競争する2つの吸収反応の実効的な割合はもしその2つの反応の断面積の比がエネルギーによらないならば、熱中性子スペクトルの形に無関係に一定になる。一般に熱領域における吸収反応は、およそ $1/v$ 法則に従っているので、2つの反応の実効的な割合の温度変化は、専らその2つの反応の断面積の $1/v$ 法則からのずれ方の違いに依存している。したがって温度係数の推定に使う近似熱中性子スペクトルは、断面積が $1/v$ 法則から著しくずれる領域、すなわち熱領域の上限に近い部分を近似よく表わしていなくてはならない。

この論文では“重い単原子ガスモデル”に基づいて変分法を使い、熱中性子スペクトルの上限と下限を求めて、中性子温度というパラメーターでMaxwell分布からの歪みを表わすことの限界を明らかにした。次に汎関数の停留値が実効断面積およびその温度係数になる変分形式を使って、反応断面積の $1/v$ 法則からのずれが、実効値とその温度係数とにどのように寄与するかを調べた。

1. 変分法の応用(1)

重い単原子ガスモデル⁽¹⁾に基づく、単位エネルギー当りの減速密度、 $q(E)$ は

$$q(E) = \xi \Sigma_a \left[(E - kT) \phi + kTE \frac{d\phi}{dE} \right] \quad (1)$$

と表わされ、したがって単位エネルギー当りの中性子束は二階微分方程式

$$\frac{dq}{dE} = \Sigma_a(E) \phi \quad (2)$$

を満たすことになる。ここで $\xi \Sigma_a$ は熱外領域における媒質の減速能、 k はボルツマン定数、 T は絶対温度、 $\Sigma_a(E)$ は媒質の吸収断面積である。

方程式(1)、(2)は自己随伴型の方程式にかき直すことができる。後の計算の便利のため、変数 E を $\varepsilon = E/kT$ に変換すると、自己随伴微分方程式は、

$$\begin{cases} q(\varepsilon) = s(\varepsilon) \frac{d}{d\varepsilon} \psi \\ \frac{dq}{d\varepsilon} = a \psi \end{cases} \quad (3)$$

となる。ここで $\psi(\varepsilon) = \phi(\varepsilon)/M(\varepsilon)$

$$M(\varepsilon) = \varepsilon e^{-\varepsilon} \quad \text{Maxwell 分布}$$

$$s(\varepsilon) = \xi \Sigma_a \varepsilon M(\varepsilon)$$

$$a(\varepsilon) = \Sigma_a(\varepsilon) M(\varepsilon)^*$$

いま汎関数

$$J(\psi) = \frac{\int_0^{\varepsilon_M} [s \psi'^2 + a \psi^2] d\varepsilon}{\psi(\varepsilon_M)^2} \quad (4)$$

ここで ψ' は $d\psi/d\varepsilon$ の略、

ε_M は考えている領域の上限

を考えると、この汎関数は(3)式の解 ψ に対して、停留になることがわかる。さらに $s(\varepsilon)$ も $a(\varepsilon)$ も正なの

* 日本原子力事業(株) (Nippon Atomic Ind. Group Co., Ltd.)

** $\Sigma_a(\varepsilon)$ は $\Sigma_a(E)$ に $E = \varepsilon kT$ を代入したもの。

でこの停留値は最小値であり、また部分積分と境界条件

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ の時 } \sqrt{\varepsilon} \psi(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (5)$$

からこの最小値は $q(\varepsilon_M)/\psi(\varepsilon_M)$ 、すなわち ε_M における減速密度と中性子束との比になることがわかる。

汎函数の最小値が存在する時、最小値問題は相反汎函数の最大値問題に変換することができる⁽²⁾。(4)式に対する、規格化された相反汎函数は

$$U(\varepsilon_M) / \int_0^{\varepsilon_M} \left[\frac{1}{s} U^2 + \frac{1}{a} U'^2 \right] d\varepsilon$$

となるので、結局境界条件(5)を満たす ψ 、および任意の $U(\varepsilon)$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{U(\varepsilon_M)^2}{\int_0^{\varepsilon_M} \left[\frac{1}{s} U^2 + \frac{1}{a} U'^2 \right] d\varepsilon} &\leq \frac{q(\varepsilon_M)}{\psi(\varepsilon_M)} \\ &\leq \frac{\int_0^{\varepsilon_M} [S\psi'^2 + a\psi^2] d\varepsilon}{\psi^2(\varepsilon_M)} \end{aligned} \quad (6)$$

領域の上限 ε_M を動かして考えると、変分表現(6)は任意の ε に対して $q(\varepsilon)/\psi(\varepsilon)$ が精度よく推定されることを示している。いま試験函数として

$$\psi(\varepsilon) = 1^*, \quad U(\varepsilon) = A(\varepsilon) \equiv \int_0^\varepsilon a(\varepsilon') d\varepsilon'$$

を選ぶと、

$$A - \int_0^\varepsilon \frac{A^2}{s} d\varepsilon' < \frac{A^2}{A + \int_0^\varepsilon \frac{A^2}{s} d\varepsilon'} \leq \frac{q(\varepsilon)}{\psi(\varepsilon)} \leq A(\varepsilon)$$

が得られ、上式と(3)式を組合わせると

$$\begin{aligned} \exp \left[\int_0^\varepsilon \frac{A}{s} d\varepsilon' - \int_0^\varepsilon \frac{1}{s} d\varepsilon' \int_0^{\varepsilon'} \frac{A^2}{s} d\varepsilon'' \right] &< \frac{\phi(\varepsilon)}{M(\varepsilon)} \\ &\leq \exp \left[\int_0^\varepsilon \frac{A}{s} d\varepsilon' \right] \end{aligned} \quad (7)$$

が得られる。 $\Sigma_a(\varepsilon)$ が $1/v$ 法則に従う時、(7)式は

$$\begin{aligned} \exp \left[\Delta \cdot Q(\varepsilon) - \Delta^2 \cdot R(\varepsilon) \right] &< \frac{\phi(\varepsilon)}{M(\varepsilon)} \\ &\leq \exp \left[\Delta \cdot Q(\varepsilon) \right] \end{aligned} \quad (7')$$

