研究論文

562. 有限な応答時間を持つ検出器による
バースト状放射線の計測

沢村 貞史*, 小澤 保知*

(1971年 2月1日 受理)

(1971年 10月11日 再受理)

*Measurement of Nuclear Radiation Bursts with Detector
Having Finite Response Time*

By Sadashi SAWAMURA and Yasutomo OZAWA

Pile-up phenomena arising in radiation burst measurements have been studied. These phenomena are treated as a non-stationary stochastic process, and the following results have been derived.

- (1) If the single radiation response of the detector is exponential with time constant τ , the height of the resultant pulse due to the pile-up process satisfies the Kolmogorov-Feller equation. If the response exhibits finite rise time, the piled-up pulse height expressed by the sum of many single radiation responses satisfies the non-stationary shot noise process.
- (2) The expected value of piled-up pulse, when treated as a noise in energy spectral measurement, is proportional to the total energy of a burst. The expected value of piled-up pulse is also directly related to the single radiation response of the detector, so that the pile-up phenomena can be used to measure the radiation field quantities and to determine the single radiation response.
- (3) The distribution of piled-up pulse height approaches the special Gaussian distribution as λ (a mean value of arriving particles in unit time) increases, and the deviation of the piled-up pulse heights from their expected values becomes negligible, independently of the energy spectrum of incident radiation particles.

I. ま え が き

線形電子加速器等から発生する瞬間強度の高い放射線バーストをパルス応答型検出器で測定するさい、使用する検出器が不感時間を有するか否かにより、それぞれ以下のような問題が生ずる。

- (1) 不感時間を有している型の検出器(GM管等)の場合には数え落し
- (2) 不感時間を有していない型の検出器(電離箱やシンチレーション検出器等)の場合には積重なり現象**

(1)に関しては、先に小澤らが数え落しの補正公式を導いた⁽¹⁾。本報は(2)の積重なり現象(pile-up)を、確

率論を用いて解析したものである。

積重なり現象は、検出器に固有な応答時間 Δ (1個の放射線粒子を検出したときの出力パルスの振幅が明らかにゼロではない時間)内に、1個以上の放射線粒子が検出器に到来することにより生ずる。このような現象は、バースト状放射線のみならず、高強度の放射線を測定するさいに一般的に生ずる。しかし、バースト状放射線の場合には、放射線粒子集団がパルスのに

* 北海道大学工学部(Faculty of Eng., Hokkaido Univ.)

** (2)に属する電離箱の場合には、再結合効果⁽²⁾を考慮する必要があるが、ここでは簡単のために考慮していない。

変調されているため同一バースト内の各放射線粒子の応答が積重なり合い、入射放射線バーストに対応するパルスを発生するのが特色である。

積重なり現象は、放射線粒子集団のエネルギー・スペクトラムの測定結果に大きな歪みを与える。そのため、従来は積重なりパルスを除去する電子回路の開発が主として研究されたが⁽³⁾⁽⁴⁾、積重なり現象の解析的な取扱いは充分なされていない。Souček ら⁽⁵⁾は、エネルギー・スペクトラム測定の観点から、積重なり現象を雑音発生過程とみなし、この雑音振幅の定常分布(時刻 t に依存しない分布)を、Cambell や Rice⁽⁶⁾が研究したショット雑音モデルを用いて求めている*。

積重なりパルスの振幅の分布が定常に達する(分布が時刻に依存しなくなる)のは、積重なりが生じ始めてから Δ (検出器の応答時間)以上の時間を経た後である。したがって、放射線バーストの持続時間が Δ と同程度かあるいは数倍である放射線バーストの積重なり現象に対しては、Cambell や Rice の解析法を直接利用することができない。

