702. 縮小流路内層流熱伝達の解析

椎 名 保 顕*

(1979年 7月9日 受理)

Analysis of Heat Transfer to Laminar Flow in Converging Plane Walled Channels with Prescribed Wall Heat Flux

By Yasuaki SHIINA

Heat transfer to laminar flow in converging plane walled channels with both walls heated and one wall heated one wall adiabatic is analytically obtained. The analysis is carried out for the two thermal boundary conditions of prescribed wall heat flux $q \sim 1/r$ and $q \sim r^\delta$. The Nusselt number for flow in converging plane walled channels depends on Reynolds number and half taper angle α . If differences in velocity distribution are ignored, there is a direct correspondence between wall heat flux $q \sim e^{-\alpha(\delta+1)x}$ in parallel flow and heat flux $q \sim r^\delta$ in converging plane walled channels.

In case of q varying as $1/r$, Nusselt number is usually higher than that for laminar flow in parallel channel with constant heat flux. It increases as the value of $|Re|\alpha$ increases, and approaches a limit value at $r \rightarrow 0$ when $|Re|\alpha \rightarrow \infty$.

In case of q varying as r^δ , however, when $\delta < -1$, Nusselt number is higher than that with $q \sim 1/r$. When $\delta > -1$, Nusselt number at $r \rightarrow 0$ falls below that for constant heat flux case in parallel channel. It decreases as the value $|Re|\alpha$ increases, and reduces to zero as $|Re|\alpha$ exceeds a critical value.

KEYWORDS: heat transfer, laminarization, accelerated flow, Graetz problem, heat flux, changing cross section, Jeffery-Hamel flow, analytical solution

1. 緒 言

管内層流の熱伝達については、Graetzが円管について取り扱って以来数多くの研究が行われている。円管、平行平板、二重管の流れは速度分布が初等関数で表わされ、熱伝達もさまざまな境界条件に対して解析的に解かれている⁽¹⁾⁻⁽³⁾。しかし、それらはいずれも断面形状が一定の場合であり、断面形状が流れに沿って変化する場合の熱伝達は異なった振舞いをすると考えられる。特に、縮小流路内流れの場合には Reynolds 数 Re が通常の乱流の値でも加速により層流化することが報告されており⁽⁴⁾、加速層流化現象を熱伝達の面から研究する場合には、縮小流路内層流熱伝達の解明が必要である。

縮小流路内層流熱伝達を扱った研究は少なく、著者の知る限りでは Sparrow と Starr⁽⁵⁾がこの問題を初めて取り扱っている。彼らは速度分布の近似解を求め、それを使って両壁面の熱流束が $1/r$ (r : 原点からの距離)で変化する場合、および壁温一定の場合の発達した Nusselt 数 Nu を求めている。その結果によると、平行平板流に比べて加速流の場合は Nu 数が大きくなる。Yang と Price⁽⁶⁾は、壁温一定、入口流速一定の場合の速度分布と平均 Nu 数を数値計算により求めている。また、Walker と Rishehri⁽⁷⁾は、平行平板と縮小流路との対比から、平行平板で壁面熱流束 q が $\exp(\beta x)$ で変化する場合は縮小流路で q が $r^{\beta/\phi-1}$ (β : 定数, ϕ : テーパー角の2倍)で変化する場合に対応することを

* 日本原子力研究所 (Japan At. Energy Res. Inst.)

指摘している。したがって、平行平板で等熱流束の条件はテーパー状流路では $q \sim 1/r$ に対応することになる。

本報では、流れ方向に流路幅が減少する縮小流路内層流において壁からの熱流束が流れ方向に変化する場合の熱伝達を、両面加熱および片面加熱・片面断熱について助走区間を含めて解析的に解いた。熱流束は初め $1/r$ で変化する場合について解き、次に、 r^δ (δ : 任意の実数) で変化する場合を解いた。

II. 速度分布

Fig. 1 に解析モデルを示す。 2α の開き角をもつテーパー状流路で流れは中心に向い充分に発達しているとする。

Fig. 1 Schematic diagram of physical system

したがって $v_\theta = 0$ としてよい。 $v_r = u(r, \theta)$ とすると、連続の式および運動方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(ru) &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{u}{r^2} \right) \\ 0 &= -\frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 ν : 流体の動粘性係数