となる。ここで、

$$\Delta = \frac{\Sigma_a(kT)}{\xi \Sigma_s}, \quad Q(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon dz z^{-2} e^z \int_0^z \sqrt{t} e^{-t} dt$$

$$R(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon dz z^{-2} e^z \int_0^z dt t^{-2} e^t \left\{ \int_0^t \sqrt{\varepsilon'} e^{-\varepsilon'} d\varepsilon' \right\}^2$$

で、 $Q(\varepsilon)$ は Hurwitz らが導いた積分方程式⁽³⁾の一次逐次解に当り、 ε の漸近級数で表わすことができる。

〔付録 I 参照〕

(7')式から $\Delta \ll 1$ の時 Δ^2 以下を無視すると、

$$\begin{aligned} \phi(\varepsilon) &= M(\varepsilon) \cdot \exp[\Delta \cdot Q(\varepsilon)] \\ &\approx M(\varepsilon) + \Delta \cdot H(\varepsilon) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで $H(\varepsilon) = M(\varepsilon) \cdot Q(\varepsilon)$ が得られる。

いまスペクトルの Maxwell 分布からのずれを

$$\frac{\phi(\varepsilon)}{M(\varepsilon)} = \exp \left[\varepsilon \left(1 - \frac{T}{T_n} \right) \right]$$

の形に表わすと(7')式から

$$1 - \Delta \frac{1}{\varepsilon} Q + \Delta^2 \frac{1}{\varepsilon} R(\varepsilon) > \frac{T}{T_n} \geq 1 - \Delta \frac{1}{\varepsilon} Q(\varepsilon) \quad (9)$$

が得られる。特に $\Delta \ll 1$ の時は

$$\frac{T_n}{T} = 1 + \Delta \frac{1}{\varepsilon} Q(\varepsilon) \quad (9')$$

となる。Fig. 1 に示された $Q(\varepsilon)1/\varepsilon$ の形から、中性子温度というエネルギーによらないパラメータでスペクトルの Maxwell 分布からのずれを表わすことは、熱領域の上限に近づくにつれて著しく近似の度合が悪くなることが明らかになるであろう。

Fig. 1 The form of the function $Q(\varepsilon)1/\varepsilon$ in Eq. (9) $\varepsilon = E/kT$

II. 変分法の応用(2)

変分法の利点は精度 ε の近似函数で精度 ε^2 の停留値が求まるところにある。したがって実効断面積やその温度係数を求める場合は、汎函数の停留値が求めるものになるよう定式化の方が望ましい。

いま汎函数

$$J(\chi, \psi) = \frac{\int_0^{\varepsilon_M} [s\chi'\psi' + a\chi\psi] d\varepsilon}{\chi(\varepsilon_M) \int_0^{\varepsilon_M} b(\varepsilon)\psi(\varepsilon) d\varepsilon} \quad (10)$$

* $\phi(\varepsilon) = M(\varepsilon)$

** 部分積分によって

$$R(\varepsilon) = \frac{1}{2} Q^2(\varepsilon) - \int_0^\varepsilon dz z^{-2} e^z \int_0^z \sqrt{t} e^{-t} Q(t) dt$$

と表わせる。右辺の第2項は二次の逐次解に当たっている。

ここで $b(\varepsilon) = \sum_i^i(\varepsilon)M(\varepsilon)$,

$\sum_i^i(E)$ は元素 i の吸収断面積

を考えると、この汎関数は ψ が方程式(3)を、また χ が方程式

$$\frac{d}{d\varepsilon} s \frac{d}{d\varepsilon} \chi = a \chi - \lambda b(\varepsilon),$$

$$\lambda = \frac{\chi(\varepsilon_M) \int_0^{\varepsilon_M} a \chi d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_M} b \psi d\varepsilon} \quad (11)$$

を満足する時停留になり、その停留値は

$$J(\chi, \psi) = \frac{\int_0^{\varepsilon_M} a \bar{\psi} d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_M} b \bar{\psi} d\varepsilon} = \frac{\int_0^{\varepsilon_M} \sum_a(\varepsilon) \phi(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_M} \sum_i^i(\varepsilon) \phi(\varepsilon) d\varepsilon} \quad (12)$$

で与えられ、元素 i の反応の実効的な割合となる。(3)式と(10)式を比較すると $M\chi$ は $\lambda \sum_i^i(\varepsilon)M(\varepsilon)$ なる強さの中性子源がある場合の吸収媒質 {その断面積は $\sum_a(\varepsilon)$ } における熱中性子スペクトルであることがわかる。特に $\sum_i^i(\varepsilon)/\sum_a(\varepsilon)$ がエネルギーによらない時は、 $\chi = 1$ が方程式(10)の解になる。一般の場合 χ の推定はむずかしいが、方程式(10)を汎関数

$$K(\chi) = \frac{\int_0^{\varepsilon} [s\chi'^2 + a\chi^2 - \lambda b\chi] d\varepsilon'}{\chi^2(\varepsilon)} \quad (13)$$

の停留問題に直して、前述の近似スペクトルを得たのと同じ方法で

$$\chi(\varepsilon) \approx \exp \left[\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{s} d\varepsilon' \left\{ \int_0^{\varepsilon'} a(\varepsilon'') d\varepsilon'' - \lambda \int_0^{\varepsilon'} b(\varepsilon'') d\varepsilon'' \right\} \right]$$

が得られる。次に変分表現(10)を使って実効断面積およびその温度係数を求めよう。

II. 熱中性子実効断面積

Westcott に従って熱領域における実効断面積 $\bar{\sigma}$ を

$$\bar{\sigma} = \frac{\int_0^{E_M} \sigma(E) \phi(E) dE}{\int_0^{E_M} \frac{1}{v} \phi(E) dE} \quad (14)$$