本報では、積重なりパルスの振幅の分布が時刻 t に依存する非定常としての解析を行い、従来、雑音として取り扱われた積重なりパルス波高から放射線バーストの強度、全エネルギー等を測定し得ることを示し、それらの分散値を与えた。また、積重なり現象が生じているときの検出器の出力パルスの波形の立上がり特性と検出器の固有応答関数(single radiation response)との関係を導いた。バーストの持続時間が Δ に較べて充分長い場合、積重なりパルス波高の分布はバーストの持続時間内に定常に達する。この定常分布は、放射線粒子集団の到来率が高くなるにつれ、その粒子集団のエネルギー・スペクトラムとは無関係に、平均値に対して揺ぎの大きさを無視し得る、Gauss 分布に漸近することを明らかにした。

II. 指数応答型検出器における積重なり現象

時刻 $t=0$ に、エネルギー ε なる放射線粒子が 1 個検出器に到来したとき、時刻 $t=t$ での出力パルスの振幅 $f(x, t)$ が、

$$f(x, t) = x \exp(-t/\tau) \quad (1)$$

と表わせる時、その検出器を指数応答型検出器、また $f(x, t)$ をその検出器の固有応答関数と呼ぶ。 x は $t=0$ のときの振幅であり、また τ は x に独立な定数である。放射線は全エネルギーを検出器内で失うと仮定する。そのとき x と ε の間には

$$\varepsilon = a \int_0^\infty f(x, t) dt = a \tau x \quad (2)$$

が成り立つ。 a は検出器によって決まる比例定数であるが、ここでは $a=1$ としても一般性を失わないので、

$$a=1 \quad (2')$$

とする。このような特性を持つ検出器で高強度放射線バーストを測定する。バーストを形成している放射線粒子の到来は、バーストの持続時間中ランダムでポアソン過程に従っているとする。また、バースト中の各放射線粒子のエネルギーは、すべて同一の分布関数 $G(\varepsilon)$ を持つ独立な確率変数とする。したがって、固有応答関数の振幅 x も独立な確率変数となり、かつ同一の分布関数 $H(x)$ を持つ。 $H(x)$ は(2)式より、

$$H(x) = \tau G(\varepsilon) \quad (3)$$

を満たす。指数応答型検出器の応答時間 Δ は、(1)式で表わされる $f(x, t)$ が明らかにゼロと異なる時間として定義されるので、約 3τ と考えてよい($t=3\tau$ の時の振幅は $t=0$ の振幅の約 0.05 となる)。 3τ 以内に次の放射線が到来すれば、その応答は積み重なると考える。指数応答型検出器として、例えば NaI(Tl) シンチレータを考えると、その減衰時間 τ は 10^{-7} sec 程度である。一方、持続時間が $10^{-6} \sim 10^{-8}$ sec 程度のバーストも実現されており、この時間内に多数の放射線粒子が含まれているので、激しい積重なりが生ずる。

さて、バーストの始まりの時刻を $t=0$ とする。バースト内の任意の時刻 t (検出器の応答時間 Δ 内も含む)における積重なりパルス波高 ξ_t (Fig. 1(a))は、バーストの始まりから時刻 t までに、検出器に到来した各放射線粒子に対する応答の積み重なったものであり (Fig. 1(b))、放射線粒子の到来時刻およびエネルギーがランダムなために確率変数となる。この確率変数とする値は、バースト中に含まれる放射線が検出器に到来した時、そのエネルギーに対応した値だけ瞬間的に飛躍し、次の放射線が到来するまで時定数 τ で連続的に減衰する。Fig. 1(b) に示した飛躍の高さ $(x-y)$ の分布は固有応答関数の振幅の分布 $H(x-y)$ に一致する。

* 積重なり現象に対する理論的研究は、われわれの研究室で、加速器運転のさいの保健物理などの目的で従来から行なってきたものであり、分布が時刻に依存する非定常の取扱いを進展させ、著者の 1 人の学位論文の一部として発展せしめてきたが、最近 Souček らが Rice のショット雑音モデルをこの現象に適用して解析していることを知った。