ρ : 流体の密度、 p : 圧力

(1) 式を次の量を導入して変形すると、(3)、(4) 式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} u_m &= \frac{1}{2r\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} u r d\theta \\ g(\theta) &= u/u_m \\ Re &= \frac{u_m D}{\nu} = \frac{u_m \cdot 4r\alpha}{\nu} \\ \xi &= \theta/\alpha \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 u_m : r における平均速度

D : r における代表径 $= 4r\alpha$

Re : Reynolds 数

であり、 u, u_m, Re は負の量である。

$$\frac{d^2 g}{d\xi^2} + 4\alpha^2 g + \frac{1}{4} Re \alpha g^2 + \frac{8\alpha^3 A}{Re} = 0, \quad (3)$$

$$(\xi = \pm 1 \text{ で } g = 0)$$

$$\int_{-1}^1 g d\xi = 2 \quad (4)$$

(3) 式は Rosenhead や Millsaps-Pohlhausen らにより楕円関数を用いて解かれているが⁽³⁾、実用上は数値計算に頼らざるを得ないため、ここでは差分法により解いた。数値計算の結果と解析解はよく一致した。 α および Re が極限の値をとる場合には、(3) 式は線形化され容易に解くことができる。 $\alpha \rightarrow 0$ の場合には

$$g = 3(1 - \xi^2)/2 \quad (5)$$

となり平行平板における Poiseuille 流と一致する。また $|Re| \ll 1$, $\alpha \gg |Re|$ の場合は

$$g = 2\alpha(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha \xi)/(2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha) \quad (6)$$

が得られる。

(3) 式からもわかるように、流速分布は2つのパラメータ $Re\alpha/4$ と $4\alpha^2$ により支配される。 $0 \leq \alpha \leq \pi$ であるから、(6) 式の速度分布が実現されるのは Re がゼロに近い場合に限られる。したがって、 $\alpha \leq 0.1$, $|Re| > 1$ 程度の層流では流速分布はもっぱら $Re\alpha/4$ の値により決まることになる。Fig. 2 に流速分布を示す。実線は(5)式、その上の破線は(6)式に近い速度

Fig. 2 Velocity profiles in converging plane-walled channels

分布を表わす。 $|Re|\alpha$ が大きくなると、Fig. 2に示されるように速度分布はつぶれて境界層は薄くなり、 $|Re|\alpha \rightarrow \infty$ で $g \rightarrow 1$ となる。

Ⅲ. 熱伝達

流体内部の摩擦による発熱および流れ方向の熱伝導を無視すると、エネルギー式は次のように表わすことができる。

$$u \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{a}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (7)$$

ここに、 T : 流体温度、 a : 温度伝導率
 $r=r_0$ から $r=0$ まで加熱するものとし、

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= r/r_0 \\ \bar{T} &= (T-T_0)\lambda/q_0 r_0 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここに、 T_0 : $r=r_0$ おける流体温度

λ : 熱伝導率

q_0 : 壁面からの熱流束

を導入し、さらに $\bar{r}$ を次のように変換する。

$$\bar{r} = e^{-at} \quad (9)$$

$\bar{r}=1$ で $t=0$, $\bar{r} \rightarrow 0$ で $t \rightarrow \infty$ となる。(7)式は

$$-\frac{1}{4} RePr g(\xi) \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \xi^2} \quad (10)$$

となる。 Pr は流体のPrandtl数である。

任意の熱流束に対する熱伝達を計算するには、壁において $\partial \bar{T}/\partial \xi = \pm 1$ の場合の解を求める必要がある。これは熱流束 $q \sim 1/r$ に対応する。まず、両面加熱の場合について解き、次に片面加熱・片面断熱の場合について検討を加える。

1. $q \sim 1/r$ の場合(両面加熱)

境界条件は

$$\left. \begin{aligned} t=0(\bar{r}=1); \bar{T}(t, \xi) &= 0 \\ \xi = \pm 1; \partial \bar{T}/\partial \xi &= \pm 1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(10), (11)式は速度分布 $g(\xi)$ の違いを除くと、壁面熱流束一定の場合の平行平板内層流熱伝達のエネルギー式と同じである。したがって、(10), (11)式の解は温度助走区間の解 $\bar{T}_1$ と、発達した温度分布の解 $\bar{T}_2$ との和として表わされる。すなわち

$$\bar{T}(t, \xi) = \bar{T}_1(t, \xi) + \bar{T}_2(t, \xi) \quad (12)$$

(10)式を ξ で0から1まで積分して

$$-\frac{1}{4} RePr \int_0^1 g(\xi) \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} d\xi = 1 \quad (13)$$

