研究論文

510. 試料のすべての面から輻射熱損失を伴う場合の 温度伝導率の非定常測定法, (II)

周期的加熱法

熊田俊明*, 小林清志*

(1968年 12月 2日 受理)

A Transient Heating Method for Measuring Thermal Diffusivity of a Solid Disk with Thermal Radiation Losses from All Faces, (II)

Periodic Heating

By Toshiaki KUMADA and Kiyoshi KOBAYASI

This report discusses from theory a method of measuring the thermal diffusivity of a relatively thick disk-shaped specimen heated on the front face by periodic radiation. Thermal radiation losses from the lateral face as well as from the front and the rear faces are considered.

The results are as follows: If $2r_0/l \geq 10.0$ ($2r_0$: diameter, l : thickness), the thermal diffusivity can be determined with the disk regarded as an infinite slab having no radiation loss from the lateral face. If $2r_0/l \leq 8.0$, radiation loss from all faces of the disk should be taken into account in determining thermal diffusivity, by adopting the proposed method. Further, if $2r_0/l \leq 2.0$ and at the same time the rate of thermal radiation loss is large, it should become difficult to measure thermal diffusivity with high accuracy, even by the present treatment.

Experimental data obtained in the past based on Cowan's periodic method require re-examination in the light of the present finding since the shape of the specimens have ranged from $2r_0/l = 4.0$ to 7.0 .

I. ま え が き

近年, 新しい材料が次々と開発され, その利用面も拡大されるに及んで, 熱定数の広範囲な測定が必要となっている。古くから知られる熱伝導率の測定法は円柱または板状試料に定常的に熱を流して2点間の温度差と熱流を測定する方法であるが, これらの方法では高温で試料側面からの熱損失をうまく補償できないため, 高温において測定が難しくなる。したがって, 最近の熱定数の測定法の開発は非定常法に向けられており, なかでも真空中で無限平板と考えられる試料の前面をステップ, パルスおよび周期的に加熱する方法が注目されている。ステップ関数状に加熱する方法で, 側面から輻射熱損失のない場合については Cowan⁽¹⁾お

よび著者ら⁽²⁾の研究があり, また第I報⁽³⁾においてはステップ関数状に加熱する場合の試料のすべての面から輻射熱損失のある場合について報告した。周期的加熱法では, 測定精度を高めるため前面と背面の位相差をある程度大きくする必要から, 試料をあまり薄くできない。また, 電子銃による加熱では, 高エネルギー電子により試料の原子が飛ばされて試料の厚さが変わるため, 試料が薄くても厚さの変化による誤差が相対的に大きくなる。これに対して試料の直径をあまり大きくすると, 試料の前面を均一に加熱するという条件を満たすことが難しくなる。従来の実験⁽²⁾⁽³⁾では, 厚さに対する直径は4.0~7.0程度の試料で無限平板とし

* 東北大学工学部 (Faculty of Eng., Tohoku Univ.)

ての解により測定が行われているが、これらの場合に側面からの輻射熱損失がどの程度になるか、また無視できる量であるかどうかはなんら検討されていない。

本報では、周期的加熱法において試料側面からの輻射熱損失も考慮して理論的検討を試み、無限平板として取り扱った場合の測定原理上の誤差を検討した上、その適用限界を求め、さらに進んで全面からの輻射熱損失を考慮した解に基づき測定原理について解明しようとした。

II. 理 論

1. 解の誘導

第1図に示すように、初期温度 t_0 で周囲と熱平衡状態にある真空中の円板状試料の1面($x=l$)を輻射熱流束または電子線により周期的に加熱し、すべての面から輻射による熱損失を伴う場合の熱伝導方程式および境界条件は次の(1)~(7)式で与えられる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (1)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = W_0 \theta, \quad (x=0) \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = H_0 \sin \omega_0 \tau - W_l \theta, \quad (x=l) \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} = -W_r \theta, \quad (r=r_0) \quad (4)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \quad (r=0) \quad (5)$$

$$\theta = 0, \quad (\tau < 0) \quad (6)$$

$$\theta \rightarrow \text{準定常}, \quad (\tau \rightarrow \infty) \quad (7)$$

ここで、実際上 $T_0 \gg \theta$ であり、輻射熱損失は次式のように線型化されている。また、試料前面の輻射率は ϵ_l であるから試料前面での受熱量は $H_0 \sin \omega_0 \tau$ となる。

$$\epsilon_l \sigma (T_0 + \theta)^4 - \epsilon_l \sigma T_0^4 = 4\epsilon_l \sigma T_0^3 \theta = W_l \theta \quad (8)$$