Fig. 1 Pile-up phenomena in nuclear radiation burst measurement

$\xi_0=0$ (初期条件) として, ξ_i が $\xi_i \leq x$ なる確率 $P\{\xi_i \leq x | \xi_0=0\} = F(t, x)$ は Kolmogorov-Feller の方程式⁷⁾

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = \frac{x}{\tau} \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} - \lambda \left[F(t, x) - \int_0^x H(x-y) d_y F(t, y) \right], \quad (4)$$

$$F(0, x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

に従う。 λ は検出器内での反応率であるが, 検出効率 β が 1 の時には単位時間あたりに到来する平均の放射線粒子数に等しい。ここでは $\beta=1$ として取り扱う。(4)式を解析的に解くことは困難のため, (5)式で定義される確率変数 η_i を導入する。

$$\eta_i = \xi_u - \xi_{u-t} e^{-\alpha t}, \quad u > t \quad (5)$$

u は固定された時刻であり, $\alpha=1/\tau$ である。 η_i の分布は ξ_i 分布と一致する。確率過程 $\{\eta_i\}$ は, Fig. 1(c) に示すように, 放射線粒子が検出器に到来した時のみその値が飛躍し, 次の放射線が到来するまで一定値を保つ確率過程である。確率過程 $\{\eta_i\}$ における飛躍の高さの分布は

$$H\{(x-y)\exp(\alpha t)\}$$

で表わすことができる。変換された η_i の分布 $F(t, x)$ は Feller の方程式⁸⁾

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = -\lambda \left[F(t, x) - \int_0^x H\{(x-y)e^{\alpha t}\} d_y F(t, y) \right] \quad (6)$$

$$F(0, x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (7)$$

に従う。 $F(t, x)$ の特性関数を $\Phi(t, z)$, $H(x)$ の特性関数を $\phi(z)$ とすると, (6), (7)式は,

$$\frac{\partial \Phi(t, z)}{\partial t} = -\lambda [1 - \phi(ze^{-\alpha t})] \Phi(t, z) \quad (8)$$

$$\Phi(0, z) = 1 \quad (9)$$

となる。(8), (9)式より $\Phi(t, z)$ は

$$\Phi(t, z) = \exp \left[-\lambda \int_0^t \{1 - \phi(ze^{-\alpha u})\} du \right] \quad (10)$$

(10)式より, 任意の時刻における積重なりパルス波高の平均値 $E\{\xi_i\}$ および分散 $D\{\xi_i\}$ は,

$$E\{\xi_i\} = \lambda \int_0^t \left[\int_0^\infty x e^{-\alpha u} dH(x) \right] du$$

$$= \frac{\lambda E\{x\}}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \quad (11)$$

$$D\{\xi_i\} = \lambda \int_0^t \left[\int_0^\infty (x e^{-\alpha u})^2 dH(x) \right] du$$

$$= \frac{\lambda E\{x^2\}}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \quad (12)$$

で与えられる。

$$\text{ただし, } E\{x^n\} = \int_0^\infty x^n dH(x) \quad (13)$$

である。(11), (12)式より, $E\{\xi_i\}$ と $D\{\xi_i\}$ は λ に比例することがわかる。したがって, λ が充分大きい時には, 平均値に対して揺ぎの大きさを無視することができる。揺ぎを無視し得るような高強度放射線バーストを指数応答型検出器で測定するさいに得られる出力パルスの波形は, 時定数 τ で減衰する固有応答関数とは著しく異り, (11)式で示されるような立上り時間 τ を持つような波形となる。