(13)式の特解より

$$\bar{T}_2(t, \xi) = t\phi_1(\xi) + \phi_2(\xi)$$

と書ける。これを(10), (13)式に代入して

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= -4/RePr \\ g &= \frac{d^2 \phi_2}{d\xi^2}, \left(\xi = \pm 1; \frac{d\phi_2}{d\xi} = \pm 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

が得られる。 $\bar{T}_1$ は $\bar{T}_1 = R(t) \cdot \Theta(\xi)$ と変数分離をして(10)式に代入すると、

$$\frac{dR}{dt} - \beta \frac{4}{RePr} R = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\xi^2} + \beta g(\xi) \Theta = 0 \quad (16)$$

$(\xi = \pm 1; d\Theta/d\xi = 0)$

(15), (16)式を解いて、結局 $\bar{T}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{T}(t, \xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(\xi) \exp(4\beta_n t / RePr) \\ &\quad - \frac{4}{RePr} t + \phi_2(\xi) \end{aligned} \quad (17)$$

または、

$$\bar{T}(\bar{r}, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n \bar{r}^{-4\beta_n / RePr} + \frac{4}{RePr \alpha} \ln \bar{r} + \phi_2(\xi) \quad (17')$$

ここに、 $\beta_n, Y_n(\xi)$: (16)式の固有値、固有関数

また、 C_n は次の式より求められる。

$$C_n = - \int_{-1}^1 \phi_2 g Y_n d\xi / \int_{-1}^1 g Y_n^2 d\xi \quad (18)$$

(17')式で $\bar{r}=1$ として g を乗じて積分すると、次式が成り立つ。

$$\int_{-1}^1 g \phi_2 d\xi = 0 \quad (19)$$

$\bar{r} \rightarrow 0$ のとき(17')式の右辺第1項は消え、温度分布は相似形となる。

Fig. 3に、 $Re = -200$, $\alpha = 0.1$, $Pr = 0.72$ の場合の流路内温度分布を示す。図で $\bar{r}' = 1 - \bar{r}$ である。 $\bar{r} \rightarrow 0$ に近づくとき($\bar{r}' > 0.6$)温度分布が相似形になるのがわかる。

次に Nu 数は

$$Nu = \frac{h_c D}{\lambda} = \frac{q}{T_w - T_M} \cdot \frac{4r_0}{\lambda} = \frac{4}{\bar{T}_w - \bar{T}_M} \quad (20)$$

ここに、 $T_w, \bar{T}_w$: 壁温、無次元壁温

$T_M, \bar{T}_M$: 混合平均温度、無次元混合平均温度

h_c : 熱伝達率

また、

$$\bar{T}_M = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \bar{T} g d\xi = \frac{4}{RePr \alpha} \ln \bar{r} \quad (21)$$

(17'), (21)式を(20)式に代入して

$$Nu = 4 / \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(1) \bar{r}^{-4\beta_n / RePr} + \phi_2(1) \right\} \quad (22)$$

Fig. 3 Nondimensional temperature distributions in converging plane walled channels at $Re = -200$ and $\alpha = 0.1$ with both walls heated as $q \sim 1/r$

$\bar{r} \rightarrow 0$ で(22)式の分母第1項はゼロとなり, $\bar{r} \rightarrow 0$ における Nu 数 Nu_0 は

$$Nu_0 = 4/\phi_2(1) \quad (23)$$

に収束する。 α および Re が極限の場合の Nu_0 は, 速度分布と同様に容易に求めることができる。

(1) $\alpha \rightarrow 0$ の場合

(5), (14), (19)式より

$$\phi_2(\xi) = (3/4)\xi^2 - (1/8)\xi^4 - (39/280) \quad (24)$$

となり, (23)式に代入して

$$Nu_0 = 4/(17/35) = 8.235 \quad (25)$$

これは平行平板内層流における等熱流束の場合の発達した Nu 数と同じである。

(2) $Re\alpha \rightarrow -\infty$ の場合

(14), (19)式および $g \rightarrow 1$ より

$$\phi_2(\xi) = (1/2)\xi^2 - (1/6) \quad (26)$$

$$Nu_0 = 12 \quad (27)$$

(3) $|Re| \ll 1, \alpha \gg |Re|$ の場合

(6), (14), (19)式を同様に解いて

$$Nu_0 = 4/\{5B^2/6 + B(5\alpha^2/8 - 1) + 1/2\} \\ B = 1/(1 - \tan 2\alpha/2\alpha) \quad (28)$$