と定める。ここで v は中性子の速さ、 $v_0 = 2,200$ m/s, E_M は熱領域の上限で $E \geq E_M$ では媒質の熱運動は無視できるものとする。この定義に従うと $\sigma(E)$ が $1/v$ 法則に従う時はスペクトルの形に無関係に $\bar{\sigma} = \sigma(2,200$ m/s) となる。したがって $\bar{\sigma}$ は $1/v$ 法則からのずれを通してスペクトルに依存していることになる。この点を明らかにするため、いま断面積 $\sigma(E)$ を

$$\sigma(E) = \sigma_0 \sqrt{\frac{E_0}{E}} \left[\gamma_0 + \gamma_1 E + \cdots + \gamma_n E^n + \sigma_R(E) \right] \quad (15)$$

の形に仮定する。ここで E_0 は $2,200$ m/s に対応するエ

ネルギー、 $\sigma_0 = \sigma(E_0)$, $\{\gamma_n\}$ は定数で $\gamma_0 + \gamma_1 E_0 + \cdots + \gamma_n E_0^n + \sigma_R(E_0) = 1$ を満足するものとする。また $\sigma_R(E)$ は熱領域に存在する共鳴レベルを表わす。実際大部分の吸収断面積を(15)式の形に近似することができる。(14), (15)式から

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} = \sum_{n=0}^n \gamma_n \frac{\langle E^n \rangle}{\langle E^0 \rangle} + \frac{\langle \sigma_R \rangle}{\langle E^0 \rangle} \quad (16)$$

が得られる。

$$\text{ここで } \langle E^n \rangle = \int_0^{E_M} \frac{1}{\sqrt{E}} E^n \phi(E) dE$$

$$\langle \sigma_R \rangle = \int_0^{E_M} \frac{1}{\sqrt{E}} \sigma_R(E) \phi(E) dE$$

さらに変数 E を $\varepsilon = E/kT$ に変えると

$$\frac{\langle E^n \rangle}{\langle E^0 \rangle} = (kT)^n \frac{\langle \varepsilon^n \rangle}{\langle \varepsilon^0 \rangle}, \quad \frac{\langle \sigma_R \rangle}{\langle E^0 \rangle} = \frac{\langle \sigma_R(T) \rangle}{\langle \varepsilon^0 \rangle} \quad (17)$$

となる。

$$\text{ここで } \langle \varepsilon^n \rangle = \int_0^{\varepsilon_M} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \varepsilon^n \phi(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$\langle \sigma_R(T) \rangle = \int_0^{\varepsilon_M} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sigma_R(\varepsilon, T) \phi(\varepsilon) d\varepsilon$$

$\varepsilon_M = E_M/kT$, $\sigma_R(\varepsilon, T)$ は $\sigma_R(E)$ に $E = \varepsilon kT$ を代入して得られる函数とする。いま変分表現(10)において $\sum_a(\varepsilon) \propto \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\sum_i^i(\varepsilon) = \varepsilon^n \sum_a(\varepsilon)$ および $\sum_i^i(\varepsilon) = \sigma_R(\varepsilon, T) \sum_a(\varepsilon)$ とすると、停留値はそれぞれ、 $\frac{\langle \varepsilon^0 \rangle}{\langle \varepsilon^n \rangle}$, $\frac{\langle \sigma_R(T) \rangle}{\langle \sigma_R(T) \rangle}$ となる。すなわち $1/v$ 吸収媒質中*のスペクトルに対する $\frac{\langle \varepsilon^n \rangle}{\langle \varepsilon^0 \rangle}$, $\frac{\langle \sigma_R(T) \rangle}{\langle \varepsilon^0 \rangle}$ が求められる。 $\frac{\langle \varepsilon^n \rangle}{\langle \varepsilon^0 \rangle}$ の計算に当って試験函数を

$$\begin{cases} \chi(\varepsilon) = 1 + \alpha \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_M} \right)^n \\ \psi(\varepsilon) = 1 + \beta Q(\varepsilon) \end{cases} \quad (18)$$

の形に選んだ。ここで α, β は変分パラメータ、 $Q(\varepsilon)$ は(7')式で得られた函数である。(付録 I 参照)

計算の結果 (付録 II 参照)

$$\frac{\langle \varepsilon^n \rangle}{\langle \varepsilon^0 \rangle} = \frac{R_n + \varepsilon_M^n \cdot C_n \cdot \Delta}{1 + C_n \cdot \Delta} \quad (19)$$

$$\beta = \frac{\Delta}{1 - \beta_1 \cdot \Delta}$$

$$\alpha = \Delta \cdot \alpha_1$$

が得られた。

ここで $R_n = \int_0^{\varepsilon_M} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \varepsilon^n M(\varepsilon) d\varepsilon / \int_0^{\varepsilon_M} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} M(\varepsilon) d\varepsilon$, $\Delta = \frac{\sum_a(kT)}{\varepsilon_M \sum_i^i}$, また C_n, β_1, α_1 は上限 ε_M のみの

* 一般に吸収断面積の $1/v$ 法則からのずれがスペクトルに与える影響は小さい。ただし共鳴レベルの付近は例外である。

函数である。上限 ε_M を 10^* に選んだ時の $R_n, C_n, \beta_1, \alpha_1$ を Table 1 に示す。

Table 1 The values of constants, R_n, C_n, β_1 and α_1 in Eq. (19) obtained by variational procedure

n	1	2	3	4
R_n	1.4985	3.7299	12.8927	56.3968
C_n	0.4297	0.2616	0.1708	0.1251
β_1	2.0793	2.2534	2.3381	2.3838
α_1	2.8674	6.0376	13.2493	22.1780

The upper limit of thermal region is chosen $10 kT$.

