研究論文

499. 原子炉燃料棒の流体振動に関する理論解析

生田 目 健*

(1968年 6月6日 受 理)

(1968年 8月24日 再受理)

*Theoretical Analysis of Fuel Rod Vibration Induced
by Parallel Coolant Flow*

By Ken NAMATAME

A theoretical analysis was made of fuel rod vibration in a nuclear reactor coolant channel with water flowing parallel to the rod axis. The analysis was based on the fact that the force inducing the fuel rod vibration is the pressure fluctuation of water flowing in the channel, and that this pressure fluctuation travels along the channel with a speed proportional to the mean water velocity.

Using the result of the present analysis, a comparison was made with previous experimental results. It was found that the present analysis could very well explain the observed behavior of rod vibration, and that it could further serve in deducing other characteristics so far remaining unclarified.

1. ま え が き

液体金属を冷却材とする高速炉の開発に際して解決しなければならない問題の1つに燃料棒の振動がある。燃料棒の振動は、燃料棒とその軸方向に流れる冷却材によってその流れに直角方向に誘発させられるもので、特に高速炉でこのような燃料棒の振動が問題となるのは、高速炉の燃料棒が他の型式の原子炉の燃料棒に比べて剛性の低いことに由来する。このような燃料棒の振動は、核的にも熱的にも望ましいことでなく、その解明と防止に努力が払われている。

燃料棒の、このような流体の流れによって起こされる振動に関する、これまでの研究については、すでに報告したが⁽¹⁾、ここではその主要点を示す。これまでの実験的な研究においては、燃料棒を模擬した中空あるいは中実の棒を、1本または数本流路内に配置し、そこに水を流すことによって実験を行なっている。棒の振動周波数は水の流速やその他の条件に無関係で、棒の水中における自然周波数あるいはそれに近い周波

数であるとするもの⁽²⁾や、空気中における自然周波数あるいはそれに近い周波数であるとするもの⁽³⁾、また振動周波数が水の流速に比例するとするもの⁽⁴⁾、など各研究者により一致していない。さらに、Pavlicaら⁽⁵⁾やQuinn⁽⁶⁾の実験データを検討すると、棒の振動周波数は常に単一周波数とは限らず、他の周波数成分も重合した不規則振動の場合もある。さらに著者が長さ100 cm、外径1 cmの亚克力棒を内径2.75 cmの流路の中心に置き、これに水を流して亚克力棒の振動を抵抗線歪計で検出し、それを電磁オシログラフに記録した結果からも、棒の振動が常に規則振動でないのが観察できた。棒の振幅の最大値を求める実験式はBurgreenらとPaidoussisにより提示されている。

Burgreenら⁽²⁾の実験式

$$\left(\frac{\delta}{2 \cdot D_h}\right)^{1.3} = 0.83 \times 10^{-10} \times (K \cdot \Gamma^{1/2} \cdot Q) \quad (1)$$

(1)式で K, Γ, Q は(2)式で与えられる無次元数である。

* 日本原子力研究所(Japan At. Energy Res. Inst.)

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{10 + \alpha \cdot l}{2 + \alpha \cdot l}, \quad \alpha \cdot l = \frac{-2 \cdot \beta \cdot l}{\tan \frac{\beta \cdot l}{2} + \tanh \frac{\beta \cdot l}{2}} \\ f_n &= \frac{(\beta \cdot l)^2}{2\pi \cdot l^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho_r A}} \\ \Gamma &= \frac{\rho_w \cdot \bar{v}^2 \cdot l^4}{E \cdot I}, \quad \Omega = \frac{\rho_w \cdot \bar{v}^2}{\mu \cdot \omega} \end{aligned} \right\} (2)$$

Paidoussis⁽⁵⁾ の実験式

$$\left(\frac{\delta}{2d_2} \right) = a^{-4} \cdot \frac{(u^2 \cdot \varepsilon^2 \cdot Re)^{4/5}}{1 + 2u^2} \cdot \left(\frac{\beta^{2/3}}{1 + 4\beta} \right) \times 10^{-5} \quad (3)$$

(3)式で a, u, ε, β は(4)式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= 2\pi f_n \cdot \left(\frac{(m+M) \cdot l^4}{E \cdot I} \right)^{1/2}, \quad u = \bar{v} \cdot l \cdot \left(\frac{M}{E \cdot I} \right)^{1/2} \\ \varepsilon &= \frac{l}{d_2}, \quad \beta = \frac{M}{M+m} \end{aligned} \right\} (4)$$

これらの実験式で、棒の振幅がその横方向の剛性と両端の支持条件とに關係するのは通常の棒の強制横振動の問題と同様であるが、ここで特徴的なのは、さらに流路の水力直径、水の平均流速、密度および粘性係数に關係することである。そしてこれまでの研究では、流路の水力直径、水の平均流速、密度および粘性係数の振幅に対する影響については、各研究者の実験結果は一致していない(第1表参照)。したがって、さらに棒の振幅に対するこれらの影響を明確にするには、流路内を流れる水がどのようにして棒の振動を誘発するか、その機構を明らかにし、さらにそれに基づく解析が必要である。本報では、このような棒の振動が流路内の水流のどのような作用で発生するかそのモデルを示し、それから得られる結果についてこれまでの研究と比較検討する。

