707. プラズマ遠心法の流れの解析

岡本 毅*, 清瀬 量平*, 鈴木 篤之*

(1979年 7月6日 受理)

(1980年 5月20日 再受理)

Analysis of Fluid Flow in Plasma Centrifuges

By Tsuyoshi OKAMOTO,

Ryohei KIYOSE and Atsuyuki SUZUKI

In the isotope separation by means of plasma centrifuge, the axial flow appears in the flow of rotating plasma in the cylindrical discharge vessel. The third-order differential equation that expresses the axial velocity field in the equilibrium state is solved with calculus of finite differences under the boundary conditions (no-slip, axial symmetry) and an integral constraint. A numerical example for lithium isotope separation show that, by using a flow function and the average concentration of ^6Li in the enriching section, the separation power of 0.03 kg/yr is obtained with the maximum rotational velocity of 7 km/s and the axial flow rate of 1×10^{-8} kg/s.

KEYWORDS: isotope separation, plasma centrifuge, equilibrium state, lithium isotopes, separation power, centrifugation

I. 緒 論

前報⁽¹⁾ではプラズマの抜き出しがない場合の回転プラズマの同位体分離への応用を考えた。その具体的な計算例として、リチウム(Li)の同位体分離を取り上げ、注目する同位体(^6Li)の径方向の濃度分布から平衡分離係数の大きさをいくつかのプラズマ・パラメータに関して調べた。そして得られた平衡分離係数はプラズマの最大回転速度をイオン音速程度に制限した場合でも十分に大きいことがわかった。

実際に、プラズマ遠心法により同位体濃縮を行う場合、主として円筒放電容器とその軸方向磁場発生用のコイルとで分離単位を構成することになる。この円筒放電容器内のプラズマの流れに関しては、その抜き出しに伴って生ずる新たな軸方向流れの成分をも考えなければならない。本報では、従来のガス遠心分離機内の流体力学的解析手法に従って、回転プラズマ流れ場内でこの軸方向速度分布を与える3階常微分方程式を導出して、与えられた境界条件と積分制約式の下に数値解を得る。得られた軸方向の速度分布と径方向の質

量密度分布とによって定義される Flow function および注目する同位体の濃度分布とを考察することにより、近似的にプラズマ遠心法の場合の分離器の分離能力を求める。

II. 解 析

プラズマの流れを電磁流体力学的手法で解析する場合、厳密には連続の式、運動方程式、エネルギー式、一般化されたオームの法則、Maxwell の電磁場方程式および状態方程式を連立させなければならない。しかし以下の解析では、次のような簡化系を取り扱うことにする。すなわち、プラズマの温度は空間的に一様であり、誘導磁場の大きさは外部磁場に比して十分に小さいものとして、エネルギー式および Maxwell の電磁場方程式を無視する。プラズマは電氣的に中性な完全電離プラズマで、その流れは定常的でしかも円柱座標で表示した場合軸対称とする。またプラズマの流れ場の摂動による放電電流への摂動項は無視する。

* 東京大学工学部原子力工学科(Dept. of Nucl. Eng., Univ. of Tokyo)

円筒放電容器内の完全電離プラズマはローレンツ力により回転させられる。その流れ場 $u=(0, u_\theta(r), 0)$ にプラズマの抜き出しに伴う軸方向の流れ成分が加わると、新たな平衡状態の流れ場が現れる。この新しい平衡状態での速度成分をそれぞれ平衡時の摂動項 $\tilde{u}_r(r, z), \tilde{u}_\theta(r, z), \tilde{u}_z(r, z)$ を用いて、

$$\left. \begin{aligned} u_r(r, z) &= 0 + \tilde{u}_r(r, z) \\ u_\theta(r, z) &= u_\theta(r) + \tilde{u}_\theta(r, z) \\ u_z(r, z) &= 0 + \tilde{u}_z(r, z) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

と表わす。この結果、プラズマの状態も変化し、同様に質量密度と圧力は

$$\left. \begin{aligned} \rho_m(r, z) &= \rho_m(r) + \tilde{\rho}_m(r, z) \\ P(r, z) &= P(r) + \tilde{P}(r, z) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