いま $\bar{\psi}, \bar{\chi}$ を方程式 (3) および (11) の正しい解として (18) 式の函数 ψ, χ に対して $|\bar{\psi} - \psi| < \varepsilon_1, |\bar{\chi} - \chi| < \varepsilon_2$ とすると、得られた $\frac{\langle \varepsilon^n \rangle}{\langle \varepsilon^0 \rangle}$ の精度は $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$ となる。選ばれた試験函数 χ の妥当性は明らかではないが、 ψ の方は (8) 式で示したとおり $\psi = 1 + \Delta \cdot Q(\varepsilon)$ が既に良い近似解なので妥当であり ε_1 は小さいものと思う。 $\frac{\langle \sigma_R(T) \rangle}{\langle \varepsilon^0 \rangle}$ の計算に当って、試験函数 χ の推定がむずかしいが**計算を簡単にするため

$$\begin{cases} \chi = 1 + \alpha \cdot \varepsilon \\ \psi = 1 + \beta \cdot Q(\varepsilon) \end{cases} \quad (20)$$

の形に選んだ。いま共鳴レベルが Breit-Wigner の 1 レベル公式に従うとすると、(15) 式の定義から

$$\sigma_R(\varepsilon, T) = C_R \frac{x^2}{x^2 + (\varepsilon - \varepsilon_R)^2} \quad (21)$$

となる。ここで $C_R = \sigma_R \sqrt{E_R} / \sigma_0 \sqrt{E_0}$, σ_R は吸収反応の山の高さ, $x = \frac{\Gamma}{2} / kT$, Γ は全レベル幅, $\varepsilon_R = E_R / kT$, E_R は共鳴エネルギーである。

(20) 式の試験函数を使って計算した結果

$$\frac{\langle \sigma_R(T) \rangle}{\langle \varepsilon^0 \rangle} = C_R \frac{R + D \cdot \Delta}{1 + C \cdot \Delta} \quad (22)$$

が得られた。ここで

$$C_R \cdot R = \int_0^{\varepsilon_M} \sigma_R(\varepsilon) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} M(\varepsilon) d\varepsilon / \int_0^{\varepsilon_M} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} M(\varepsilon) d\varepsilon,$$

C は定数で上限 ε_M を 10にとると

$$C = 0.4297 \quad (\text{付録 II 参照})$$

になる。 D は x および ε_R の函数で、熱領域に共鳴レベルを持つ主な元素に対して R と D を計算した結果を Table 2 に示した。

(14) 式で与えられた実効断面積の定義は吸収反応の競争を求める上では便利だが、拡散と吸収の割合を求める場合には通常定義

$$\bar{\sigma} = \int_0^{\varepsilon_M} \sigma(E) \phi(E) dE / \int_0^{\varepsilon_M} \phi(E) dE$$

Table 2 The values of constants R and D of some elements in Eq. (22) obtained by variational procedure

Element $T, ^\circ K$		^{235}U	^{239}Pu	^{233}U	^{149}Sm
R	1	—	—	0.09951	0.3178
	2	0.1026	0.07229	0.1991	0.3578
	3	0.1676	0.1268	0.2746	0.2206
	4	0.2173	0.1725	0.3062	0.08541
	5	0.2459	0.2012	0.3108	-0.01300
D	1	—	—	0.2918	0.4057
	2	0.3302	0.2823	0.3986	0.06856
	3	0.3046	0.2768	0.3812	-0.1171
	4	0.2195	0.2119	0.3370	-0.1916
	5	0.1298	0.1362	0.2932	-0.2163
E_R (eV)		0.282	0.297	0.20	0.096
Γ (mV)		114.7	100	100	65.63

The upper limit of thermal region is chosen $10 kT$.

$T_r = T^\circ K / 293.6$

に変換した方が都合がよい。それで変換因子

$$F \equiv \int_0^{\varepsilon_M} \frac{v_0}{v} \phi(E) dE / \int_0^{\varepsilon_M} \phi(E) dE$$

を変分法で計算した結果**

$$F = \frac{1}{\sqrt{T_r}} \frac{1 + 0.4297 \Delta}{1.1280 + 1.4464 \Delta} \quad (23)$$

$T_r = T^\circ K / 293.6$

が得られた。

以上の計算から結局

$$\frac{\langle E^1 \rangle}{\langle E^0 \rangle} = T_r \frac{0.3791 + 1.087 \Delta}{1 + 0.4297 \Delta} \times 10^{-1} \quad (24)$$

$$\frac{\langle E^2 \rangle}{\langle E^0 \rangle} = T_r^2 \frac{0.2387 + 1.674 \Delta}{1 + 0.2616} \times 10^{-2}$$

$$\frac{\langle E^3 \rangle}{\langle E^0 \rangle} = T_r^3 \frac{0.2087 + 2.765 \Delta}{1 + 0.1708 \Delta} \times 10^{-3}$$

$$\frac{\langle E^4 \rangle}{\langle E^0 \rangle} = T_r^4 \frac{0.2301 + 5.1229 \Delta}{1 + 0.1251 \Delta} \times 10^{-4}$$

$$\frac{\langle \sigma_R \rangle}{\langle E^0 \rangle} = C_R \frac{R + D \cdot \Delta}{1 + 0.4297 \Delta} \text{ となる**}$$

* $E_M = 10 kT$

** (13) 式で $b(\varepsilon) \{ \delta(\varepsilon - \varepsilon_R) + \sum_a(\varepsilon) \} M(\varepsilon)$ とおくと、 $\chi(\varepsilon) \simeq e^{-C\eta(\varepsilon - \varepsilon_R) \cdot (\varepsilon - \varepsilon_R)}$ が得られる。ここで $\delta(x)$ はデルタ函数 $\eta(x)$ は階段函数である。

** 試験函数は $\chi = 1 + \alpha \varepsilon$, $\psi = 1 + \beta Q(\varepsilon)$

** 熱領域の上限は $10 kT$ に選んである。

$$T_r = T^\circ K / 293.6,$$

$$\Delta = \frac{\sum_a(kT)}{\xi \sum_i} = \frac{1}{\sqrt{T_r}} \cdot \frac{\sum_a(2,200 \text{ m/s})}{\xi \sum_i}$$

IV. 熱中性子実効断面積の温度係数

(16), (17)式から

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \right] = \sum_{n=1}^m (kT)^n \gamma_n \left\{ \frac{n}{T} \cdot \frac{\langle \varepsilon^n \rangle}{\langle \varepsilon^0 \rangle} \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial T} \cdot \frac{\langle \varepsilon^n \rangle}{\langle \varepsilon^0 \rangle} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \cdot \frac{\langle \sigma_R \rangle}{\langle E^0 \rangle} \quad (25')$$

となる。さらに ε_M と Δ が温度とともに変わることを考慮して

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{\langle \varepsilon^n \rangle}{\langle \varepsilon^0 \rangle} \right] = -\frac{\varepsilon_M}{T} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_M} \cdot \frac{\langle \varepsilon^n \rangle}{\langle \varepsilon^0 \rangle} \\ - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{T} \frac{\partial}{\partial \Delta} \cdot \frac{\langle \varepsilon^n \rangle}{\langle \varepsilon^0 \rangle}$$