Table 1 に α と Nu_0 との関係を示す。

Fig. 4 に, $\alpha = 0.1$ の場合の Nu 数と $\ln \bar{r}/RePr\alpha$ との関係を示す。 Pr 数としては以後空気の値 0.72 を用いる。実線は $\alpha \sim 0$ の場合で, 平行平板の $Nu = 4x/$

Table 1 Relation between α and Nu_0 in case of $|Re| \ll 1$ and $\alpha \gg |Re|$ with both walls heated as $q \sim 1/r$

α	Nu_0	α	Nu_0
0.2	8.221	1.8	5.850
0.4	8.179	2.0	4.153
0.6	8.104	2.2	0.567
$\pi/4$	8.000	$3\pi/4$	8.0
0.8	7.99	2.4	12.949
1.0	7.826	2.6	14.145
1.2	7.592	2.8	12.057
1.4	7.250	3.0	10.795
$\pi/2$	6.818	π	10.084
1.6	6.726

Fig. 4 Relation between Nu_0 and $\ln \bar{r}/RePr\alpha$ at $\alpha = 0.1$ with both walls heated as $q \sim 1/r$

$RePrD$ の関係と一致する。 $|Re|\alpha$ が大きくなると全区間にわたって Nu 数は平行平板の値より大きくなる。 $|Re|\alpha \rightarrow \infty$ のときには(2)で求めたように $\bar{r} \rightarrow 0$ で $Nu \rightarrow 12$ となる。

Nu 数も速度分布と同様に Re と α に依存する。 $\alpha \ll 1$ の場合は $Re\alpha$ に依存し, $|Re| \ll 1, \alpha \gg |Re|$ の場合はもっぱら α のみに依存する。

$Re\alpha \rightarrow -\infty$ の場合の固有値および固有関数は解析的に求めることができる。この場合 $g \rightarrow 1$ として(16), (18)式を解くと,

$$\left. \begin{aligned} \beta_n &= n^2 \pi^2 \\ Y_n &= \cos n \pi \xi, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ C_n &= (-1)^{n+1} \frac{2}{(n\pi)^2} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

となる。

2. $q \sim r^0$ の場合(両面加熱)

境界条件は $\xi = \pm 1$ で

$$\partial T / \partial \xi = \pm \exp[-\alpha(\delta+1)t] = \pm \bar{r}^{\delta+1} \quad (30)$$

となる。(17)式の $\bar{T}(t, \xi)$ を $\bar{T}_0(t, \xi)$ と書くと, $q \sim r^\delta$ の無次元温度は次式で求めることができる。

$$\bar{T}(t, \xi) = \bar{T}_0(t, \xi) - \alpha(\delta+1) \cdot \int_0^t \exp\{-\alpha(\delta+1)\tau\} \bar{T}_0(t-\tau, \xi) d\tau \quad (31)$$

(31)式を計算し $t \rightarrow \bar{r}$ と変換すると,

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{r}, \xi) = & \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(\xi) \bar{r}^{-4\beta_n/RePr\alpha} \\ & \cdot \left\{ \frac{4\beta_n}{(1+\delta)RePr\alpha + 4\beta_n} \right\} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(\xi) \bar{r}^{\delta+1} \left\{ \frac{(1+\delta)RePr\alpha}{(1+\delta)RePr\alpha + 4\beta_n} \right\} \\ & + \frac{1}{(1+\delta)} \cdot \frac{4}{RePr\alpha} (\bar{r}^{\delta+1} - 1) + \phi_2(\xi) \bar{r}^{\delta+1} \end{aligned} \quad (32)$$

(32)式は $\delta = -1$ で特異点をもつが,

$$\lim_{\delta \rightarrow -1} \frac{\bar{r}^{\delta+1} - 1}{1 + \delta} = \ln \bar{r}$$