第1表 これまでの研究の主な結果

	流速の影響	粘性係数の影響	水の密度の影響	水力直径の影響
Burgreenらの研究 ⁽²⁾	$\bar{v}^{2.3}$	$\mu^{-0.77}$	$\rho_w^{1.15}$	D_h^0
Pavlicaらの研究 ⁽³⁾	$\bar{v}^{2.0} \sim \bar{v}^{3.0}$	小さい	—	—
Quinnの研究 ⁽⁴⁾	$\bar{v}^{3.0}$	関係しない	関係しない	—
Paidoussisらの研究 ⁽⁵⁾	$\bar{v}^{2.4} / (C_1 + C_2 \bar{v})^{2.0}$	$\mu^{-0.8}$	—	$D_h^{0.8}$

II. 理論と解析

ここでは、円形断面の流路内に丸棒が同心状におかれ、そこを水が流れる場合を考える。(第1図参照)

1. 棒の振動を誘発する原因

第1図のように置かれた棒が、どのような外力の作用で振動するかその原因をいくつかあげることができる。例えば、谷⁽⁶⁾により紹介されているように、魚は水中を泳ぐとき体をくねねすが、棒の場合はこれと全く逆の作用で振動するとして解析する方法、あるいは棒のわずかの偏心で流路両側の断面積が非対称となり両側で水の流動条件が変わり、そのために棒が振動するとして解析する方法⁽¹⁾などがある。しかし、このようなことから棒の振動を説明するのは困難で、ここでは次のような解析モデルにより説明を試みる。

第1図 流路内で振動する棒

(1) 流路内の水の流れは乱流で、壁面の圧力 $p(t)$ はその時間平均値 $\bar{p}$ に対して変動分 $p'(t)$ を含んでおり $p(t) = \bar{p} + p'(t)$ のように示され⁽⁷⁾、この圧力の変動分 $p'(t)$ が棒の振動の外力として働く。

(2) この圧力変動 $p'(t)$ は流路内を水の平均流速 $\bar{v}$ の0.9倍の速さで移動する。 $(v_p = 0.9\bar{v})$ この点については次項で考察)

このような性質の外力が作用したときの外力と棒の振動との関係はすでに知られており⁽⁸⁾、(5)式のように示される。

$$\frac{S_p(x, f)}{S_p(f)} = \left| \int_0^l \alpha_{xx_A} e^{i\omega x_A / v_p} dx_A \right|^2 \quad (5)$$

$S_p(f)$ は圧力変動 $p'(t)$ のスペクトル分布、 $S_p(x, f)$ は棒の $x=x$ における振動のスペクトル分布、 α_{xx_A} は Receptance と呼ばれ、 $x=x_A$ に外力 $P_0 \cdot e^{i\omega t}$ が作用したときの棒の $x=x$ における振動解を $y_0 \cdot e^{i\omega t}$ とすると $\alpha_{xx_A} = y_0 / P_0$ で示される(第2図参照)。流路内の水の流れの圧力変動は不規則振動であり(例えば第3図参照)、したがって、棒についても不規則振動が予想されるので、(5)式のような不規則振動解析の関係式が必要となる。

第2図 棒の座標系

(5)式から棒の振動特性 $S_p(x, f)$ を知るには、圧力変動のスペクトル特性 $S_p(f)$ と右辺の絶対値の性質を解明する必要がある。この絶対値は Receptance α_{xxA} を知れば、定積分を実行して容易に求めることができる。

2. 流路内の乱流の性質

2重管内を水が流れる場合の水流の圧力変動に関する研究は見当たらない。したがって、ここではその流動特性の似ている円管内流の結果から2重管内流の場合を推定する。

管内流の水流の圧力変動に関する研究は少なく、Corcos⁽⁹⁾ と Liu⁽¹⁰⁾ が行なっている。第3図は Corcos が管内流における管壁での圧力変動を測定し、そのスペクトル分布を求めたものである。第3図で低周波領域 $f \cdot D/\bar{v} < 0.1$ では測定データのバラツキが大きい。さらに、より低周波領域 $f \cdot D/\bar{v} < 0.01$ については明らかでないが、乱流の性質からしてこの範囲ではスペクトル密度は急激に減少すると見做してよい。いま $f \cdot D/\bar{v}$ の 0.01~40 の範囲を調べてみる。 $D=1$ cm, $\bar{v}=5\sim 10$ m/s とすると、 $5\sim 10$ Hz $< f < 2,000\sim 4,000$ Hz となり、これまでに知られている棒の振動周波数領域を含み、このような圧力変動が棒の振動の外力として可