第1図 原理図

W_0, W_r についても同様である。輻射熱損失のみを考慮したのは、普通、この種の測定は真空中($<10^{-4}$ mmHg)で行われるので、残存ガスの熱伝導および対流による熱損失を無視できるからである。また、第I報⁽⁵⁾における H_0 は $H_0 \sin \omega_0 \tau$ で置きかえられている。(1)式の解は(2)式以下を考慮して、第I報におけると同様に無次元化し、フーリエ数 F_0 についてラプラス変換した微分方程式の解を求めると、

$$\theta(R, X, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2B_r J_0(u_n R)}{(u_n^2 + B^2) J_0(u_n)} \cdot \left[\frac{(\omega_0/b) \{v \cos(vX) + B_0 \sin(vX)\}}{\{s^2 + (\omega_0/b)^2\} \{ (B_0 + B_l) v \cos v + (B_0 B_l - v^2) \sin v \}} \right] \quad (9)$$

となる。ただし、 u_n は次の固有方程式の n 番目の根である。

$$u J_1(u) - B_r J_0(u) = 0 \quad (10)$$

$$\alpha v \cos v + (\beta - v^2) \sin v = 0$$

したがって、求める解は次式のように与えられる。

$$\theta(R, X, F_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2B_r J_0(u_n R)}{(u_n^2 + B^2) J_0(u_n)} \sum \text{Res.} \left[\frac{e^{sF_0} (\omega_0/b) \{v \cos(vX) + B_0 \sin(vX)\}}{\{s^2 + (\omega_0/b)^2\} \{ \alpha v \cos v + (\beta - v^2) \sin v \}} \right] \quad (11)$$

ここで、 $s = -(v^2 + u_n^2)$, $u_n = w_n / \gamma_0$

(11)式において $s^2 + (\omega_0/b)^2 = 0$ および $\alpha v \cos v + (\beta - v^2) \sin v = 0$ による留数を求めれば解が求められるが、十分長い時間が経った準定常状態を考えれば、 $\alpha v \cos v + (\beta - v^2) \sin v = 0$ による留数には $e^{-(v^2 + u_n^2)F_0}$ なる項が含まれるので、 $F_0 \rightarrow \infty$ でその寄与はなくなる。したがって、 $s^2 + (\omega_0/b)^2 = 0$ による留数のみ求めればよいことになる。 $s = \pm i\omega_0/b$ であるから $i\omega_0/b$ について(11)式を計算し、その実数部分の2倍を考えればよい。 $s = i\omega_0/b$ を $s = -(v^2 + u_n^2)$ に代入して $v = zi$ と変換すれば、

$$z^2 = i\omega_0/b + u_n^2 \quad (12)$$

となる。 B, C を実数として $z^2 = (C + Bi)^2$ とおけば、(12)式との比較により次の2式が得られる。

$$C^2 - B^2 = u_n^2 \quad (13)$$

$$2BC = \omega_0/b \quad (14)$$

(13), (14)式を連立して解けば、

$$B = \frac{u_n}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + (\omega_0/b u_n^2)^2} - 1} \quad (15)$$

$$C = \frac{\omega_0/b}{\sqrt{2} u_n \sqrt{\sqrt{1 + (\omega_0/b u_n^2)^2} - 1}} \quad (16)$$