と置き換えられる。ここで、(1)式中の $u_\theta(r)$ は〔付録〕の(A1)式に、また(2)式中の $\rho_m(r), P(r)$ もそれぞれ(A2), (A3)式に示されている。(1), (2)式の関係を用いて連続の式、運動方程式および状態方程式を書き換える。そして2次以上の摂動項を無視すると、次の線形方程式*を得る。

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_m(r) \tilde{u}_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_m(r) \tilde{u}_z) = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & -\tilde{\rho}_m \frac{u_\theta^2(r)}{r} - 2\rho_m(r) \frac{u_\theta(r)}{r} \tilde{u}_\theta \\ & = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} - \frac{\tilde{u}_r}{r^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial z^2} \right] \\ & + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{u}_r) + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \rho_m(r) \frac{\partial u_\theta(r)}{\partial r} \tilde{u}_r + \rho_m(r) \frac{u_\theta(r)}{r} \tilde{u}_r \\ & = \mu \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial r} - \frac{\tilde{u}_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial z^2} \right] \\ & + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{u}_r) + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial r} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\tilde{P} = k(T_e + T_i) \frac{\tilde{\rho}_m}{m_i} \quad (7)$$

ただし、 μ : 粘性係数、 m_i : イオン質量
 k : ボルツマン定数、 T_e : 電子温度
 T_i : イオン温度

円筒放電容器の長さ L がその半径 r_p に比して十分に大きければ、その放電容器の大部分にわたって速度場は軸方向座標 z に独立となる。さらに、放電容器の端の効果(end effect)を無視すれば、摂動項は

$$\tilde{u}_r(r, z) = 0, \quad \tilde{u}_\theta(r, z) = \tilde{u}_\theta(r), \quad \tilde{u}_z(r, z) = \tilde{u}_z(r) \quad (8)$$

と表わされる。この時、(5)式は

$$0 = \mu \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial r} - \frac{\tilde{u}_\theta}{r^2} \right] \quad (9)$$

となり、境界条件 $\tilde{u}_\theta(0) \neq \infty, \tilde{u}_\theta(r_p) = 0$ を満足する解は $\tilde{u}_\theta(r) = 0$ である。したがって、(4), (6)式は以下の簡単な式になる。

$$-\tilde{\rho}_m \frac{u_\theta^2(r)}{r} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} \quad (10)$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial r} \right) \quad (11)$$

軸方向の速度分布を与える式は、(7), (10), (11)式を用いて

$$\begin{aligned} & \frac{m_i}{k(T_e + T_i)} \cdot \frac{u_\theta^2(r)}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{u}_z}{dr} \right) \\ & = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{u}_z}{dr} \right) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

と得られる。この3階常微分方程式に対する境界条件は

$$\frac{d}{dr} (\tilde{u}_z(0)) = 0 \quad (13)$$

$$\tilde{u}_z(r_p) = 0 \quad (14)$$

となる。さらに、円筒放電容器からの抜き出し流量(処理流量) F は、質量密度分布 $\rho_m(r)$ と軸方向速度分布 $\tilde{u}_z(r)$ とから次式

$$F = 2\pi \int_0^{r_p} \rho_m(r) \tilde{u}_z(r) r dr \quad (15)$$

で関係づけられる。この式は $\tilde{u}_z(r)$ の大きさに対する1つの制約条件となり、ここでは積分制約式(integral constraint)と呼ぶ。