第3図 管内流における管壁の圧力変動のスペクトル分布

能性の強いことを示している。これまでに全周波数領域にわたってスペクトル分布を求める式は得られていないが、棒の振動が関係すると考えられる周波数領域数10~数100Hzに限ってみれば、(6)式のように示されるとしてよい。ただし、(6)式の $S_p(f)$ は $R_p(\varphi)$ を圧力変動 $p'(t)$ の自己相関関数とすれば、(7)式で定義される。

$$\frac{S_p(f) \cdot \bar{v}}{\tau_w^2 \cdot D} = 0.8 \times \left(\frac{f \cdot D}{\bar{v}} \right)^{-0.5} \quad (6)$$

$$S_p(f) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\infty R_p(\varphi) \cdot \cos 2\pi f \varphi \cdot d\varphi \quad (7)$$

(6)式で壁面におけるせん断応力 τ_w によく知られた関係式(8)を用い、さらに内径 D を水力直径 D_h に置き換えることによって(9)式を得る。今後2重管内流の圧力変動のスペクトル分布を表わす関係式として(9)式を用いることにする。

$$\tau_w = 0.079 \cdot Re^{-0.25} \cdot \left(\frac{\rho_w \cdot \bar{v}^2}{2} \right) \quad (8)$$

$$S_p(f) = 1.25 \times 10^{-3} \cdot (\rho_w \bar{v}^2)^2 \cdot \left(\frac{\nu}{f \cdot \bar{v}^2} \right)^{0.5} \quad (9)$$

第4図は圧力変動の強さのレイノルズ数による影響を示したもので⁽⁹⁾, $Re \geq 5 \times 10^4$ ではゆるい右下りの直線で示される。圧力変動の棒への作用の仕方は動的なもので、この圧力による棒の変位を簡単に求めることはできないが、このような圧力変動が棒の振動の外力の妥当な強さとなっているか否かの概算のためには、棒にこの圧力変動が静的に作用したと仮定して棒の変位を求めるのは役立つ。いま記号 $\langle \sqrt{p'^2} \rangle$ は圧力変動の2乗平均値(root mean square value)を表わすものとし、 $\langle \sqrt{p'^2} \rangle / \tau_w = 2$, $Re = 10^5$, $\bar{v} = 10$ m/s, $l = 100$ cm, $d_1 = 9\phi$, $d_2 = 10\phi$ のステンレス鋼管を両端支持としてその最大変位を求めると $(\delta/2)_{st} \approx 0.26$ mm となり、Burgreen の実験式(1)からの結果 $(\delta/2)_{Bur} \approx 0.19$ mm と比較すると両者の値は近く、前述のスペクトル分布特性と考え合わ

第4図 管内流における管壁の圧力変動の2乗平均値

せると、水の流動の圧力変動が棒の振動の外力とする考えの妥当性を裏付けている。

(5)式の解析でさらに重要な点は、圧力変動 $p'(t)$ の流路内の移動速度である。Corcos⁽⁹⁾ はこの移動速度を水の平均流速との比 $v_p/\bar{v}$ で求めており、それは振動周波数の関数であるが、ここで関係する数10~数100 Hz の範囲では $v_p/\bar{v}=0.9$ と見做してよい。

3. 水中における棒の横振動

水中での棒の横振動について、その自然周波数については鬼頭⁽¹¹⁾によって求められているが、本報では異った方法で求めることができたので報告する。さらに強制振動についてはその解を求めた文献は見当らない。

(1) 自然周波数

棒の水中での自然振動の運動方程式では、通常の慣性力と弾性力のほかに水の棒に作用する抵抗力を考慮しなければならない。第5図は振動する棒の横断面を示したもので、棒がy方向に振動するとき棒の表面に働く圧力分布 p_θ は(10)式で与えられる⁽¹²⁾。

第5図 振動する棒に働く圧力

したがって、棒の単位長さ当りの抵抗力 p_w は(11)式のようにして求められる。

$$p_\theta = p_0 + \frac{\gamma_w}{2g} \ddot{y}^2 (4 \cos^2 \theta - 3) + \frac{\gamma_w}{g} \cdot r_2 \cdot \ddot{y} \cdot \cos \theta \quad (10)$$

$$p_w = \int_0^{2\pi} p_\theta \cdot r_2 \cdot \cos \theta \cdot d\theta = \frac{\gamma_w}{g} \cdot r_2^2 \cdot \pi \cdot \ddot{y} \quad (11)$$

$$\text{ただし、} \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

(11)式の抵抗力を考慮した棒の運動方程式は(12)式となる。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{g}{A \cdot \gamma_r} \cdot p_w = 0 \quad (12)$$

棒が両端支持の場合の支持端条件 ($y|_{x=0} = 0$, $\partial^2 y / \partial x^2|_{x=0} = 0$) を満たす正規直交関数系で(12)式の解を求めることにすると(13)式となり、(11)、(12)式