が得られる。(11)式において $v = zi$ とすれば、同式の

[]の中は(17)式のように変形される。

$$\frac{(\omega_0/b)\{(z+B_0)e^{sz}+(z-B_0)e^{-sz}\}}{\{s^2+(\omega_0/b)^2\}\{z^2+\alpha z+\beta\}e^s-(z^2-\alpha z+\beta)e^{-s}}$$

(17)

(17)式を(11)式に代入し、 $s^2+(\omega_0/b)^2=0$ による留数を求めれば(18)、(19)式が得られる。

$$\Theta(R, X, \omega_0\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2B_n J_0(w_n R)}{(w_n^2 + B_n^2) J_0(w_n)} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(E_n \cos \omega_0 \tau - D_n \sin \omega_0 \tau) + i(E_n \sin \omega_0 \tau + D_n \cos \omega_0 \tau)}{i(G_n + iF_n)} \right\} \quad (18)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2B_n J_0(w_n R)}{(w_n^2 + B_n^2) J_0(w_n)} \left(\frac{D_n F_n + G_n E_n}{G_n^2 + F_n^2} \right) \sin \omega_0 \tau - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2B_n J_0(w_n R)}{(w_n^2 + B_n^2) J_0(w_n)} \left(\frac{E_n F_n - D_n G_n}{G_n^2 + F_n^2} \right) \cdot \cos \omega_0 \tau \quad (19)$$

ただし、 $D(X) = B \cos(BX) \cosh(CX) + C \sin(BX) \sinh(CX) + B_0 \sin(BX) \cosh(CX)$

$E(X) = B_0 \cos(BX) \sinh(CX) - B \sin(BX) \sinh(CX) + C \cos(BX) \cosh(CX)$

$F = \alpha B \cos B \cosh C + \alpha C \sin B \sinh C + (\beta - B^2 + C^2) \sin B \cosh C + 2BC \cos B \sinh C$

$G = -\alpha B \sin B \sinh C + \alpha C \cos B \cosh C + (\beta - B^2 + C^2) \cos B \sinh C - 2BC \sin B \cos C$

(19)式において $\sin \omega_0 \tau$ および $\cos \omega_0 \tau$ の係数をそれぞれ ϕ_x および Ψ_x とおけば、

$$\Theta(R, X, \omega_0\tau) = \phi_x \sin \omega_0 \tau - \Psi_x \cos \omega_0 \tau \\ = \sqrt{\phi_x^2 + \Psi_x^2} \sin(\omega_0 \tau - \delta_x) \quad (20)$$

ただし、 $\delta_x = \tan^{-1}(\Psi_x / \phi_x)$ (21)

試料の前面および背面の中心における温度波の位相差により温度伝導率を求めるには $(\delta_0 - \delta_i)$ を計算すればよい。ここで δ_0 および δ_i は $x=0$ および l における中心の温度波の熱源出力の位相に対する位相遅れである。また、前面および背面の中心における温度波の振幅の比により温度伝導率を求めるには $\sqrt{\phi_0^2 + \Psi_0^2} / \sqrt{\phi_i^2 + \Psi_i^2}$ を計算すればよい。また、側面輻射熱損失のない場合の解は、 $B_r \rightarrow 0$ のとき $n=1$ では(10)式より

$$B_r = w_1^2 / 2 \quad (22)$$

が得られる。また $u_1 \rightarrow 0$ より(15)、(16)式から

$$B = C = l(\omega_0 / 2a)^{1/2} \quad (23)$$

これらの関係を用いて(19)式より $\lim_{B_r \rightarrow 0} \Theta$ によって側面輻射熱損失のない Cowan の解が得られる。

2. パラメータの値と計算方法

試料前面中心温度と背面中心温度の位相差を利用する方法について計算する。前面および背面の中心温度の振幅の比を利用する方法は、背面中心温度の減衰が α に強く依存するために精度よく温度伝導率を決定することができないとされている。熱源出力の位相に対する前面中心および背面中心の温度の位相差は(21)式において $X=0$ 、 $X=1.0$ と置くことにより求められる。この前面および背面の位相差 δ_0, δ_i はパラメータとし