次に、 u_θ, ρ_0 を代表的な速度、質量密度とし、無次元量 $r^* = r/r_p, u^*(r^*) = \tilde{u}_z(r)/u_0, \rho_m^*(r^*) = \tilde{\rho}_m(r)/\rho_0$ を導入して(12)~(15)式の無次元方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{d^3 u^*}{dr^{*3}} + F(r^*) \frac{d^2 u^*}{dr^{*2}} + G(r^*) \frac{du^*}{dr^*} = 0, \\ & (0 \leq r^* \leq 1) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{ここで、} F(r^*) = \frac{1}{r^{*2}} - K_1 (\ln r^*)^2 r^*$$

$$G(r^*) = -\frac{1}{r^{*2}} - K_1 (\ln r^*)^2$$

$$K_1 = \frac{m_i^2 r_p^2 B_z^2}{16\pi^2 k (T_e + T_i) L^3 \mu^2}$$

境界条件

$$\frac{d}{dr^*} (u^*(0)) = 0 \quad (17)$$

$$u^*(1) = 0 \quad (18)$$

* 運動方程式中の重力項は無視してある。

積分制約式

$$\int_0^1 \rho_m^*(r^*) u^*(r^*) r^* dr^* = K_2 \quad (19)$$

ここで, $K_2 = F / 2\pi r_p^2 \rho_0 u_0$

与えられた境界条件と積分制約式を満足する解を差分法により求める。変数 r^* の区間 $[0, 1]$ を等間隔に n 等分 ($h=1/n$) する時, (16) 式は次の差分方程式に変換される。

$$u_{i-2}^* + A_i u_{i-1}^* + B_i u_i^* + C_i u_{i+1}^* - u_{i+2}^* = 0, \\ (i=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (20)$$

ここで,

$$A_i = -2 - 2hF(r_i^*) + h^2 G(r_i^*)$$

$$B_i = 4hF(r_i^*)$$

$$C_i = 2 - 2hF(r_i^*) - h^2 G(r_i^*)$$

$$F(r_i^*) = \frac{1}{r_i^*} - K_1 (\ln r_i^*)^2 r_i^*$$

$$G(r_i^*) = -\frac{1}{r_i^{*2}} - K_1 (\ln r_i^*)^2$$

$$(1) \quad r_i^* = ih$$

(20) 式を各基点 i に適用して, 境界条件 $u_i^* = u_{i+1}^* = 0$ と, 積分制約式 $h \sum_{i=0}^{n-1} \rho_m^*(r_i^*) u^*(r_i^*) r_i^* = K_2$ とを用いて n 元連立 1 次代数方程式を得る。ただし, 基点 $i=n-1$ においては未定義の量 u_{n+1}^* が現れるので, この点に対しては後退差分式を利用して

$$2u_{n-4}^* - 6u_{n-3}^* + [6 - 2hF(r_i^*) + h^2 G(r_i^*)] u_{n-2}^* \\ + [-2 + 4hF(r_i^*)] u_{n+1}^* = 0 \quad (21)$$

を用いる。

Ⅲ. 速度分布特性への影響

第Ⅱ章中の (20), (21) 式と (A1)~(A3) 式をプログラミングして計算コード SUIP-Ⅲ を作成した。数値計算例として, Li 同位体分離 (${}^6\text{Li}$ 7.4%, ${}^7\text{Li}$ 92.6%) を考え, そのために想定された入力データを Table 1 にまとめている。表中でプラズマの温度は熱平衡状態にあり電子温度とイオン温度は等しいとする。また, プラズマの輸送定数 μ, σ_{ei} の値は, 磁場の影響は小さいとしてスピッツァーの式²⁾から求められている。

要求されるプラズマの回転速度は軸方向磁束密度 B_z が一定の場合, 径方向電流成分 i_r を調整して得る。この時, 回転速度の最大値 $u_{\theta \max}$ は (A1) 式から位置 $r=r_p/e_N$ (e_N : 自然対数の底) にあり, 放電容器の軸心およびその周壁上で速度がゼロとなる, 全体として放物線に似た回転速度分布を示す。以下に, 最大回転速度が $u_{\theta \max}=1, 4, 7$ km/s となる 3 つのケースを想定して軸方向の速度分布を計算する。