と共に棒の自然周波数 ω_{nm} を決める(14)式が得られる。(14)式で $\langle \rangle = 0$ とすることによって、支持端における水中での棒の自然周波数が(15)式のように求められる。

$$y = \sum_m A_m \cdot \sin \omega_{nm} \cdot t \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (13)$$

$$\sum_m A_m \cdot \left\{ -\omega_{nm}^2 + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 \cdot a^2 - \left(\frac{\pi r_2^2 \cdot \gamma_w}{A \cdot \gamma_r} \right) \omega_{nm}^2 \right\} \cdot \sin \omega_{nm} t \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} = 0 \quad (14)$$

$$f_{nm} = \frac{\omega_{nm}}{2\pi} = \frac{(m\pi)^2}{2\pi l^2} \cdot a \cdot \left(1 + \frac{\pi r_2^2 \cdot \gamma_w}{A \cdot \gamma_r} \right)^{-1/2} \quad m=1, 2, \dots \quad (15)$$

棒が両端固定の場合は、その支持端条件 ($y|_{x=0} = 0$, $\partial y / \partial x|_{x=0} = 0$) を満たす正規直交関数系は(16)式で与えることができる。(16)式で固有値 k_{ml} は $\cos k_{ml} \cdot \cosh k_{ml} = 1$ の解で α_m と共に第2表のように与えられる⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。

第2表 両端固定の場合の固有値

m	α_m	k_{ml}
1	0.9825	4.730041
2	1.0008	7.853205
3	1.0000	10.99561
m	1.0000	$\left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$

両端支持の場合と同様に(11)、(12)式と共に棒の自然角周波数 ω_{nm} を決める(17)式が得られ、ここで $\langle \rangle = 0$ とすることによって固定端の水中での棒の自然周波数 f_{nm} が(18)式のように求められる。

$$y = \sum_m A_m \cdot \sin \omega_{nm} t \cdot X_m(x) \quad \left. \begin{aligned} X_m(x) &= (\cosh k_m x - \cos k_m x) \\ &\quad - \alpha_m (\sinh k_m x - \sin k_m x) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\sum_m A_m \cdot \left\{ -\omega_{nm}^2 + a^2 \cdot k_m^4 - \left(\frac{\pi r_2^2 \cdot \gamma_w}{A \cdot \gamma_r} \right) \omega_{nm}^2 \right\} \cdot \sin \omega_{nm} t \cdot X_m(x) = 0 \quad (17)$$

$$f_{nm} = \frac{\omega_{nm}}{2\pi} = \frac{(k_m l)^4}{2\pi l^2} \cdot a \cdot \left(1 + \frac{\pi r_2^2 \cdot \gamma_w}{A \cdot \gamma_r} \right)^{-1/2} \quad m=1, 2, \dots \quad (18)$$

(15)、(18)式を空気中の棒の自然周波数⁽¹⁵⁾と比べると、項 $(\pi r_2^2 \gamma_w / A \cdot \gamma_r)$ が水の抵抗の影響を表わしており、水中における棒の自然周波数が空気中より小さくなることを示している。

(2) 強制振動の解

空気中での棒の強制振動については、すでに一般的

問題として取り扱われているが⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾、水中の場合についてはその解析例がないので、文献(14)を参考に解を求める。

第2図のように $x=x_A$ に外力 $p_0 e^{i\omega t}$ が作用したときの棒の運動方程式は、慣性項、弾性項、外力項のほか水の抵抗による影響を考慮しなければならない。この影響については、水中の棒の自然周波数を求めるとき示したが、自然振動の場合は棒の振動周波数が解として求めるものであるのに対し、強制振動では棒の振動数は外力の振動数と同一で棒の振幅が求めるものとなるから、水の棒への抵抗も自然振動の場合と異った形で求められる。Rosenhead⁽¹⁶⁾によれば、棒が角周波数 ω で振動するとき、水による抵抗は(19)式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} p_w &= -\frac{\pi r_s^2 \cdot \gamma_w \cdot \dot{y}}{g} \cdot i\omega(\kappa - i\kappa'), \\ \kappa &= 1 + 2\sqrt{\frac{2}{\beta}}, \quad \kappa' = 2\sqrt{\frac{2}{\beta}} + \frac{2}{\beta}, \quad \beta = \frac{\omega \cdot r_s^2}{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$y(x, t) = \sum_m \phi_m(t) \cdot X_m(x) \quad (20)$$