となり, $\delta = -1$ のとき(17')式と一致する。

無次元混合平均温度 $\bar{T}_M$ は次のようになる。

$$\bar{T}_M = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \bar{T} q d\xi = \frac{1}{(1+\delta)} \cdot \frac{4}{RePr\alpha} (\bar{r}^{\delta+1} - 1) \quad (33)$$

Nu 数は

$$Nu = \frac{4\bar{r}^{\delta+1}}{\bar{T}_w - \bar{T}_M} \quad (34)$$

から計算される。

$$\begin{aligned} Nu = & 4 / \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(1) \bar{r}^{-4\beta_n/RePr\alpha-1-\delta} \right. \\ & \cdot \left\{ \frac{4\beta_n}{(1+\delta)RePr\alpha + 4\beta_n} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(1) \\ & \cdot \left. \left\{ \frac{(1+\delta)RePr\alpha}{(1+\delta)RePr\alpha + 4\beta_n} \right\} + \phi_2(1) \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

(32)式で $\delta > -1$ の場合, $\bar{r} \rightarrow 0$ で右辺は $-4/\{(1+\delta)RePr\alpha\}$ に収束し, 流路断面で温度は一樣となる。 $\delta \leq -1$ の場合は $\bar{r} \rightarrow 0$ で $\bar{T}$ は無限大に発散する。 $\bar{r} \rightarrow 0$ で温度分布が相似形となるのは $\delta = -1$ の場合に限られる。

Fig. 5 に, $\delta = 0$ すなわち壁面熱流束一定の場合の $\bar{T}_w$ と $\ln \bar{r}/RePr\alpha$ との関係を示す。実線は $\alpha \sim 0$ の場合である。 $|Re|\alpha$ が増加すると $\bar{r} \rightarrow 0$ で $\bar{T}_w$ の上昇が鈍くなり, $Re = -200, \alpha = 0.1$ になると $\bar{T}_w$ は加熱開始点から最初は上昇し, $\bar{r}$ がゼロに近づくと減少する。 $\bar{r} \rightarrow 0$ では $\bar{T}_w = \bar{T} = -4/RePr\alpha$ となる。

Fig. 6 に, 壁面熱流束一定, $\alpha = 0.1$ の場合の流路断面無次元温度分布を示す。Fig. 6(a) は $Re = -20, 1/4|Re|\alpha = 0.5$ の場合のグラフである。この場合, 流れ

Fig. 5 Relation between $\bar{T}_w$ and $\ln \bar{r}/RePr\alpha$ with both walls heated as $q = \text{constant}$ for parametric values of Re and α

方向に温度は上昇し続け $\bar{r} \rightarrow 0$ で温度分布は一樣となる。Fig. 6(b) は $Re = -1,000, 1/4|Re|\alpha = 25$ の場合のグラフである。 $1/4|Re|\alpha$ が大きいと, $\bar{T}$ は上昇するが, やがて壁および壁近くで温度が下がり, $\bar{r} \rightarrow 0$ で温度分布は一樣となる。 $\bar{T}_w$ がピークに達した後の温度分布は破線で示されている。破線の温度分布をみると, 壁面における温度勾配よりも流体内部の温度勾配の方が大きい。すなわち, 流体内部の熱流束の方が壁面より加わる熱流束より大きくなっている点が注目される。

(35)式において, $\delta < -1$ の場合には $\bar{r}$ の指数 $-4\beta_n/RePr\alpha - 1 - \delta > 0$ となり, $\bar{r} \rightarrow 0$ で Nu 数は

$$Nu_0 = 4 / \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(1) \frac{(1+\delta)RePr\alpha}{(1+\delta)RePr\alpha + 4\beta_n} + \phi_2(1) \right\} \quad (36)$$