となる。上式の第1項は $\langle E^n \rangle$ の定義と $\varepsilon_M \phi(\varepsilon_M) = \Delta \cdot \langle \varepsilon^0 \rangle^*$ より、また第2項は(19)式より得られ、結局(24)式の多項式の部分の寄与は

$$\frac{\partial}{\partial T} \sum_{n=1}^m \gamma_n \frac{\langle E^n \rangle}{\langle E^0 \rangle} = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^m \gamma_n \cdot \frac{\langle E^n \rangle}{\langle E^0 \rangle} \cdot \delta_n \quad (25)$$

となる。

ここで δ_n は

$$\delta_n = n - \Delta \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_M}} + \frac{C_n}{2(1+C_n \cdot \Delta)} \right\} \left\{ \varepsilon_M^n \frac{\langle \varepsilon^0 \rangle}{\langle \varepsilon^n \rangle} - 1 \right\}$$

で与えられる Δ の関数である。

同様に共鳴レベルの寄与は

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{\langle \sigma_R \rangle}{\langle E^0 \rangle} = \frac{\int_0^{\varepsilon_M} \frac{\partial}{\partial T} \sigma_R(\varepsilon, T) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \phi(\varepsilon) d\varepsilon}{\langle \varepsilon^0 \rangle} \\ - \frac{\delta_R}{T} \cdot \frac{\langle \sigma_R \rangle}{\langle E^0 \rangle} \quad (26)$$

となる。

ここで δ_R は

$$\delta_R = \frac{\Delta}{\sqrt{\varepsilon_M}} \left[\sigma_R(\varepsilon_M) \frac{\langle \varepsilon^0 \rangle}{\langle \sigma_R \rangle} - 1 \right] \\ + \frac{\Delta}{2} \cdot \left[\frac{D}{R + \Delta \cdot A} - \frac{C}{1 + \Delta \cdot C} \right]$$

で与えられる。

(26)式の第1項は変分表現(10)を使って直接求めることができる。試験関数を

$$\begin{cases} \chi = 1 + \alpha \cdot \varepsilon \\ \psi = 1 + \beta \cdot Q(\varepsilon) \end{cases}$$

の形に選んで計算を行なうと、

$$\frac{\int_0^{\varepsilon_M} \frac{\partial}{\partial T} \sigma_R(\varepsilon, T) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \phi(\varepsilon) d\varepsilon}{\langle \varepsilon^0 \rangle} \\ = \frac{C_R}{T} \cdot \frac{R' + \Delta \cdot D'}{1 + C \cdot \Delta} \quad (27)$$

が得られた。ここで

$$R' = \frac{\int_0^{\varepsilon_M} \frac{2x^2 \varepsilon (\varepsilon_R - \varepsilon)}{[x^2 + (\varepsilon - \varepsilon_R)^2]^2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} M(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_M} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} M(\varepsilon) d\varepsilon}$$

D' は ε_R の x 関数で(付録Ⅱ参照), R', D' の値を Table 3 に示す。

Table 3 The values of constants R' and D' of some elements in Eq. (27) obtained by variational procedure

Element		235U	239Pu	238U	149Sm
T_r					
R'	1	—	—	0.07779	0.2194
	2	0.1276	0.1005	0.1974	0.03821
	3	0.1804	0.1596	0.1538	-0.1164
	4	0.1546	0.1487	0.06083	-0.1837
	5	0.09815	0.1045	0.01976	-0.2070
D'	1	—	—	0.3128	-0.2958
	2	0.06942	0.09575	-0.1988	-0.5427
	3	-0.2058	-0.1388	-0.4463	-0.3488
	4	-0.3707	-0.3023	-0.4698	-0.1712
	5	-0.4198	-0.3645	-0.4844	-0.05263
E_R (eV)		0.282	0.297	0.20	0.096
Γ (mV)		114.7	100	100	65.63

The upper limit of thermal region is chosen 10 kT
 $T_r = T^{\circ}K/293.6$

また変換因子 F の温度微分を求めると、

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dT} = -\frac{\delta}{T} \quad (28)$$

$$\delta = \frac{1}{2} - \Delta \left(\sqrt{T_r} F - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_M}} \right) \\ - \Delta \left(\frac{0.4297}{1 + 0.4297 \Delta} - \frac{1.4464}{1.1280 + 1.4464 \Delta} \right)$$

となる。以上の計算から結局

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \right] = \frac{1}{T} \left[\sum_{n=1}^m \gamma_n \cdot \frac{\langle E^n \rangle}{\langle E^0 \rangle} \cdot \delta_n + \frac{C_R}{1 + 0.4297 \Delta} \right. \\ \left. \times \left\{ R' + \Delta \cdot D' - \delta_R (R + \Delta \cdot D) \right\} \right] \quad (29)$$

となる。

V. 検 討

1. (24)式に示された $\frac{\langle E^n \rangle}{\langle E^0 \rangle}$ は断面積の $1/v$ 法則からの n 次のずれを示す係数 γ_n が、実効断面積に寄与する時の重みに当たっている。この重みはおよそ $\left(\frac{T_r}{10} \right)^n$ のオーダーなので室温 ($T_r = 1$) では小さな値になり、実効断面積はほとんど γ_0 できまってしまう、スペクト

$$* \quad q(\varepsilon_M) = \varepsilon_M \xi \sum_a \phi(\varepsilon_M) = \int_0^{\varepsilon_M} \sum_a (\varepsilon) \phi(\varepsilon) d\varepsilon \text{ より}$$

ルの形に依存することは少ない。しかし媒質の温度が上がるとともに一次以上の寄与が増してきて、実効断面積のスペクトルの形への依存が強くなる。これに反して温度係数は一次以上のずれで済みますので重み $\frac{\langle E^n \rangle}{\langle E^0 \rangle}$ の推定誤差はそのまま温度係数の誤差となる。