棒の強制振動の形式解は(20)式で与えられる。ここで $X_m(x)$ は棒の支持端条件を満たす正規直交関数系で、両端支持では $\sin(m\pi x/l)$ 、両端固定の場合は(16)式の第2の式で与えられる。関数 $\phi_m(t)$ は文献(14)と同様の方法で棒の弾性、慣性、外力および水の抵抗による仮想仕事を考えることによって決まる。すなわち、このような仮想仕事を考えることによって $\phi_m(t)$ を決める方程式(21)が得られる。(21)式で左辺第2項の水の抵抗力による仮想仕事は(19)式と共に定積分 $\int_0^l p_w \delta y \cdot dx$ から求められる。(21)式の解として(22)式が得られ、これより(20)式と共に解(23)式が決まる。ここで ω'_{nm} は棒の空気中における第 m モードの自然角周波数である。

$$\begin{aligned} & \frac{A \cdot l \cdot \gamma_r}{g} \cdot \ddot{\phi}_m + \frac{\pi r_s^2 \cdot l \cdot \gamma_w}{g} \cdot i\omega(\kappa - i\kappa') \cdot \dot{\phi}_m \\ & + \frac{(k_m l)^4}{l^3} \cdot E I \cdot \phi_m = P_0 e^{i\omega t} (X_m)_{x=x_A} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{ただし, } \dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}, \quad \ddot{\phi} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$\begin{aligned} \phi_m(t) &= \left(\frac{g}{A \cdot l \cdot \gamma_r} \right) \\ & \cdot \frac{(X_m)_{x=x_A}}{(\omega'^2_{nm} - \omega^2) - \omega^2 \frac{\pi r_s^2 \cdot \gamma_w}{A \cdot \gamma_r} (\kappa - i\kappa')} \cdot P_0 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (22)$$

$$y(x, t) = \left(\frac{g}{A \cdot l \cdot \gamma_r} \right) \cdot P_0 e^{i\omega t}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \sum_m \frac{\left\{ \omega'^2_{nm} - \omega^2 \left(1 + \kappa \frac{\pi r_s^2 \cdot \gamma_w}{A \cdot \gamma_r} \right) \right\} - i \left(\omega^2 \kappa' \frac{\pi r_s^2 \cdot \gamma_w}{A \cdot \gamma_r} \right)}{\left\{ \omega'^2_{nm} - \omega^2 \left(1 + \kappa \frac{\pi r_s^2 \cdot \gamma_w}{A \cdot \gamma_r} \right) \right\}^2 + \left(\omega^2 \kappa' \frac{\pi r_s^2 \cdot \gamma_w}{A \cdot \gamma_r} \right)^2} \\ & \cdot (X_m)_{x=x_A} \cdot (X_m)_{x=x_A} \end{aligned} \quad (23)$$

(23)式から Receptance $(\alpha_{xxA} = y(x, t)/P_0 e^{i\omega t})$ は容易に求まり、さらに(5)式右辺の絶対値を求めるため定積分を実行した結果を(24)式に示す。(24)式で ζ_{2m}, ζ_3 は(25)式で与えられ、 ζ_{1m}, Re_m, Im_m は両端支持および両端固定に対してそれぞれ(26), (27)式となる。

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^l \alpha_{xxA} \cdot e^{i\omega x_A / v_p} \cdot dx_A \right|^2 \\ & = \left(\frac{g}{A \cdot l \cdot \gamma_r} \right)^2 \left\{ \left(\sum_m \zeta_{1m} \frac{(\zeta_{2m} \cdot Re_m + \zeta_3 \cdot Im_m)}{(\zeta_{2m}^2 + \zeta_3^2)} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\sum_m \zeta_{1m} \frac{(\zeta_{2m} \cdot Im_m + \zeta_3 \cdot Re_m)}{(\zeta_{2m}^2 + \zeta_3^2)} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{2m} &= \omega'^2_{nm} - \omega^2 \left(1 + \kappa \frac{\pi r_s^2 \cdot \gamma_w}{A \cdot \gamma_r} \right) \\ \zeta_3 &= \omega^2 \kappa' \frac{\pi r_s^2 \cdot \gamma_w}{A \cdot \gamma_r} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

両端支持

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{1m} &= \sin \frac{m\pi x}{l} \\ Re_m &= \frac{2m\pi \cdot l \cdot v_p^2}{\{(m\pi v_p)^2 - (\omega l)^2\}} \cdot \left\{ (-1)^m \cdot \cos \frac{\omega l}{v_p} - 1 \right\} \\ Im_m &= \frac{2m\pi \cdot l \cdot v_p^2}{\{(m\pi v_p)^2 - (\omega l)^2\}} \cdot \left\{ (-1)^m \cdot \sin \frac{\omega l}{v_p} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