に収束する。 $C_n Y_n(1) < 0$ となるので, Nu_0 は $q \sim 1/r$ の場合の Nu_0 よりも大きくなる。また, $\delta > -1$ の場合は $-4\beta_n/RePr\alpha - 1 - \delta$ の値により異なる。 β_n の最小値を β_1 とすると, $-4\beta_1/RePr\alpha - 1 - \delta > 0$ となる $Re\alpha$ の場合は, Nu_0 はゼロでない値に収束し, (36)式で表わすことができる。 $-4\beta_1/RePr\alpha - 1 - \delta < 0$ となる $Re\alpha$ の場合は, $\bar{r} \rightarrow 0$ で(35)式の分母 $\rightarrow \infty$ となり, Nu_0 はゼロとなる。したがって, $\delta > -1$ の場合 Nu_0 は $Re\alpha$ に依存し, $|Re|\alpha$ が小さいときは $\bar{r} \rightarrow 0$ で Nu 数はゼロでない値に収束するが, $|Re|\alpha$ がある値を越えると $\bar{r} \rightarrow 0$ で Nu 数はゼロに収束する。また, $\delta > -1$ の場合, $\bar{r} \rightarrow 0$ の Nu 数は $q \sim 1/r$ の場合の Nu_0 より小さくなる。

Fig. 7 に, 壁面熱流束一定, $\alpha = 0.1$ の場合の Nu と $\ln \bar{r}/RePr\alpha$ との関係を示す。 $\alpha \sim 0$ の場合は $q \sim 1/r$ と同様に平行平板の Nu と $4x/RePrD$ の関係と一致する。

Fig. 6 (a), (b) Nondimensional temperature distributions in converging plane walled channels with both walls heated as $q=\text{constant}$

Fig. 7 Relation between Nu_0 and $\ln r/RePr\alpha$ at $\alpha=0.1$ with both walls heated as $q=\text{constant}$

Fig. 8 Relation between Nu_0 and $|Re|\alpha/4$ with both walls heated

$|Re|\alpha$ が大きくなると温度助走区間の Nu 数は平行平板の場合より増加するが、 $\bar{r}$ がゼロに近づくと Nu 数は平行平板の値より小さくなり、 $Re=-1,000$, $Re=-2,000$ の場合は $\bar{r}=0$ でゼロとなる。

両面加熱の場合の Nu_0 と $|Re|\alpha/4$ との関係を図 8 に示す。 $q \sim 1/r$ の場合は $|Re|\alpha/4$ が大きくなると Nu 数は増加し、(27)式で求めたように $|Re|\alpha/4 \rightarrow \infty$ で $Nu_0 \rightarrow 12$ となる。一方、 $q=\text{一定}$ の場合は、 $|Re|\alpha/4$ が大きくなると Nu_0 は減少し、 $|Re|\alpha/4 \sim 15.7$ で $Nu_0 \rightarrow 0$ となる。 $Nu_0 \rightarrow 0$ となる $|Re|\alpha/4$ の値は $\alpha=0.1$ と 1.0

で若干異なる。これは最小固有値の値の違いによるものである。

3. $q \sim 1/r$ の場合 (片面加熱・片面断熱)

次に、片面加熱・片面断熱の場合の解析解を求める。基礎式(10)と境界条件

$$\left. \begin{aligned} t=0; \quad \bar{T}(t, \xi) &= 0 \\ \xi=+1; \quad \partial \bar{T} / \partial \xi &= 1, \quad \xi=-1; \quad \partial \bar{T} / \partial \xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

から第 III-1 節と同様な方法で解き、 t を $\bar{r}$ に変換して

$$\bar{T}(\bar{r}, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(\xi) \bar{r}^{-4\beta_n / RePr\alpha}$$

$$+\frac{2}{RePr\alpha}\ln\bar{r}+\phi_3(\xi) \quad (38)$$

ここに、 $\phi_3(\xi)$ は次の式を満たす。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}g &= \frac{d^2\phi_3}{d\xi^2} \\ \xi=1; d\phi_3/d\xi &=1, \xi=-1; d\phi_3/d\xi=0 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

β_n, Y_n は第Ⅲ-1節と同様(16)式より求められる。 C_n は(18)式の ϕ_2 の代わりに ϕ_3 を入れて求められる。また、次式が成り立つ。

$$\int_{-1}^1 g\phi_3 d\xi=0 \quad (40)$$

(17')式と同様、 $\bar{r} \rightarrow 0$ で温度分布は相似となる。無次元混合平均温度は

$$\bar{T}_M=2\ln\bar{r}/RePr\alpha \quad (41)$$

Nusselt 数は(20)式から求められる。

$$Nu=4/\left\{\sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(1)\bar{r}^{-4\beta_n/RePr\alpha}+\phi_3(1)\right\} \quad (42)$$