いま中性子温度の Maxwell 分布で $\frac{\langle E^1 \rangle}{\langle E^0 \rangle}$ を求めよう。

$$T_n = (1 + A \cdot \Delta) T \quad (\text{ここで } A \text{ は適当な定数})$$

とすると、 $\frac{\langle E^1 \rangle}{\langle E^0 \rangle} = kTR_1(1 + A \cdot \Delta)$ となる*。

一方、変分法の結果は $\Delta \ll 1$ の時、

$$\frac{\langle E^1 \rangle}{\langle E^0 \rangle} \approx kTR_1 \left[1 + 9 \cdot \frac{C_1}{R_1} \cdot \Delta \right] \\ = kTR_1(1 + 2.581 \cdot \Delta)$$

となる。したがって $A = 2.581$ とすれば両方の結果は $\Delta \ll 1$ の時一致する。同様に $\frac{\langle E^2 \rangle}{\langle E^0 \rangle}$ が一致するよう A をきめると $A = 3.476$ となる。この値は通常使われている、数値計算で得られたスペクトルを最小自乗法で函数近似した値 $A = 1.84^{**}$ よりかなり高くなっている。第 I 章で指摘したとおり、熱領域全体にわたってスペクトルの Maxwell 分布からのずれをエネルギーによらないパラメータで表わすことはできない。もしそのような定数パラメータを使うのなら、スペクトルに断面積 $\sigma(E)$ をかけて熱領域で積分したものが正しい値になるよう定数パラメータを定めるべきである。断面積の $1/v$ 法則からのずれが一次函数で表わされる時は A を 2.58 に選ぶのがよいだろう。二次以上のずれが一次のずれと同程度になる場合は、1つの定数パラメータでは正しい値と合わせることができない。共鳴レベルの寄与を求める場合は、中性子温度というパラメータは一層あいまいなものになる。

2. 熱領域に存在する共鳴レベルの温度係数への寄与をおおざっぱに調べるために $E\phi(E)$ を共鳴エネルギー E_R の囲りで Taylor 展開して二次微分以上を無視すると

$$\int_0^{E_M} \sigma_R(E) \phi(E) dE \approx E_R \phi(E_R) \cdot R \cdot I \quad (29)$$

ここで $R \cdot I$ は共鳴積分である。共鳴レベルが熱領域の上限に近い部分にある時は $E\phi(E)$ は E とともにゆっくり変化する函数なので、二次微分以上を無視しても大きな誤差はないであろう。(29)式から温度係数は

$$\frac{d}{dT} \int_0^{E_M} \sigma_R(E) \phi(E) dE \approx R \cdot I \cdot \frac{d}{dT} E_R \phi(E_R) \\ = -R \cdot I \cdot \frac{E_R}{T} \cdot \frac{d}{dE_R} [E_R \phi(E_R)]^{**} \quad (29')$$

すなわち共鳴エネルギーにおける $E\phi(E)$ の勾配に比例することになる。したがって不連続点のある近似スペクトル^{***}は温度係数の推定には不適である。また $1/E$ 分布と Maxwell 分布を適当な点でつないだ近似スペクトルは、その接合点が E_R より小さい時は温度係数は 0、 E_R より大きくなると、ある値を持つことになり、われわれが便宜上導入した接合点の選び方が温度係数を大きく支配することになるので、その妥当性は明らかでなく、温度とともに温度係数が変化する傾向を正しく表わしているとは思われない。この論文で行なった変分法による計算は試験函数 χ の妥当性が明らかではないが、近似スペクトルとして Hurwitz らの導いた一次の逐次解^{(1)***}

$$\phi(E) = M(E) + \Delta H(E)$$

を使って行なった計算よりも精度はよい。なぜなら上記の逐次解を使うことは、変分形式(10)において、試験函数として $\chi = 1$ 、 $\psi = 1 + \Delta \cdot Q(E)$ (動かすパラメータなし)を選ぶことと同等だからである。

3. 変分計算の結果得られた式と断面積の近似形

$$\sqrt{E} \sigma_a^{49} = 68.48 + \frac{7.2158}{(E - 0.297)^2 + 0.0025}$$

$$\sqrt{E} \sigma_f^{49} = 61.29914 + \frac{4.40164}{(E - 0.297)^2 + 0.0025}$$

(ただし E の単位は eV)

Fig. 2 The effective thermal cross-section of ^{239}Pu
(The upper limit of thermal region is chosen $10kT$) $T_r = \frac{T^\circ\text{K}}{293.6}$

* R_1 については式参照

** Wigner-Weinberg のテキストでは $\frac{4 \sum_a (kT)}{\xi \sum_s}$ を Δ と定義している。

*** 変数変換 $E_R \rightarrow \epsilon_R = E_R/kT$ を行なった。

*** Westcott が初期の計算に使った近似スペクトル。

**** 付録 I 参照

Fig. 3 The temperature coefficient of the effective thermal absorption cross-section of ^{239}Pu .

(The upper limit of thermal region is chosen $10kT$) $T_r = \frac{T^\circ\text{K}}{293.6}$

から、熱領域における ^{239}Pu の実効断面積とその温度係数を計算した結果を Figs. 2, 3 に示す。

4. $\Delta \ll 1$ の時は (16), (17), (19), (22) 式から

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = g + s \cdot \Delta \quad (30)$$

$$\begin{aligned} g &= \sum_{n=0}^m \gamma_n (kT)^n R_n + R \\ &= \int_0^{E_M} \sigma(E) M(E) dE / \int_0^{E_M} \frac{1}{v} M(E) dE \\ s &= \sum_{n=0}^m \gamma_n (kT)^n (\epsilon_M^n - 1) C_n + D - C \end{aligned}$$

となり Westcott の結果⁽⁴⁾ と対応がつけられる。ただし Westcott は積分の上限を無限大にえらんだが、共鳴領域と熱領域での反応をわけて考えた方がよい。

VI. 結 言

われわれは吸収断面積の $1/v$ 法則からのずれが反応の実効値とその温度係数にどのように寄与し、またその寄与の仕方が媒質の温度と、燃料の濃度とともにいかに変化するかを“ $1/v$ 吸収媒質中の重い単原子ガスモデル”に基づく熱中性子スペクトルを元にして調べてきたが、このモデルを改良して、実際に炉内で起きている状態に近づくためには次の問題が解決されねばならぬだろう。