両端固定

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{1m} &= (\cosh k_m x - \cos k_m x) - \alpha_m (\sinh k_m x - \sin k_m x) \\ Re_m &= \frac{1}{\{k_m^2 + (\omega/v_p)^2\}} \left\{ k_m \cdot \cos \frac{\omega l}{v_p} \cdot (\sinh k_m l \right. \\ & \quad - \alpha_m \cdot \cosh k_m l) + \frac{\omega}{v_p} \cdot \sin \frac{\omega l}{v_p} (\cosh k_m l \\ & \quad - \alpha_m \sinh k_m l) \Big\} \\ & \quad + \frac{1}{\{k_m^2 - (\omega/v_p)^2\}} \left\{ \frac{2\alpha_m \cdot k_m^3}{\{k_m^2 + (\omega/v_p)^2\}} \right. \\ & \quad \left. - \sin k_m l \left(k_m \cdot \cos \frac{\omega l}{v_p} + \alpha_m \cdot \frac{\omega}{v_p} \cdot \sin \frac{\omega l}{v_p} \right) \right\} \\ Im_m &= \frac{1}{\{k_m^2 + (\omega/v_p)^2\}} \left\{ k_m \cdot \sin \frac{\omega l}{v_p} \cdot (\sinh k_m l \right. \\ & \quad - \alpha_m \cdot \cosh k_m l) - \frac{\omega}{v_p} \cdot \cos \frac{\omega l}{v_p} \cdot (\cosh k_m l \\ & \quad - \alpha_m \sinh k_m l) \Big\} \\ & \quad + \frac{1}{\{k_m^2 - (\omega/v_p)^2\}} \left\{ \frac{2k_m (\omega/v_p)}{\{k_m^2 + (\omega/v_p)^2\}} \right. \\ & \quad \left. - \sin k_m l \cdot \left(k_m \cdot \sin \frac{\omega l}{v_p} - \alpha_m \cdot \frac{\omega}{v_p} \cdot \cos \frac{\omega l}{v_p} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

III. 結果の検討

棒の振動特性は(5)式で、流路内の水の流れの圧力変動のスペクトル分布を表わす(9)式と、水中における棒の横振動の解から導かれた(24)式と共に求められた。ここで得られた結果が、これまでに実験で得た棒の振動の性質をどのように説明するか大切な点である。そのためには、ここで導いた解が複雑で各種パラメータの棒の振動に対する影響を式から直接判定できないので、具体的問題として数値計算によらなければならない。計算例として $l=100\text{ cm}$, $d_1=9\phi$, $d_2=10\phi$, $D_h=10\text{ mm}$ のステンレス鋼管について、その支持区間の中心 $x=l/2$ における棒の振動特性を求めて従来の実験結果と比較する。計算はすべて電子計算機 (IBM 7044) で行なった。

1. 周波数特性

第6図は、水の平均流速が 8.0, 9.0 m/s のときの棒の振動のスペクトル分布を両端支持の場合について計算した結果で、破線の部分は流路内の流れの圧力変動が不明な領域を示しており、この破線の部分は第II-2節で述べたような理由で $f \rightarrow 0$ に従い $S_p(f) \rightarrow 0$ となる。ここでは実線の周波数領域について考察する。第6図から、棒の振動スペクトルは周期的山をくりかえしながら減少してゆくことがわかる。解(24)式は両端支持の場合に $f^* = mv_p/2l$ (m : 奇数) で $\%$ の不定形となるが、ここで確定値を持つことは確認してある。さらに、この f^* の近くに谷が位置することがわかった。第6図で水の流速に関係なく周期的山と異なる鋭いピークが棒の水中での自然周波数 $f_{n1}=20.5\text{ Hz}$ (15式) の位置にある。これは棒の振動でこの近くの周波数成分が支配的なことを示し、その位置は(24)式で $\zeta_{nm}=0$ としたときで、それが棒の水中における第1モードの自然周波数と一致することは(24)式からも容易にわかる。第6図のこのような鋭い山は、棒が選択共

第6図 棒の振動スペクトル

振を起こしてほとんどその水中での自然周波数に等しい周波数成分だけで振動することが予想される。しかし、このようなピークの位置が水の流速を変えることによって、ちょうど周期的な谷と一致したとき(例えば第6図の $v=9.0\text{ m/s}$) ピークの値は小さくなる。このとき棒の振動は1つの支配的な振動周波数成分を持たないので、棒の振動波形は複雑になることが予想される。厳密には本文における解析モデルと同一条件ではないが、これまでの実験で棒の規則的振動と不規則的振動が観察されているが、この実験事実も上のような解析結果から説明することもできよう。棒が不規則振動するのは、棒の水中における自然周波数と周期的谷との位置が一致したとき、すなわち(28)式で m に任意の奇数を代入して成り立つときで、さらに(28)式を波長を λ として変形すると(29)式が得られた。これから、選択共振は、水の圧力振動で棒の水中における自然周波数とちょうど等しい成分が第7図(a)のように作用したときは起こらず、第7図(b)のように作用したときに起こることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} f_m &= \frac{mv_p}{2l} & (\text{両端支持}) \\ f_m &= \frac{v_p}{2l} \left(m + \frac{1}{2} \right) & (\text{両端固定}) \end{aligned} \right\} (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{2l}{\lambda} &= m & (\text{両端支持}) \\ \frac{2l}{\lambda} &= \left(m + \frac{1}{2} \right) & (\text{両端固定}) \end{aligned} \right\} (29)$$