て α, γ_0 、フーリエ数の代わりに無次元角周波数 ω_0/b を変数として計算すればよい。位相差 $(\delta_0 - \delta_i)$ は普通 $\pi/10 \sim \pi/5$ の範囲で実際の測定が行われているので、無次元角周波数としてこの範囲を十分含む $\omega_0/b = 0.2 \sim 20.0$ とした。試料の厚さを一定とすれば、周波数 ω_0 が大きすぎると位相差は大きくなるが、背面温度の振幅が極端に減衰するために位相差を正確に決めるのが難しくなり、周波数が小さすぎると位相差が小さすぎて精度が下がる。

3. 計算結果

第2図は、正弦波加熱による試料前面および背面中心の位相差を $\epsilon_0 = \epsilon_i = \epsilon_r$ とし、 $\alpha = 0.8$ の場合について $l(\omega_0/2a)^{1/2}/\pi$ に対して $2\gamma_0$ をパラメータとして表わした線図である。

横軸の $l(\omega_0/2a)^{1/2}/\pi$ は無次元角周波数 ω_0/b の平方根を π で除した量で、Cowan⁽¹⁾ の側面輻射熱損失のない場合の表わし方と同様である。側面輻射熱損失のない無限平板の場合には(15)、(16)式の B, C は共に $l(\omega_0/2a)^{1/2}$ となり、この場合には位相差は直接には $l(\omega_0/2a)^{1/2}/\pi$ を変数とすることになり、 $2\gamma_0 = \infty$ の線で示されている。この図で明らかなように、 $2\gamma_0 \leq 6.0$ では側面輻射熱損失の影響が大きくなり、 $2\gamma_0 \geq 10.0$ では無限平板と見なししてもよいことがわかる。第3図は、 $2\gamma_0 = 3.0$ の場合について α をパラメータとして第2図同様に表わした線図である。このような線図を、必要な $2\gamma_0$ の値について計算しておけば側面輻射熱損失のある場合にも無限平板と見なし得る場合と同様に温度伝導率を求めることができる。

第4図は、前面および背面中心における温度波の位相差が側面輻射熱損失によって受ける影響を相対誤差で示した線図である。 $\alpha = 0.4$ の場合で横軸に $2\gamma_0$ 、

第2図 無次元角周波数と位相差との関係

第3図 無次元角周波数と位相差との関係

ラメータとして $l(\omega_0/2a)^{1/2}/\pi$ を用いている。 $2\gamma_0$ が小さくなるにつれて無限平板の場合に対する相対誤差が急激に大きくなっている。 $l(\omega_0/2a)^{1/2}/\pi = 0.2$ は $\Delta\delta_\infty/\pi$

第4図 α をパラメータとする $2\gamma_0$ による位相差の相対誤差

≈ 0.1 に相当する値で、 $\alpha = 0.4$, $2\gamma_0 = 8.0$ でもなお無限平板の場合に比して約4%の誤差が認められる点は注目すべきである。 $l(\omega_0/2a)^{1/2}/\pi$ の値が大きくなるにつれて急に相対誤差が小さくなり、 $l(\omega_0/2a)^{1/2}/\pi = 0.5$ では $2\gamma_0 = 3.0$ の場合でも相対誤差は約3%になる。実験的研究では $\Delta\delta_\infty/\pi \approx 0.1$ 前後の値で測定されることが多く、Wheeler⁽³⁾ は $\Delta\delta_\infty/\pi \leq 0.1$ なる範囲で測定を行なっている。第5図は、 $2\gamma_0$ をパラメータとして $l(\omega_0/2a)^{1/2}/\pi = 0.2$ の場合について α の値により相対誤差がどのように変わるかを表わしたものである。 α の値が大きくなれば急激に相対誤差が大きくなるが、単調に増加するのではなく、相対誤差が最大になる α の値がある。実際の測定に供されている試料寸法 ($2\gamma_0 = 4.0 \sim 7.0$) では、 $\Delta\delta_\infty/\pi \approx 0.1$ の場合に α の値によって異なるが、5~10%程度の相対誤差が認められる点は留意すべきである。