$\bar{r} \rightarrow 0$ で

$$Nu_0=4/\phi_3(1) \quad (43)$$

に収束する。 Re, α が極限の場合の Nu_0 を求めてみよう。

(1) $\alpha \rightarrow 0$ の場合

(5), (39), (40)式より

$$\phi_3(\xi)=(3/8)\xi^2-(1/16)\xi^4+(1/2)\xi-39/560 \quad (44)$$

$$Nu_0=4/\phi_3(1)=5.385 \quad (45)$$

平行平板内層流の片面等熱流束・片面断熱の場合の発達した Nu 数と一致する。

(2) $Re\alpha \rightarrow -\infty$ の場合

(39), (40)式および $g=1$ より

$$\phi_3(\xi)=(1/4)\xi^2+(1/2)\xi-(1/2) \quad (46)$$

$$Nu_0=6 \quad (47)$$

(3) $|Re| \ll 1, \alpha \gg |Re|$ の場合

(6), (39), (40)式より同様に解いて Nu_0 は次のようになる。

$$Nu_0=4/\left\{\frac{5}{12}B^2+B\left(\frac{5}{16\alpha^2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\right\} \quad (48)$$

$$B=2\alpha \cos 2\alpha/(2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha)$$

Table 2に Nu_0 と α との関係を示す。

Table 2 Relation between α and Nu_0 in case of $|Re| \ll 1$ and $\alpha \gg |Re|$ with one wall heated as $q \sim 1/r$ one wall adiabatic

α	Nu_0	α	Nu_0
0.2	5.382	1.8	4.751
0.4	5.372	2.0	4.075
0.6	5.356	2.2	0.993
$\pi/4$	5.333	$3\pi/4$	5.333
0.8	5.331	2.4	6.112
1.0	5.294	2.6	6.236
1.2	5.239	2.8	6.007
1.4	5.155	3.0	5.837
$\pi/2$	5.042	π	5.728
1.6	5.017		

$Re\alpha \rightarrow -\infty$ の場合の固有値、固有関数を求めると、

$$\left. \begin{aligned} \beta_n &= \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2, \quad (n=1, 2, \dots) \\ n=2m \text{ のとき } Y_n(\xi) &= \cos\sqrt{\beta_n}\xi \\ C_n &= (-1)^{n+1}4/n^2\pi^2, \\ &\quad (m=1, 2, \dots) \\ n=2m-1 \text{ のとき } Y_n(\xi) &= \sin\sqrt{\beta_n}\xi \\ C_n &= (-1)^{n+1}4/(2n+1)^2\pi^2 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Fig. 9(a)に、 $\alpha=0.1$ の場合の Nu 数と $\ln\bar{r}/RePr\alpha$ と

Fig. 9 (a), (b) Relation between Nu_0 and $\ln\bar{r}/RePr\alpha$ with one wall heated one wall adiabatic

の関係を示す。実線は $\alpha \rightarrow 0$ の場合で、平行平板内層流の Nu 数と一致する。 $|Re|\alpha$ が大きくなると Nu 数は加熱区間全体にわたって平行平板の値より増加する。

4. $q \sim r^\delta$ の場合(片面加熱・片面断熱)

第Ⅲ-2節と同様に計算すると、無次元温度および Nu 数は

$$\begin{aligned} T(\bar{r}, \xi) = & \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(\xi) \bar{r}^{-4\beta_n/RePra} \\ & \cdot \left\{ \frac{4\beta_n}{(1+\delta)RePra+4\beta_n} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(\xi) \bar{r}^{\delta+1} \\ & \cdot \left\{ \frac{(1+\delta)RePra}{(1+\delta)RePra+4\beta_n} \right\} + \frac{1}{(1+\delta)} \cdot \frac{2}{RePra} \\ & \cdot \{\bar{r}^{\delta+1}-1\} + \phi_s(\xi) \bar{r}^{\delta+1} \quad (50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Nu = & 4 / \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(1) \bar{r}^{-4\beta_n/RePra-1-\delta} \right. \\ & \cdot \left\{ \frac{4\beta_n}{(1+\delta)RePra+4\beta_n} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(1) \\ & \cdot \left\{ \frac{(1+\delta)RePra}{(1+\delta)RePra+4\beta_n} \right\} + \phi_s(1) \left. \right] \quad (51) \end{aligned}$$