両端固定についても、そのスペクトル特性は全く同じである。

第7図 棒への水流の圧力変動の作用

2. 水の流速の影響

第8図は、両端支持の場合について、水の流速による棒の共振周波数における棒の振動スペクトル成分 $S_p(l/2, f_{n1})$ の変化を示したもので、その値は不等周期的山をくりかえしながら急激に増大してゆく。谷の位置は(28)式の左辺を f_{nm} におきかえることによって求められ、棒の水中における自然周波数と水の流速から決まるこのような谷でも棒は振動しないわけではな

第8図 棒の振動スペクトルの
水の流速による変化

い。実際は第6図に見るような周期的山の効果によって、振動波形は複雑となるが棒は振動する。このような効果を考慮しても第8図の谷が完全に埋まるとは考えられず、いずれにしても凹凸をくりかえしながら増大することには変わりない。ここで、棒の振動スペクトルに対する流速の影響を見るため、便宜上その山の頂点を結んでその勾配を求めると、両端支持では $S_y(f_{n1}) \propto \bar{v}^{0.90}$ 、両端固定では $S_y(f_{n1}) \propto \bar{v}^{0.50}$ となり、 $S_y(f) \propto \langle y^2(t) \rangle$ の関係を考慮すると棒の振動の2乗平均値は両端支持で $\langle \sqrt{y^2(t)} \rangle \propto \bar{v}^{0.45}$ 、両端固定で $\langle \sqrt{y^2(t)} \rangle \propto \bar{v}^{0.25}$ が導かれる。この結果は、これまでに実験で求められた $\bar{v}^{2.0} \sim \bar{v}^{3.0}$ に比例するとする結果(第1表参照)よりも大きい値である。しかし、例えば Burgreen⁽²⁾ の実験に見られるように、棒の最大振幅を流速に対して調べた結果では、両端支持の場合は $\bar{v}^{2.25} \sim \bar{v}^{3.25}$ 、両端固定の場合で $\bar{v}^{2.70} \sim \bar{v}^{5.10}$ の間にあり、これまでの実験でもその比例指数は確定したもの

でない。また、この指数が棒の支持条件と相関のあることがわかり、ここでの結果とその傾向が一致する。棒のすべての支持条件は両端支持と両端固定の間にあるから、棒の振幅は $\bar{v}^{3.45} \sim \bar{v}^{4.25}$ に比例して固定端に近いほど大きい値をとる。

3. その他の因子の影響

棒の支持条件と剛性の影響とは、解(24)式の ξ_{nm} における棒の自然角周波数 $\omega_{nm}^{1-2.0}$ に比例する。この傾向は Quinn⁽⁴⁾ や Paidoussis⁽⁶⁾ の結果に近いもので、さらに $\omega_{nm}^2 \propto (k_n l)^4 \cdot (EI)$ の関係を考慮すると、棒の振幅は固有値の-2.0乗、剛性の-0.5乗に比例し、これは Burgreen⁽²⁾ の結果に近い。

水の粘性係数の棒の振幅に対する影響は、計算から $\mu^{-0.46} \sim \mu^{-0.55}$ に比例して支持端に近い支持条件ほどその指数の絶対値は大きい。これまでの実験では $\mu^{-0.77} \sim \mu^{-0.80}$ が得られており、本報での結果と近い値である。

本報では、流路水力直径の棒の振幅に対する影響はないとの結果が得られたが(第(9)式参照)、これは本文の解析が、棒の振動に対する水の抵抗は棒の周囲が充分広いとして考慮したため、実際の流路のように外管との間隙が狭い場合は、その外管の影響を考慮する必要がある。また、流路内の水の流れの圧力変動について円管内流の結果を流用したが、今後2重管内流の圧力変動に関する資料が得られれば、さらに実際に近い解析結果が得られるものと期待される。

IV. ま と め

高速炉の燃料要素に見られるような、流路内の流れに平行に置かれた棒の振動機構を提示し、その解析から得られた結果をこれまでの実験結果と比較し、ここでの理論によりこれらがよく説明できた。さらに、これまでの研究で指摘されていない、棒の支持条件の差による水の流速の影響の変化についても明らかにした。

最後に、本研究全般にわたりご指導いただいた佐野川好母氏、さらに数式の確認、電子計算機のプログラム作成および予備実験にご協力くださった石黒幸雄、斉藤直之、大内光男、白井甫積の諸氏に感謝の意を表します。

〔記号〕

A: 棒の横断面積(中空棒 $= \pi(r_2^2 - r_1^2)$ 、中実棒 $= \pi r_2^2$)