バーストの持続時間が Δ に較べて充分短い時には, 各放射線粒子の応答が減衰することなく瞬間的に積み重なると仮定できる。すなわち, すべての放射線粒子が同時刻に到来し, 積み重なるさいの時刻のズレを考慮しなくてもよい。このときの積重なりパルス波高の平均値と分散は, (11), (12)式において, $\tau \rightarrow \infty (\alpha \rightarrow 0)$ および $t=b$ (b はバーストの持続時間)として,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\lambda E\{x\}}{\alpha} (1 - e^{-\alpha b}) = \lambda b E\{x\} \quad (14)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\lambda E\{x^2\}}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha b}) = \lambda b E\{x^2\} \quad (15)$$

で与えられる。

次に, (11)式で与えられた $E\{\xi_i\}$ の係数について考察する。検出器の位置 r における到来バーストの放射線密度 $n_r(t, \epsilon)$ は,

$$n_r(t, \epsilon) = \begin{cases} n_r(\epsilon) = \lambda_r g(\epsilon) & 0 \leq t \leq b \\ 0 & t < 0, t > b \end{cases} \quad (16)$$

ただし, $g(\epsilon) = dG(\epsilon)/d\epsilon$ であり, b はバーストの持続時間, λ_r は r 点の周りの単位体積中に存在する放

射線の単位時間あたりの平均個数で、検出器の体積 V 中で一様であるとする。単位時間あたりの到来パーストのエネルギー w_r は、

$$w_r = \int_V dV \int_0^\infty \varepsilon n_r(t, \varepsilon) d\varepsilon = \lambda_r V \int_0^\infty \varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon \quad (17)$$

(2)式および $h(x) = dH(x)/dx$ より

$$\int_0^\infty \varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^\infty \tau x h(x) dx = \tau E\{x\} \quad (18)$$

である。単位時間あたり検出器に到来する平均放射線粒子数 λ は $\lambda = \lambda_r V$ であるから、(17), (18) 式より、

$$w_r = \tau \lambda E\{x\} = \frac{\lambda E\{x\}}{\alpha} \quad (19)$$

(11), (19) 式より、 $E\{\xi_i\}$ は

$$E\{\xi_i\} = w_r (1 - e^{-\alpha i}) \quad (20)$$

で与えられる。到来パーストの全エネルギー W_r は、(17) 式を時間 t で積分して得られる。 $0 \leq t \leq b$ で λ_r が一定であることを考慮して、

$$W_r = \tau b \lambda E\{x\} = b w_r \quad (21)$$

(20), (21) 式より、 $t = b$ として、 W_r は

$$E\{\xi_b\} = W_r \left(\frac{1 - e^{-\alpha b}}{b} \right) \quad (22)$$

となる。したがって、パースト終止期における積重なりパルス波高の平均値は、到来パーストの全エネルギーに比例している。 $n_r(t, \varepsilon)$ や w_r, W_r は検出器の位置 r における放射線粒子の集団に関する平均量であり、放射線場の量⁽⁹⁾と考えうる。放射線粒子の到来率がよく、積重なり現象が生じている時には、パルス応答型の検出器の出力として、個々の放射線粒子に対応した出力パルスを得ることはできない。しかしその時でも、(20)や(22)式は、検出器の出力として放射線場の量と考えうるパーストの強度や、全エネルギーに対応した出力パルスを得ることができることを示している。

Ⅲ. 固有応答関数が有限な立上り時間を有する時の積重なり現象

検出器の固有応答関数を $f(t, x)$ とする。ただし、到来した放射線粒子のエネルギーを ε とすると、 $f(t, x)$ は

$$\int_0^\infty f(t, x) dt = x = \varepsilon \quad (23)$$

を満たし、また t と x に関して連続な関数とする。 x は $f(t, x)$ の面積であるが、放射線粒子のエネルギー ε と等しくなるように $f(t, x)$ を決めたので、本節で