(1) 媒質を構成する原子間の化学結合を考慮すること。

この問題に対する 1 つの方法としてスペクトルの従う積分方程式から出発した変分法の応用がある。

(2) 共鳴レベル付近でのスペクトルの歪みを考慮すること。

均質媒質中に共鳴吸収体が一様に分布している場合は、この論文で導かれた変分表現を元にして適当な試験関数を選ぶことによって、ある程度解析できるであろう。しかしこの問題が重要なのは非均質炉の燃料の中に共鳴吸収体が分布している場合であって、この状態はスペクトルの歪みを補う力の大きい減速材中に共鳴吸収体が分布している場合とはかなり違ってくることが予想される。

(3) 媒質中の温度分布、たとえば炉心と反射体の温度差を考慮すること。

濃縮燃料を使った高温炉では熱中性子化の大部分が起こる反射体と吸収の大部分が起こる炉心との温度差が大きくなることは反応の実効値と温度係数の推定に当たって問題になるであろう。

最後にこれは多分形式的な意味しか持たぬことであろうが、微分方程式 (3) を Hamilton 形式に変換した場合 ψ —中性子束分布と Maxwell 分布の比—と減速密度 q が Canonical variable になっていることをつけ加えておきたい。

この計算は著者が日本原子力研究所開発試験室に外来研究員として研究に行なったもので、主に平均質炉を対象としている。また数値計算は同研究所の IBM 650 を使用して行なった。数値計算のプログラミングをしていただいた同研究所設計室の磯田和男氏、討論と助言をいただいた開発試験室の方々、日本原子力事業部研究部の方々、数値計算をしていただいた高橋松男、黒沢玲子の両氏に厚くお礼を申し上げたい。また実効断面積の問題を提起して、著者がこの問題に向う動機を与え、その後絶えず激励をいただいた研究部の大村達郎氏に心から感謝の意を表したい。

付 録 [I] 近似スペクトルの数値計算

微分方程式 (3) は積分方程式

$$\psi(\epsilon) = 1 + \int_0^\epsilon dz z^{-2} e^z \int_0^z \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_i(\epsilon')}{\epsilon'} M(\epsilon') \psi(\epsilon') d\epsilon' \quad (1)$$

に変換することができる⁽¹⁾。 $1/v$ 吸収の時は、求める $\psi(\epsilon)$ を Δ をパラメータとして展開して (1) 式の逐次近似解

$$\psi(\epsilon) = 1 + \Delta \cdot Q(\epsilon) + \Delta^2 \cdot W(\epsilon) + O(\Delta^3) \quad (2)$$

が得られる。ここで

$$Q(\epsilon) = \int_0^\epsilon dz z^{-2} e^z \int_0^z \sqrt{t} e^{-t} dt$$

$$W(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon dx x^{-2} e^x \int_0^x \sqrt{t} e^{-t} Q(t) dt$$

(本文(7')式および脚注参照)

$Q(\varepsilon)$, $W(\varepsilon)$ は漸近展開

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon \sqrt{t} e^{-t} dt &= \sqrt{\varepsilon} e^{-\varepsilon} \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon^k}{\Gamma(k+3/2)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(N+3/2)} \int_0^\varepsilon t^{N+1/2} e^{-t} dt \end{aligned} \quad (3)$$

を使って漸近級数で表わすことができる。ここで $\Gamma(k)$ はガンマー函数。また(3)式の右辺の第2項は $\varepsilon^{N+3/2}/\Gamma(N+5/2)$ より小さく、あるきまった ε に対して N を十分大きくとれば第1項に比して無視できるようになる。(3)式と Q , W の定義から

$$Q(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon^k}{(k-1/2)\Gamma(k+3/2)}$$

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^N \frac{k!}{\Gamma(k+3/2)(k+1/2)} \sum_{s=k+1}^\infty \frac{\varepsilon^s}{s!}$$

上の級数を元にして、 $Q(\varepsilon)$ および $M(\varepsilon) \cdot Q(\varepsilon)$ を IBM 650 を使って計算した*。この時 N は切り捨てた項が、得られた和の 10^{-7} 以下になるように定めた。また与えられた Δ に対して、近似スペクトル $\phi(\varepsilon)$ を計算するプログラミングを行なった。

付録〔Ⅱ〕 変分法による数値計算

$$(1) \frac{\langle \varepsilon^n \rangle}{\langle \varepsilon^0 \rangle}$$

$$\Sigma_a(\varepsilon) = \frac{\Sigma_a(kT)}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \Sigma_a^i(\varepsilon) = \varepsilon^n \Sigma_a(\varepsilon) \text{ を使って変}$$

分表現(10)を変形すると、

$$J(\chi, \psi) = \frac{\int_0^{\varepsilon_M} \left[\varepsilon M(\varepsilon) \chi' \psi' + \Delta \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} M(\varepsilon) \chi \psi \right] d\varepsilon}{\Delta \chi(\varepsilon_M) \int_0^{\varepsilon_M} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \varepsilon^n M(\varepsilon) \psi(\varepsilon) d\varepsilon}$$

上式に試験函数 $\chi = 1 + \alpha(\varepsilon/\varepsilon_M)^n$, $\psi = 1 + \beta Q(\varepsilon)$ を代入して、 $J(\alpha, \beta)$ が停留になるよう α, β をきめると

$$\alpha = \Delta \alpha, \quad \beta = \frac{\Delta \beta_2}{1 - \Delta \beta_1}$$

$$\frac{1}{J(\alpha, \beta)} = \frac{R_n + \varepsilon_M^n \cdot C_n \cdot \Delta}{1 + C_n \cdot \Delta}$$