$a^2 = EI/A\rho r$, D_h : 流路の水力直径
 d_1, d_2 : 棒の内径と外径 ($r_1 = d_1/2$, $r_2 = d_2/2$)
 E : 棒の縦弾性係数, f : 周波数(Hz)
 f_n : 棒の自然周波数(Hz), g : 重力の加速度
 I : 棒の断面2次モーメント, $i = \sqrt{-1}$
 l : 棒の支持区間の長さ
 M : 水の流路内の単位長さ当りの質量
 m : 棒の単位長さ当りの質量
 $p'(\epsilon)$: 流路内の水流の壁面での圧力変動分
 Re : レイノルズ数, $= \bar{v} \cdot D_h / \nu$, t : 時間
 $\bar{v}$: 流路内の水の平均流速
 $\bar{v}(r)$: 流路内の水の時間平均流速分布
 v_p : 流路内の圧力変動の移動速度
 β : 棒の支持条件によって決まる固有値
 δ : 棒の全振幅, γ : 比重量 ($= \rho \cdot g$)
 ρ : 密度, ω : 角周波数 ($= 2\pi f$)
 ω_n : 棒の自然角周波数 ($= 2\pi f_n$)
 μ : 水の粘性係数, ν : 水の動粘性係数
 τ_w : 壁面のせん断応力 ($= -\mu(d\bar{v}(r)/dr)_{r=r_w}$)

添字 w : 水の値, r : 棒の値

— 参 考 文 献 —

(1) 生田目 健, 佐野川好母, 大内光男: *JAERI-memo*

- 2706, (1967).
- (2) BURGREN, D., BYRNES, J.J., BENFORADO, D. M.: *Trans. A.S.M.E.*, **80**, 911 (1958).
 - (3) PAVLICA, P.T., MARSHALL, R.C.: *Nucl. Eng. Design*, **4**, 54 (1966).
 - (4) QUINN, E.P.: *GEAP-4059*, (1962).
 - (5) PAIDOUSSIS, M.P.: *AECL-2225*, (1965).
 - (6) 谷 一郎: 科学, **34**, 471 (1964).
 - (7) HINZE, J.O.: "Turbulence", 13 (1959), McGraw-Hill.
 - (8) ROBSON, J.D.: "Random Vibration", 89 (1964), Edinburgh Univ. Press.
 - (9) CORCOS, G.M.: *J. Fluid Mech.*, **18**, 353 (1964).
 - (10) LIU, H.: *A.I.Ch.E. J.*, **13**, 644 (1967).
 - (11) 鬼頭史城: 造船協会論文集, 116号, 100 (昭39).
 - (12) LANDAU, L.D., LIFSHITZ, E.M.: "Fluid Mechanics", 26 (1963), Pergamon Press.
 - (13) JAKOBSEN, L.S., AYRE, R.S.: "振動工学", (昭36), 丸善.
 - (14) TIMOSHENKO, S.: "Vibration Problems in Engineering", (1955), Van Nostrand.
 - (15) 日本機械学会: 機械工学便覧, 改訂第4版, (1960).
 - (16) ROSENHEAD, L.: "Laminar Boundary Layers", 390 (1963), Oxford Univ. Press.
 - (17) KNUDSEN, J.G., KATZ, D.L.: "Fluid Dynamics and Heat Transfer", 153 (1958), McGraw-Hill.

☆ 本 誌 投 稿 の 手 引 ☆

- 一般投稿は研究論文・技術報告・資料・ショートノートを原則とし、必ず会員の資格を有する。
- 掲載範囲は、原子力研究に関連する凡ゆる部門を含め、とくに限定しない。内容はオリジナルものに限る。
- 刷上り6頁(ショートノートは2頁)以内は無料(有料頁は1頁当り実費約5,000円)とする。和文は「会誌」に、欧文はJournalに掲載される。
- 必ず所定の原稿用紙(480字詰め、約4枚で1頁)を使用し、投稿規程に従って執筆する。ただし、欧文は、適宜に厚手のタイプ用紙に2段送り、1枚約25行にタイプする。(約3枚で1頁)和・欧文とも所定の原稿表紙(無料)を添付する。図面はそのまま製版できるよう必ず墨入れトレースする。(鮮明なゼロックス可)
- 投稿希望者は事務局へ連絡すれば、原稿用紙(30枚綴1部100円、〒45円)、投稿規程を送付する。
- 和・欧文を問わず表題・抄録・所属機関名などを和・英両文で正確に書いて添付する。
- 別に締切り日は設けない。原稿受理次第「受

理通知」を本人に送る。原稿は当該分野担当の査読委員の査読に回わり、次回以後の編集委員会において採否を審議する。査読通過および掲載巻号は決定次第通知される。

- 論文は査読通過後受理順に掲載される。(掲載まで欧文約3〜4ヵ月、和文約8〜9ヵ月)
- 別刷は掲載論文1篇につき30部まで無料で送付する(30部以上希望の時は、実費1部につき、50〜100部で4頁以内50円、5〜8頁60円)。
- 査読・審議の結果、内容の修正、文章の短縮、または図面の書直しを要求されたり、時には掲載を遠慮いただく場合があるので、予めご了承願いたい。

欧文の修文・添削についてはすべて著者負担とする。(和訳を要求される場合もある)

- 修正のため返却した原稿は6ヵ月以内に再提出しないと撤回とみなされる。
- 談話室欄(1〜2頁)には、随時、随意に気軽に寄稿を歓迎する。
- その他、詳細は事務局へお問い合わせ下さい。