ここで誤解を避けるために書き加えねばならぬことは、計算結果における誤差とは、前面と背面との位相差についてのことで、温度や熱源出力の位相に対する試料の前面および背面の位相遅れではないことである。これらの量は側面輻射熱損失の影響をさらに強く受ける。

4. 温度測定位置が背面中心からずれることによる影響

本報では、試料背面中心温度を測定するとして計算したが、温度測定には光学的方法で中心近くのある広

第5図 $2\gamma_0$ をパラメータとするに
よる位相差の相対誤差

さの面からの光を利用する方法が多いが、これは中心温度とは異なっている。無次元半径が $R \leq 0.2$ の範囲であれば、中心温度測定による位相差と比較して、この場合の誤差は1%以内で実用上無視できるが、試料の前面および背面のさらに広い範囲からの光を利用する温度測定法による場合には、中心温度測定による位相差とはかなり異なったものとなる。したがって、側面輻射熱損失の影響がⅡ-3. で述べた結果より、さらに強く現われることになる。試料の中心付近の一定面積からの光を利用する場合に、平均温度 θ_m は温度検出装置が温度上昇に対して考えている温度上昇範囲において直線的な感度を持つとすれば、次式で与えられる。

$$\theta_m = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \theta \cdot 2\pi R dR \quad (22)$$

この平均温度を計算すれば、いままでの中心温度についての検討を、試料中心付近の一定面積からの光を利用する場合にも適用して側面輻射熱損失の影響を議論できる。

Ⅲ. む す び

円板状試料の前面を周期的に加熱し、試料の前面および背面ばかりでなく側面からも輻射による熱損失を伴う場合の試料内温度分布を表わす式を導いた。試料表面輻射率一様として $\alpha = 0.1 \sim 2.0$, $2\gamma_0 = 1.0 \sim \infty$ の間

で計算した。その結果次のことが明らかとなった。

- (1) $\alpha, l(\omega_0/2a)^{1/2}/\pi$ の値によって異なるが、実際に測定が行われている $\Delta\delta_m/\pi = 0.1$ のあたりでは、側面輻射熱損失の影響を無視してよい $2\gamma_0$ の値は $2\gamma_0 \geq 10.0$ となる。 $2\gamma_0 \leq 8.0$ では本理論によって補正すればより正確な値が得られる。
- (2) 従来の測定に供されている試料の寸法 ($2\gamma_0 = 4.0 \sim 7.0$) では、 $\alpha, l(\omega_0/2a)^{1/2}/\pi$ などの値によって異なるが、依然として側面輻射熱損失の影響を無視できない。
- (3) $l(\omega_0/2a)^{1/2}/\pi$ の値が小さいほど、また α の値が大きいほど側面輻射熱損失の影響が大きい。
- (4) $2\gamma_0 \leq 2.0$ では、側面輻射熱損失の影響が強く高温で α の大きい範囲では本理論によっても精度よく温度伝導率を決定することは困難であろう。

以上の計算では、周期的加熱前の試料内温度分布が一様である場合について理論的に取り扱った。実際の測定では Wheeler⁽³⁾ の実験的研究で明らかにように、真空中で電子線によって試料を一定温度に加熱しているため前面と背面とでは温度が異なる。このような場合の側面輻射熱損失の熱拡散率の測定値に対する影響は本報の場合とは多少異なる。しかし、本理論によって側面輻射熱損失の程度を推算することは可能である。