が得られる。ここで

$$\alpha_1 = \varepsilon_M^n \frac{\gamma \cdot x_2 - y \cdot z}{x_1 \cdot y}, \quad \beta_1 = \frac{\varepsilon_M^n \cdot z - x_2}{x_1}$$

$$\beta_2 = \frac{\varepsilon_M^n \cdot \gamma - y}{x_1}, \quad C_n = \frac{\gamma \cdot x_2 - y \cdot z}{x_1 \cdot \gamma}, \quad R_n = \frac{y}{\gamma}$$

x_1, x_2, y, z, γ は ε_M の函数で次の漸近級数で表わされる。

$$x_1 = n \int_0^{\varepsilon_M} \varepsilon^n M(\varepsilon) Q'(\varepsilon) d\varepsilon = n \sqrt{\varepsilon_M} e^{-\varepsilon_M} \sum_{k=1}^N$$

$$\left(k + \frac{3}{2}\right) \left(k + \frac{5}{2}\right) \cdots \left(k + \frac{2n-1}{2}\right) \sum_{s=k+n}^N \frac{\varepsilon_M^s}{\Gamma(s + \frac{3}{2})}$$

$$x_2 = \int_0^{\varepsilon_M} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \varepsilon^n M(\varepsilon) Q(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$= \sum_{k=1}^N \frac{(k+n)!}{\Gamma(k + \frac{3}{2})} \frac{1}{(k - \frac{1}{2})} \left\{ 1 - e^{-\varepsilon_M} \sum_{s=0}^{k+n} \frac{\varepsilon_M^s}{s!} \right\}$$

$$y = \int_0^{\varepsilon_M} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \varepsilon^n M(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$= \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{\Gamma(k + \frac{3}{2})} \varepsilon_M^{k+1/2} e^{-\varepsilon_M}$$

$$z = \int_0^{\varepsilon_M} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} H(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$= \sum_{k=1}^N \frac{k!}{\Gamma(k + \frac{3}{2}) \Gamma(k - \frac{1}{2})} \left\{ 1 - e^{-\varepsilon_M} \sum_{s=0}^k \frac{\varepsilon_M^s}{s!} \right\}$$

$$\gamma = \int_0^{\varepsilon_M} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} M(\varepsilon) d\varepsilon = \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon_M^{k+1/2}}{\Gamma(k + \frac{3}{2})} e^{-\varepsilon_M}$$

これらの漸近級数を元にして x_1, x_2, y, z, γ を求めそれから $R_n, C_n, \alpha_1, \beta_1$ を求めて Table 1 の結果が得られた。

$$(2) \frac{\langle \sigma_R \rangle}{\langle \varepsilon^0 \rangle}$$

(1)と同様にして、いま

$$x_1 = \int_0^{\varepsilon_M} \varepsilon M(\varepsilon) Q'(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$x_2 = \int_0^{\varepsilon_M} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \varepsilon H(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$y = \int_0^{\varepsilon_M} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \varepsilon M(\varepsilon) d\varepsilon, \quad z = \int_0^{\varepsilon_M} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} H(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$\gamma = \int_0^{\varepsilon_M} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} M(\varepsilon) d\varepsilon, \quad A = \varepsilon_M$$

$$h = \int_0^{\varepsilon_M} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{x^2}{x^2 + (\varepsilon - \varepsilon_R)^2} H(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$m = \int_0^{\varepsilon_M} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{x^2}{x^2 + (\varepsilon - \varepsilon_R)^2} M(\varepsilon) d\varepsilon$$

とすると、

$$\frac{\langle \sigma_R \rangle}{\langle \varepsilon^0 \rangle} = C_R \frac{R + R \cdot \Delta}{1 + C \cdot \Delta}$$

$$\beta = \frac{\Delta \cdot \beta_2}{1 - \Delta \cdot \beta_1}$$

* 計算に要する時間は1つの ε に対して15~20秒である。

$$\alpha = \frac{\Delta \cdot \alpha_1}{1 + \Delta \cdot \alpha_2}$$

が得られた。ここで

$$C = \frac{\gamma x_2 - \gamma z}{\gamma x_1}, \quad R = \frac{m}{\gamma},$$

$$D = \frac{A\gamma - \gamma}{\gamma x_1} h - \frac{Az - x_2}{\gamma x_1} m$$

$$\beta_1 = \frac{Az - x_2}{x_1}, \quad \beta_2 = \frac{A\gamma - \gamma}{x_1}$$

$$\alpha_1 = \frac{\gamma}{x_1} \frac{h}{m} - \frac{\gamma}{x_1}, \quad \alpha_2 = \frac{x_2 - \gamma}{x_1} \frac{h}{m}$$

である。 m, h の数値計算は $Q(\varepsilon)$ を付録〔I〕で示す漸近級数を使って $\Delta\varepsilon=0.1$ のきざみで求めておき、その値を使って Simpson の積分公式で計算した。 $\Delta\varepsilon=0.1$ のきざみは E のきざみに直して室温で0.0025, 1,000°C で約0.01 eV であって、共鳴レベルの幅 Γ を10等分以上に分割するので数値積分の精度は良いものと思う。

$$(3) \frac{\langle \frac{\partial}{\partial T} \sigma_R(T) \rangle}{\langle \varepsilon^0 \rangle}$$

$\frac{\langle \sigma_R \rangle}{\langle \varepsilon^0 \rangle}$ の計算における m, h を

$$m' = \int_0^{\varepsilon_M} \frac{2x^2 \cdot \varepsilon \cdot (\varepsilon_R - \varepsilon)}{[x^2 + (\varepsilon - \varepsilon_R)^2]^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} M(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$h' = \int_0^{\varepsilon_M} \frac{2x^2 \cdot \varepsilon \cdot (\varepsilon_R - \varepsilon)}{[x^2 + (\varepsilon - \varepsilon_R)^2]^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} H(\varepsilon) d\varepsilon$$

に代えれば後は同じである。

(1959年 10月27日 受理)

— 参 考 文 献 —

- (1) H. H. HURWITZ, M. S. NELKIN, G. J. HABETLER : *Nucl. Sci. Engng.*, **1**, 280 (1956).
- (2) 加藤敏夫：“変分法とその応用”，(1957)，岩波書店。
- (3) A. M. WEINBEG, E. P. WIGNER : “*The Physical Theory of Neutron Chain Reactors*”, (1958), Chicago Univ. Press, Chicago.
- (4) C. H. WESTCOTT : *CRRP-787*, (1958).
- (5) D. J. HUGHES, R. B. SCHWARTZ : *BNL-325*, (1958).