Table 1 Input data for Li isotope separation

Ion mass (${}^7\text{Li}$)	m_i	1.165×10^{-26} kg
Electron temperature	T_e	6,000 K
Ion temperature	T_i	6,000 K
Number density of plasma	n	$8.2 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$
Axial magnetic field density	B_z	0.7 Wb/m ²
Viscosity coefficient	μ	$2.7 \times 10^{-7} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$
Electrical conductivity	σ_{ei}	1,369.9 mho/m
Starting point of calculation	δ	0.003 m
Length of discharge vessel	L	0.3 m
Radius of discharge vessel	r_p	0.05 m
Characteristic value for mass density	ρ_0	$1 \times 10^{-6} \text{ kg/m}^3$
Characteristic value for axial velocity	u_0	1 m/s
Flow rate	F	$1 \times 10^{-3} \text{ kg/s}$

最初に, プラズマの数密度が $n=8.2 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ の時, 最大回転速度の質量密度分布への影響を Fig. 1 に実線で示す。同図中の・印は (A2) 式中に現れる初期値 $\rho_m(r=\delta)$ である。プラズマの回転速度が大きくなるにつれて質量密度の勾配は大きくなっている。(A1), (A2) 式から回転速度分布と質量密度分布とが

Fig. 1 Mass density distributions of Li plasma

求まると、軸方向の速度分布が径方向座標 r の関数として得られる。そこで最大回転速度が $u_{\theta \max} = 4 \text{ km/s}$ と一定で、処理流量 F をパラメータにした時、軸方向速度分布への影響を Fig. 2 に示す。

Fig. 2 Effect of flow rate on axial velocity distributions

また、処理流量 $F = 1 \times 10^{-8} \text{ kg/s}$ と一定で、最大回転速度を変えた場合の軸方向速度分布への影響は Fig. 3 に示されている。同図から、回転速度が増すにつれて放電管軸心からその周壁に向けて軸心上と同一速度の範囲が拡大して行く様子がわかる。それぞれの軸方向速度分布に対する平均速度 $\langle \bar{u}_z \rangle$ は

$$\langle \bar{u}_z \rangle = 2u_0 \int_0^1 u^*(r^*) r^* dr^* \quad (22)$$

で求められ、図中の * 印はその位置と大きさを示している。一方、プラズマの数密度が $n = 4.9 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ と低くなった場合、これによる質量密度分布 (Fig. 1 中の破線) の軸方向速度分布への影響は Fig. 2 中の破線で示されている。同図から速度分布の形は大きく変わらないことがわかる。

Fig. 3 Effect of rotational velocity of plasma on axial velocity distributions

第 II 章中の積分制約式を

$$F(r^*) \equiv 2\pi r_p^2 \rho_0 u_0 \int_0^{r^*} \rho_m(r^*) u^*(r^*) r^* dr^* \quad (23)$$

と表わして、これを Flow function と定義する⁽³⁾。この関数の様子をそれぞれの最大回転速度に対して描いたのが Fig. 4 である。処理流量 $F = 1 \times 10^{-8} \text{ kg/s}$ の時、位置 $r^* = 1$ で Flow function の値は $F(1) = 1 \times 10^{-8} \text{ kg/s}$ となり両者は一致する。図中の破線はプラズマの数密度 $n = 4.9 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ の時の様子を示す。ここで、プラズマ遠心法による場合の分離器 (円筒放電管) のもつ分離能力を $u_{\theta \max} = 7 \text{ km/s}$ について概算してみる。前報⁽⁴⁾によれば、⁶Li の濃縮されている領域は $u_{\theta \max}$ にほとんど関係なく軸心から約 3.5 cm までであり、それより外側は天然濃度 ($N_F = 7.4\%$) より低い領域となっている。Fig. 4 において、領域 A は濃縮域を、領域 B は回収域を示し、その両領域の接する位置における Flow function の値は $1/2$ となる。この値は、濃縮域のプラズマと回収域のプラズマが互いに混合しないように抜き出せば、普通いわれる分離器のカット θ に相当する。濃縮域の ⁶Li 平均濃度 $N_F = 7.7\%$ であることを用いて、この分離器のもつ分離能力 δU を計算する。

$$\delta U = \frac{\theta}{1-\theta} \cdot \frac{F}{2} (\alpha - 1)^2 \quad (24)$$