$\alpha=0.1$, $\delta=0$ の場合の Nu と $\ln \bar{r}/RePra$ との関係を Fig. 9(b) に示す。実線は $\alpha \sim 0$ の場合の Nu 数を示す。両面等熱流束の場合と同様に、 $|Re|\alpha$ が大きくなると、 $\bar{r} \rightarrow 0$ で Nu 数は平行平板の値よりも低くなり、 $Re=-200$, $\alpha=0.1$ の場合の Nu 数は $\bar{r} \rightarrow 0$ でゼロに収束する。

Fig. 10 に、片面加熱・片面断熱の場合の Nu_0 と $|Re|\alpha/4$ との関係を示す。両面加熱の場合と同様に、 $q \sim 1/r$ の場合は $|Re|\alpha/4$ が増加すれば Nu_0 も増加し、 $|Re|\alpha/4 \rightarrow \infty$ で $Nu_0 \rightarrow 6$ となる。 $q = \text{constant}$ の場合は逆に Nu_0 は減少し、 $|Re|\alpha/4 \sim 4.4$ でゼロとなる。この場

Fig. 10 Relation between Nu_0 and $|Re|\alpha/4$ with one wall heated one wall adiabatic

合、 $Nu_0=0$ となる $|Re|\alpha/4$ の値は両面等熱流束の場合と比べて小さい。これは最小固有値 β_1 が片面加熱・片面断熱の方が小さいからである。

Ⅳ. 結 論

縮小流路内層流の熱伝達を解析的に解いた結果、以下の結論が得られた。

- (1) 縮小流路内層流の熱伝達は Re 数および α に依存する。縮小流路内層流で壁面熱流束 $q \sim r^\delta$ の条件は、速度分布の違いを除くと平行平板内層流で $q \sim e^{-\alpha(2+1)x}$ の条件に対応する。したがって、縮小流路内層流で熱流束 $q \sim 1/r$ は平行平板内層流で $q = \text{一定}$ に対応する。
- (2) $q \sim 1/r$ の場合の無次元温度および Nu 数は、両面加熱の場合が(17'), (22)式、片面加熱・片面断熱の場合が(38), (42)式で表わされる。 $\alpha \sim 0$ の Nu 数は壁面熱流束一定の場合の平行平板内層流の Nu 数と一致する。 $|Re|\alpha$ が大きくなると Nu 数は全加熱区間にわたって増加し、 $|Re|\alpha \rightarrow \infty$ で $Nu_0 \rightarrow 12$ となる。
- (3) $q \sim r^\delta$ の場合の解は、両面加熱の場合が(32), (35)式、片面加熱・片面断熱の場合が(50), (51)式で表わされる。 $\delta < -1$ の場合の Nu 数は $q \sim 1/r$ の場合の Nu 数よりも大きくなる。 $\delta > -1$ の場合は、 $|Re|\alpha$ が大きくなるとともに Nu_0 は減少し、 $|Re|\alpha$ がある値を越えると $Nu_0 \rightarrow 0$ となる。
- (4) したがって、縮小流路内層流の熱伝達で $q = \text{一定}$ の場合も、 $|Re|\alpha$ が増加すると Nu_0 は減少し、 $|Re|\alpha/4$ が両面加熱で ~ 15.7 、片面加熱・片面断熱で ~ 4.4 を越えると $Nu_0 \rightarrow 0$ となる。

— 参考文献 —

- (1) SINGH, S.H.: *Appl. Sci. Res.*, 7, Ser. A, 325~340 (1958).
- (2) SELLARS, J.R., TRIBUS, M., KLEIN, J.S.: *Trans. ASME*, 78, 441~448 (1956).
- (3) HATTON, A.P., QUARMBY, A.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, 5, 973~980 (1962).
- (4) PATEL, V.C., HEAD, M.R.: *J. Fluid Mech.*, 34, 371~392 (1968).
- (5) SPARROW, E.M., STARR, J.B.: *J. Appl. Mech.*, *Trans. ASME*, 87, 684~689 (1965).
- (6) YANG, J.W., PRICE, G.M.: *Appl. Sci. Res.*, 21, 361~371 (1972).
- (7) WALKER, V., RISHEHRI, S.A.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15, 781~788 (1972).
- (8) MILLSAPS, K., POHLHAUSEN, K.: *J. Aeronaut. Sci.*, 20, 187~196 (1953).