718. 3コイル部分トラスにおける超電導 トロイダルコイルの電磁弾性座屈

上坂 充*, 宮 健三*, 高木 敏行*, 染谷 和良*, 柳 秀治*

(1980年 5月12日 受理)

(1980年 11月 5日 再受理)

Electromagnetoelastic Buckling on Three-Coil Superconducting Partial Torus

By Mitsuru UESAKA, Kenzo MIYA,
Toshiyuki TAKAGI, Kazuyoshi SOMEYA and Hideharu YANAGI

Numerical analyses and experiments on electromagnetoelastic buckling of superconducting toroidal field coils in a magnetic fusion reactor are presented. Magnetic attractive forces from neighboring coils lead to the electromagnetoelastic buckling when the coil current reaches the critical buckling current. The critical buckling currents of several types of toroidal field coils can be calculated by the numerical method developed here. The method is based upon the finite element method and the principle of stationary potential energy is applied to potential energy given by a sum of strain energy and magnetic energy. In order to confirm the buckling phenomenon and provide a check on the numerical method, the buckling experiments on a three-coil superconducting partial torus were carried out in liquid helium and the critical buckling currents were measured. The torus consisted of model coils made by winding a NbTi wire in D-shape and potting it in epoxy.

On the other hand, elastic moduli of the model coil at liquid helium temperature are required for the numerical analysis. Those values were obtained from three point bend tests in liquid helium and from application of the theory for an orthotropic thin plate.

KEYWORDS: superconducting toroidal field coil, electromagnetoelastic buckling, buckling current, partial torus, finite element method, strain energy, magnetic energy, vector potential, orthotropic thin plate, liquid helium, cryostat, computer codes, computer calculations, niobium-titanium wire, numerical analysis

I. 序

磁場閉じ込め核融合炉にとって超電導マグネットの使用は必要不可欠である。実機規模の超電導トロイダルコイルの製作という問題を考えてみた場合、解決されなければならない電磁構造工学的問題は多く、本研究の主題である電磁弾性座屈問題もその1つである。実際の超電導トロイダルコイルは一見したところ頑強に支持されているので、電磁弾性座屈は起りそうにも見えない。しかしこの点に関しては、詳細な3次元の解析を行なってみなければ、全体座屈までは生じないが局部座屈が生じて変形が進行し、超電導状態の破損

に至る可能性が全くないとはいえない。

その問題とは別に、電磁弾性座屈現象は、複数のコイルが対称に配置されている場合、コイル電流が臨界値に達すれば必ず生じること、またそれは磁場中におけるコイルの振動(地震力や OH コイル電流によって誘起される)が磁場と密接な関係があることなどから、学問的にはきわめて興味深い問題の1つである。トロイダルコイルを力学的平衡問題の対象として考えれば、コイルの電磁弾性座屈の可能性はあることは自明であるが、その実験的検証は Moon⁽¹⁾⁽²⁾によって初めて行わ

* 東京大学工学部 原子力工学研究施設(Nucl. Eng. Res. Lab., Faculty of Eng., Univ. of Tokyo)

れた。彼の実験では、座屈電流値は本研究で採用されている静的手法と、コイルの振動数の変化から推定する動的手法との2つの方法を用いて求められた。彼の示したモーダル解析手法では、コイルの弾性定数および寸法が与えられただけでは座屈電流値を予測することはできない。すなわち、トロイダルコイル系の振動特性が実験によって求められている必要がある。この点を克服するため、本研究では有限要素法に基づく解析手法の開発が試みられた。

現象的には、トロイダルコイルの座屈現象は磁場中におかれた強磁性板の電磁弾性座屈現象⁽³⁾⁽⁴⁾と本質的に同じである。そのため、トロイダルコイルをトロイダル磁場中におかれた強磁性板と仮定した等価板磁石法(equivalent plate magnet concept)が考案され、実験規模の支持付きコイルの電磁弾性座屈問題が解析された⁽⁵⁾。ところが等価板磁石法では、コイルの回転の効果は考慮できるが、たわみによる磁場の変化の効果を考慮していないため、本研究ではベクトルポテンシャル法の導入を行なって解析手法の一般化を試みた。一方、使用したコイル材料は異方性を有しているので、そのことを考慮しなければ実験と理論の一致は期待できない。そのため液体 He 温度でのコイル材料の3点曲げ試験を実施した。解析結果と実験結果とを比較したところ、大変よい一致が得られた。

II. 理論的研究

一般に、トラス状に配置されたトロイダルコイルに蓄えられるポテンシャルエネルギーは、コイル電流が増すにつれて上昇する。そして、コイル電流が座屈電流値に達すると、対称に配置されたコイルのポテンシャルエネルギーが極大となり、山の頂上のボールが左右どちらかへころがり落ちるように、安定を求めてトロイダルコイルは面外方向に座屈を起す。以上の考え方に基づき、ポテンシャルエネルギーを評価し、ポテンシャルエネルギーの停留原理を適用することにより座屈電流値を算出した。解析はFig. 1に示すような3コイル部分トラスについて行われたが、以後、真中のコイルを試験コイル、両側のコイルを隣接コイルと呼ぶ。解析には次の3つの条件を仮定した。

- (1) トロイダルコイルは2次元平板として近似する。
- (2) 試験コイル上のベクトルポテンシャルはコイル電流を近似的に線電流とみなして計算する。
- (3) コイルの面内変形が座屈電流値に及ぼす効果は無視する。後述するが、面内変形は面外変形

Current in the neighboring coils is assumed as filament.