は、 x をエネルギーと呼ぶ。時刻 t_k に到来するエネルギー x_k の放射線粒子によって生ずる出力パルスの、時刻 t における振幅は $f(t - t_k, x_k)$ で表わされる。パースト内の任意の時刻における積重なりパルス波高 ξ_i は、

$$\xi_i = \sum_{0 \leq t_k \leq t} f(t - t_k, x_k) \quad (24)$$

で表現される。ここで、 $\{t_k\}$ は放射線粒子の到来時刻を表わす独立な確率変数列である。 $\{x_k\}$ は到来放射線粒子のエネルギーを表わすおのおの同一の分布関数 $H(x)$ を持つ独立な確率変数列である。 t_k や x_k が確率変数のため ξ_i も確率変数となる。 ξ_i は時刻 t までに到来する放射線粒子のすべての寄与の総和として直接的に表現されている。このような表式は、電子管のショット雑音電流を研究した Cambell によって与えられ、Rice によって拡張された。しかし彼らの理論はショット雑音電流を、その分布が時刻に依存しない定常な確率過程として取り扱っている*。

さて、 ξ_i と $f(t, x)$ の特性関数をそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \Phi(t, z) &= E\{\exp(i\xi_i z)\} \\ \phi(t, z) &= \int_0^\infty \exp(izf(t, x)) dH(x) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

とする。Total expectation theorem⁽¹⁰⁾ から

$$E\{e^{i\xi_i z}\} = \sum_{n=0}^\infty P(N=n) E\{e^{i\xi_i z} | N=n\} \quad (26)$$

ここで、 N は $(0, t)$ 間に検出器に到来する放射線粒子数を表わす確率変数である。到来放射線粒子数はポアソン分布に従っているとする。単位時間あたりの平均到来数を λ とする時、 $(0, t)$ 間に n 個の放射線粒子が到来する確率 $P(N=n)$ は、

$$P(N=n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad (27)$$

である。 $n=0$ の時は

$$E\{e^{i\xi_i z} | N=0\} = 1 \quad (28)$$

ポアソン分布の特性から

$$E\{e^{i\xi_i z} | N=1\} = \frac{1}{t} \int_0^t \phi(u, z) du \quad (29)$$

$$E\{e^{i\xi_i z} | N=n\} = [E\{e^{i\xi_i z} | N=1\}]^n \quad (30)$$

が成り立つ。(26), (30) 式より

$$\Phi(t, z) = \sum_{n=0}^\infty P(N=n) [E\{e^{i\xi_i z} | N=1\}]^n \quad (31)$$

(27), (29) 式を上式に代入して整理すると、

$$\Phi(t, z) = \exp\left[-\lambda \int_0^t \{1 - \phi(u, z)\} du\right] \quad (32)$$

となる。(32) 式は指数応答型の場合に得られた(10)式

* Cambell や Rice の取扱いは、(24) 式における $\sum$ が $-\infty \leq t_k \leq \infty$ にわたってとられる。

に対応するものである。(32)式より積重なりパルス波高の平均値 $E\{\xi_i\}$ と分散 $D\{\xi_i\}$ は、

$$\begin{aligned} E\{\xi_i\} &= (-i) \left[\frac{d \ln \Phi(t, z)}{dz} \right]_{z=0} \\ &= \lambda \int_0^t \left[\int_0^\infty f(u, x) dH(x) \right] du \quad (33) \\ D\{\xi_i\} &= \left[\frac{d^2 \ln \Phi(t, z)}{dz^2} \right]_{z=0} \\ &= \lambda \int_0^t \left[\int_0^\infty \{f(u, x)\}^2 dH(x) \right] du \quad (34) \end{aligned}$$

で与えられる。(2), (23)式で示される固有応答関数の規格化の違いを除けば, (33), (34)式はそれぞれ指数応答型の場合の(11), (12)式に対応している。

いま, 比較的多種類の検出器の固有応答関数を表現し得る形として, $f(t, x)$ を

$$f(t, x) = \frac{x}{p!} \left(\frac{1}{\tau} \right)^{p+1} t^p e^{-t/\tau} \quad (35)$$