終りに、有益な助言を賜った東北大学名誉教授松山四郎博士ならびに同大学教授棚沢 泰博士に深謝する。

〔記 号〕

a : 温度伝導率	(cm^2/sec)
b : a/l^2	(sec^{-1})
C : 比 熱	($\text{cal/g}^\circ\text{C}$)
$H_0 \sin(\omega_0 \tau)/\epsilon_1$: 輻射熱または電子ビームによる熱流束	($\text{cal}/\text{cm}^2 \cdot \text{sec}$)
l : 試料厚さ	(cm)
r : 試料中心からの距離	(cm)
r_0 : 試料半径	(cm)
t : 温 度	($^\circ\text{C}$)
T : 絶対温度	($^\circ\text{K}$)
W_0 : $4\epsilon_0\sigma T_0^4$	($\text{cal}/\text{cm}^2 \cdot \text{sec} \cdot ^\circ\text{C}$)
W_1 : $4\epsilon_1\sigma T_1^4$	($\text{cal}/\text{cm}^2 \cdot \text{sec} \cdot ^\circ\text{C}$)
W_r : $4\epsilon_r\sigma T^4$	($\text{cal}/\text{cm}^2 \cdot \text{sec} \cdot ^\circ\text{C}$)
x : 試料背面からの距離	(cm)
ϵ : 輻射率	

- δ : 位相遅れ $\Delta\delta$: 位相差
 θ : $t-t_i$ ($^{\circ}\text{C}$)
 λ : 熱伝導率 ($\text{cal/cm}\cdot\text{sec}\cdot^{\circ}\text{C}$)
 ρ : 密度 (g/cm^3)
 σ : ステファーン・ボルツマン定数 ($\text{cal/cm}^2\cdot\text{sec}\cdot^{\circ}\text{K}^{-4}$)
 τ : 時間 (sec)
 ω_0 : 角周波数 (sec^{-1})
- l : 前面に関する値
 0 : $F_0, H_0, r_0, \omega_0, \gamma_0$ を除いて背面に関する値
 r : 側面に関する値
 x : $x=0$ または $x=l$ に関する値
 ∞ : 無限平板に関する値
 γ : 寸法が $2\gamma_0$ の試料に関する値
- 参考文献 —
- 無次元量
 $B_0=W_0l/\lambda, \quad R=r/r_0, \quad \alpha=B_0+B_i$
 $B_i=W_i l/\lambda, \quad X=x/l, \quad \beta=B_0B_i$
 $B_r=W_r l/\lambda, \quad \gamma_0=r_0/l, \quad \Delta\delta_{\infty}=(\delta_0-\delta_i)_{\infty}$
 $F_0=\alpha\tau/l^2, \quad \Theta=\theta(H_0l/\lambda), \quad \Delta\delta_{\gamma}=(\delta_0-\delta_i)_{\gamma}$
 添字
 i : 初期値に関する値
- (1) COWAN, R.D.: *J. Appl. Phys.*, **32**[7], 1363 (1961).
 (2) CERCEO, M., CHILDERS, H.M.: *ibid.*, **34**[5], 1445 (1963).
 (3) WHEELER, M.J.: *Brit. J. Appl. Phys.*, **16**[3], 365 (1965).
 (4) 小林清志, 熊田俊明: 本誌, **9**[2], 58 (1967).
 (5) 熊田俊明, 小林清志: 同上, **11**[8], 482 (1969).

研究論文

511. 液体ナトリウム用永久磁石型電磁流量計の研究, (I)

磁場端部効果に関する理論的考察

小林清志*, 工藤昭雄*

(1969年 4月3日 受理)

Study on Permanent-Magnet Flowmeter for Liquid Sodium, (I)

Theoretical Investigation of End Effect of Magnetic Field

By Kiyoshi KOBAYASI and Akio KUDO

This paper describes a theoretical study on the end effect of circular transverse field electromagnetic flowmeters.

It is shown that the voltage induced between the top and bottom electrodes is not strictly proportional to the mean velocity but is slightly influenced by the velocity distribution of the fluids, due to end effect.

The difference in the sensitivity of the flowmeter between turbulent and laminar flows is practically negligible when

(intensity of magnetic field/diameter of the pipe) > 1.5 .

Calculated results for the induced voltage are presented for the case where the pipe wall is a conductor and the magnetic field distribution arbitrary.

As examples the end effect, correction factors have been calculated for the case where liquid sodium and 304 stainless steel are used as fluid and pipe wall.

* 東北大学工学部 (Faculty of Eng., Tohoku Univ.)