Fig. 4 Flow function at $u_{\theta \max} = 1, 4, 7$ km/s

$$\text{ここで, } \alpha = \frac{N_P}{1 - N_P} / \frac{N_F}{1 - N_F}$$

放電容器からの処理流量が $F = 1 \times 10^{-8}$ kg/s であれば、得られる分離能力は $\delta U \approx 1 \times 10^{-10}$ kg/s = 0.03 kg/yr となる。U 濃縮用のガス遠心分離機に比較して分離能力は約 1 桁小さい。しかし、プラズマ遠心法の場合には、放電容器壁に沿って生じる軸方向の濃縮効果も考えに入れなければならない。さらに、プラズマの数密度、処理流量あるいは回転速度が技術的に増大可能であれば、より一層の分離能力が期待できる。

IV. 結 論

円筒放電容器内の回転プラズマ流れに軸方向の流れが加わる時、この軸方向速度分布を与える 3 階常微分方程式が得られた。これを与えられた境界条件と積分制約式の下に差分法により解き、次の知見を得た。

円筒放電容器内の軸方向速度分布は、通常の中性ガスの回転運動を伴わない円筒内層流の速度分布と類似

している。しかし、プラズマの回転速度が大きくなるにつれて容器軸心からその周壁に向けて軸心上と同一速度の範囲が拡大し、全体的に平均速度は高くなる。プラズマの質量密度分布の形が軸方向速度分布の形に及ぼす影響は、計算された範囲内では大きな差異はみられない。また、プラズマの最大回転速度が $u_{\theta \max} = 7$ km/s の時、濃縮域での ^6Li の平均濃度は $N_P = 7.7\%$ であり、処理流量 $F = 1 \times 10^{-8}$ kg/s で運転すると、得られる分離能力は $\delta U = 0.03$ kg/yr となる。

— 参考文献 —

- (1) 岡本 毅, 他: 原子力誌, 21(7), 596 (1979).
- (2) SPITZER, L., Jr.: "Physics of Fully Ionized Gases", (1962), Intersci. Publ.
- (3) OLANDER, D.R.: "Advances in Nuclear Science and Technology", Vol. 6, p105 (1972), Academic Press.

〔付 録〕 平衡解

プラズマの流れ場が $u = (0, u_{\theta}(r), 0)$ である時の回転速度分布 $u_{\theta}(r)$, 質量密度分布 $\rho_m(r)$, 圧力分布 $P(r)$ はそれぞれ次式で与えられる⁽¹⁾。

$$u_{\theta}(r) = \frac{irB_z}{4\pi L\mu} r \ln \frac{r}{r_p}, \quad (0 \leq r \leq r_p) \quad (A1)$$

$$\rho_m(r) = \sqrt{\exp[S_1 S_2(r)] \left[S_1 S_3 \int F(r) dr + C \right]}, \quad (\delta \leq r \leq r_p) \quad (A2)$$

ここで,

$$S_1 = \frac{2m_i}{k(T_e + T_i)}$$

$$S_2(r) = \frac{ir^2 B_z^2}{32\pi^2 L^2 \mu^2} r^2 \left[\left(\ln \frac{r}{r_p} \right)^2 - \ln \frac{r}{r_p} + \frac{1}{2} \right]$$

$$S_3 = \frac{\sigma_{ei} m_i i r B_z^2}{2\pi L e}$$

$$F(r) = \frac{1}{r} \exp[-S_1 S_2(r)] \approx \sum_{n=1}^m p_n \left(\frac{1}{r} \right)^{n-1}$$

$$C = \rho_m^2(r=\delta) \exp[-S_1 S_2(\delta)]$$

$$-S_1 S_3 \left[p_1 \delta + p_2 \ln \delta - \sum_{n=1}^m p_n \frac{\delta^{-(n-2)}}{n-2} \right]$$

e : 電子の電荷, p_n : 近似多項式中の係数

$$P(r) = k(T_e + T_i) \frac{\rho_m(r)}{m_i} \quad (A3)$$