とする。 τ, p は固有応答関数を決定するパラメータである。(35), (33)式より, $E\{\xi_i\}$ は

$$\begin{aligned} E\{\xi_i\} &= \lambda E\{x\} \frac{1}{p!} \left(\frac{1}{\tau} \right)^{p+1} \\ &\cdot \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{p! t^{p-r}}{(p-r)!} \frac{e^{-t/\tau}}{-1/\tau} - (-1)^p \frac{p!}{-1/\tau} \right\} \quad (36) \end{aligned}$$

で与えられる。 $E\{x\}$ は到来放射線の平均エネルギーである。上式から, 揺ぎを無視しうような高強度放射線バーストを測定する場合の検出器の固有応答関数の違いによる, 出力パルス波形の立上り特性の相違を知ることができる。 $p=0$ および $p=1$ の時の $E\{\xi_i\}$ を Fig. 2 に示す。

Fig. 2 Mean value of piled-up pulse height vs. time

Ⅳ. 積重なりパルス波高分布のガウス分布への移行

バーストの内部に多数の放射線が存在する時には, 前章で示したような積重なり現象が生ずる。そのため, バーストを測定して得られる波高分布は, 放射線粒子集団のエネルギー・スペクトラムとは異ったものになる。本章では, 積重なりが生じ始めてから, 検出器の応答時間 Δ 以上の時間を経た後の積重なりパルス波高分布は, 到来する放射線粒子の平均個数 λ が大きくなるにつれて, 入射放射線粒子集団のエネルギー・スペクトラムとは無関係に, ガウス分布に漸近することを明らかにする。

バースト内の任意の時刻における積重なりパルス波高 ξ_i が x と $x+dx$ の間の値をとる確率は $p(t, x)dx$ で表わされ, 確率密度関数である $p(t, x)$ は(31)式で表わされる $\Phi(t, x)$ の逆変換

$$p(t, x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t, z) e^{-izx} dz \quad (37)$$

として形式的に求まる。この逆変換を解析的に行うことは, $h(x) = dH(x)/dx$ が比較的小さい場合でも困難である。しかし,

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} |f(u, x)| h(x) dx \right] du < \infty$$

が満足される時

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} p(t, x) &= p(x) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, z) &= \Phi(z) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

が存在し, そのとき定常な確率過程 $\{\xi_i^*\}$ を定義することができる。

$$\xi_i^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - t_k, x_k)$$

と表わされ, ξ_i^* が x と $x+dx$ の間の値をとる確率密度関数 $p(x)$ は, (38)式で示された $p(t, x)$ の極限としての $p(x)$ に一致することを L. Takacs が証明している。 $p(x)$ はまた $\Phi(z)$ の逆変換

$$p(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z) e^{-izx} dz \quad (39)$$

で与えられる。 $\Phi(z)$ は(32), (33)式より

$$\Phi(z) = \exp \left[-\lambda \int_0^{\infty} \{1 - \phi(u, z)\} du \right] \quad (40)$$

であり, (40)式は Cambell や Rice⁽⁶⁾ の結果と一致している。 $\{\xi_i^*\}$ の平均値 $E\{\xi_i^*\}$ および分散 $D\{\xi_i^*\}$ は(33), (34)式において, u に関する積分の上限 t を $t = \infty$ として求まる。

$$E\{\xi_i^*\} = \lambda \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(u, x) dH(x) \right] du \quad (41)$$

$$D\langle \xi_i^* \rangle = \lambda \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \langle f(u, x) \rangle^2 dH(x) \right] du \quad (42)$$

(35)式において、 $p=0$ の場合すなわち検出器が指数応答型検出器の場合には、Fig. 2 に示したように時定数 τ の数倍の時間で $E\langle \xi_i \rangle$ と $E\langle \xi_i^* \rangle$ は一致する。したがって、積重なりが生じ始めてから、検出器の固有応答時間 Δ の後には、積重なり過程 $\langle \xi_i \rangle$ は定常な積重なり過程 $\langle \xi_i^* \rangle$ へ移行する。バーストの持続時間が Δ に較べて充分長い時にはバーストの持続時間中に定常な積重なり過程へ移行し、測定装置はそのときの分布 $p(x)$ を示す。 $p(x)$ は、以下に示すように Edgeworth の級数を導入して解析的に求めることができる。

特性関数 $\Phi(z)$ の自然対数を (iz) のべき乗で展開する。

$$\ln \Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} (iz)^n \quad (43)$$

ここで、 c_n (n -th cumulant) は(40)式より、

$$c_n = \lambda \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \langle f(u, x) \rangle^n h(x) dx \right] du \quad (44)$$

で与えられる。 c_1 と c_2 は

$$\begin{aligned} c_1 &= \lambda \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(u, x) h(x) dx \right] du \\ &= E\langle \xi_i^* \rangle \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \lambda \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \langle f(u, x) \rangle^2 h(x) dx \right] du \\ &= D\langle \xi_i^* \rangle \end{aligned} \quad (46)$$

となり、定常な積重なり過程における平均値と分散に一致している。(43)式を(39)式へ代入して整理すると、 $p(x)$ は

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-izx + izc_1 - \frac{z^2 \sigma^2}{2!} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} c_n \right] dz \end{aligned} \quad (47)$$

となる。ただし、 $\sigma^2 = D\langle \xi_i^* \rangle$ である。

ここで、次の量を導入する。

$$v = \frac{x - c_1}{\sigma} \quad (48)$$

(47), (48)式より

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[iz\sigma v - \frac{z^2 \sigma^2}{2!} \right] \\ &\quad \cdot \exp \left(\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} c_n \right) dz \end{aligned} \quad (49)$$

さらに、 $\exp \left(\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} c_n \right) \equiv \exp[\gamma(z)]$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\gamma(z)]^m}{m!} \quad (50)$$

と展開する。また、

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (iz\sigma)^n \exp \left[-iz\sigma v - \frac{z^2 \sigma^2}{2} \right] dz \\ &= (-1)^n \sigma^{-1} \varphi^n(v) \\ \varphi^n(v) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^n}{dv^n} (e^{-v^2/2}) \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

なる関係式を用いて λ の次数で整理すると、(49)式は

$$\begin{aligned} p(x) &= \sigma^{-1} \varphi^0(v) - \frac{c_3 \sigma^{-4}}{3!} \varphi^3(v) \\ &\quad + \left[\frac{c_4 \sigma^{-5}}{4!} \varphi^4(v) + \frac{c_3^2 \sigma^{-7}}{72} \varphi^6(v) \right] + \dots + \dots \end{aligned} \quad (52)$$

となる。上式の右辺第1項の λ の次数は $\lambda^{-1/2}$ であり、第2項の次数は λ^{-1} 、[] 内は $\lambda^{-3/2}$ である。(52)式は Edgeworth の級数として知られている。 λ が大きくなるにつれて $p(x)$ は

$$p(x) \cong \sigma^{-1} \varphi^0(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x - c_1)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (53)$$

なるガウス分布に近づく。さらに $\lambda \rightarrow \infty$ において

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{c_1} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{D\langle \xi_i^* \rangle}}{E\langle \xi_i^* \rangle} = 0 \quad (54)$$

となり、平均値に比して揺ぎの大きさを無視し得るようになる。したがって、バーストの持続時間が検出器の応答時間よりも長くバースト内に多数の放射線粒子が含まれている場合には、積重なりパルス波高の分布は(41), (42)式で与えられる平均値と分散を持つガウス分布に漸近することが示された。

V. むすび

高強度放射線バーストの測定においては、パルス応答の良好な検出器を使用しても積重なり現象は不可避である。そのため、到来する放射線粒子集団の正しいエネルギー・スペクトルの測定は困難であり、従来、積重なり現象を避ける努力がなされてきた。本報では、確率論を用いた解析により積重なり波高分布の諸性質(平均値、分散等)から、到来バーストの強度や全エネルギーおよびそれらの揺ぎなどの有意義な量の導出が可能であることを示した。

本研究は文部省科学研究費の補助により行われたことを記し、感謝の意を表します。

— 参 考 文 献 —

- (1) 小沢保知, 成田正邦, 加地郁夫: 本誌, 5[3], 190 (1963).
- (2) BOAG, J.W.: *Brit. J. Radiol.*, **23**, 601 (1950).

- (3) MCGUIRE, R.L.: *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **NS-13**[1], 315 (1966).
- (4) STRAUSS, M.G.: *Rev. Sci. Instrum.*, **34**, 355 (1963).
- (5) SOUCEK, B., CIMERMAN, M., BREYER, B.: *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **NS-17**[3], 375 (1970).
- (6) RICE, S.O.: *Bell Syst. Tech. J.*, July (1944), Jan. (1945).
- (7) TAKÁCS, L.: "Stochastic Process", (1960), Mathieu & Co. Ltd.
- (8) BHARUCHA-REID, A.T.: "Elements of the Theory of Markov Process and Their Application", (1960), McGraw-Hill Book Co. Inc.
- (9) ROSSI, H., ROESH, W.C.: *Radiat. Res.*, **16**, 783 (1962).
- (10) PAPOULIS, A.: "Probability Random Variables and Stochastic Process", McGraw-Hill Series in System Science, (1966).

☆ 本 誌 投 稿 の 手 引 ☆ (近く改正予定)

- 一般投稿は研究論文・技術報告・資料・ショートノート・私のノートから・談話室を原則とし、必ず会員の資格を有する。
- 掲載範囲は、原子力研究に関連する凡ゆる部門を含め、とくに限定しない。内容はオリジナルなものに限る。
- 刷上り5頁(ショートノートは2頁)以内は無料(ただし、特殊な数式や表などの割増し料金は著者の負担とする。なお、超過分の有料頁は1頁6,000円)とする。
和文は「会誌」に、欧文はJournalに掲載される。
- 必ず所定の原稿用紙(480字詰約4枚で1頁)を使用し、投稿規程に従って執筆する。ただし、欧文は、正副2通をタイプ用紙に、2段送り1枚約25行にタイプする(約3枚で1頁)。和・欧文とも所定の原稿表紙(無料)を添付する。
図面はそのまま製版できるよう必ず墨入れトレースする(鮮明なゼロックス可)。
- 投稿希望者は事務局へ連絡すれば、原稿用紙(30枚綴1冊100円, 千70円)および投稿規程を送付する。
- 和・欧文を問わず表題・抄録・所属機関名などを和・英両文で正確に書いて添付する。
- 別に締切り日は設けない。原稿は当該分野担当の査読委員および編集委員の査読に回わり、次回以後の編集委員会において採否を決定する。査読通過および掲載巻号は決定次第通知される。
- 論文は査読通過後の受理順に掲載される。
(掲載まで欧文約2~3ヵ月, 和文約2~3ヵ月)
- 別刷は掲載論文1篇につき30部まで無料で送付する(30部以上希望の時は、実費1部につき、50~100部で4頁以内50円, 5~8頁60円程度)。
- 査読・審議の結果、内容の訂正、文章の短縮、または図面の書直しを要求されたり、時には掲載を遠慮いただく場合があるので、予めご了承願いたい。
- 欧文の修文・添削についてはすべて著者負担とする。(和訳を要求される場合もある)
- 訂正のため返却した原稿は6ヵ月以内に再提出しないと撤回とみなされる。
- 私のノートから・談話室欄(1~2頁)には、随時、随意に気軽な寄稿を歓迎する。
- その他、詳細は事務局へお問合せ下さい。