Fig. 1 Three coil partial torus

に比べて十分小さい。

1. ポテンシャルエネルギーの評価

ここでいうポテンシャルエネルギーは、歪エネルギー、磁気エネルギーおよびコイル電流を一定に保つために電源がする仕事の代数和で定義する。Fig. 1に示される3個の部分トラス(partial torus)の試験コイルに蓄えられるポテンシャルエネルギーは有限要素法を用いて以下のように定式化できる。

トロイダルコイルの対称性を考慮して、三角形要素を用いたメッシュ分割図の上半分だけをFig. 2に示す。トロイダルコイルの形状は、円の $\frac{1}{4}$ を直線状にしたD型となっている。

Fig. 2 Example of triangular meshes for buckling analysis

(1), (2)式で定義される一般化歪 $\{\epsilon\}$ 、一般化応力 $\{\sigma\}$ を用いて、以下の過程で歪エネルギーを算出する⁽⁶⁾。

$$\{\epsilon\}^T = \{-\partial^2 w / \partial x^2 - \partial^2 w / \partial y^2 - 2\partial^2 w / \partial x \partial y\} \quad (1)$$

$$\{\sigma\}^T = \{M_x, M_y, M_{xy}\} \quad (2)$$

上式で、 w は面外変位、 M_x, M_y, M_{xy} はそれぞれ x, y 軸まわりの曲げモーメント、ねじりモーメントを表わし、添字 T は転置行列を表わす。 x, y 軸とは、Fig. 3のような局所座標系で定義される。同図で三角形要素は節点 i, j, k で定義され、局所座標系の原点は節点 i に固定されている。一般化応力と一般化歪は弾性マトリックスを用いて次式のように結び付けられる。

Fig. 3 Triangular element in local coordinate system

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (3)$$

直交異方性を考慮した弾性マトリックスは(4)式で与えられる⁶⁾。

$$[D] = \frac{t^3}{12} \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\text{ここで, } D_x = \frac{E_x}{1-\nu_x\nu_y}, \quad D_y = \frac{E_y}{1-\nu_x\nu_y}$$

$$D_1 = \frac{\nu_x E_y}{1-\nu_x\nu_y} = \frac{\nu_y E_x}{1-\nu_x\nu_y}$$

E_x と ν_x , E_y と ν_y はそれぞれ Fig. 3 に示された局所座標系における x, y 方向のヤング率, ポアソン比を表わし, G_{xy} は剪断弾性係数を表わしている。 t はコイルの厚さである。

次に, 面外変位 w を次式で内挿することにする⁶⁾。

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 (x^2 y + xy^2) + \alpha_9 y^3 = [X]\{\alpha\} \quad (5)$$

$$\text{ただし, } [X] = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2 y + xy^2 \ y^3]$$

$$\{\alpha\}^T = \{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6 \ \alpha_7 \ \alpha_8 \ \alpha_9\}$$

また, 要素の節点変位ベクトルは次式で定義される。

$$\{\delta\}^T = \{w_i(\beta_x)_i, (\beta_y)_i, w_j(\beta_x)_j, (\beta_y)_j, w_k(\beta_x)_k, (\beta_y)_k\} \quad (6)$$

ここで, $w_i, (\beta_x)_i, (\beta_y)_i$ はそれぞれ Fig. 3 に示される節点 i における面外変位および x, y 軸まわりの回転を表わしている。すなわち,

$$\beta_x = \partial w / \partial y, \quad \beta_y = -\partial w / \partial x$$

と表わされる。(6)式に(5)式を代入することにより次式を得る。

$$\{\delta\} = [h]\{\alpha\} \quad (7)$$

$[h]$ は具体的には文献(7)に示される。

(5)式と(7)式より, 面外変位と節点変位ベクトルとの関係式が(8)式のように与えられる。

$$w = [X][h]^{-1}\{\delta\} = [N]\{\delta\} \quad (8)$$

ここで, マトリックス $[N]$: 形状関数

(8)式を(1), (3)式に代入することにより, 一般化歪と一般化応力は節点変位ベクトル $\{\delta\}$ を用いて次のように与えられる。

$$\{\varepsilon\} = [P][h]^{-1}\{\delta\} \quad (9)$$

$$\{\sigma\} = [D][P][h]^{-1}\{\delta\} \quad (10)$$

また, 要素当りの歪エネルギー ΔU_e^* は次式で定義されるので,

$$\Delta U_e^* = \frac{1}{2} \iint \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dx dy \quad (11)$$

(11)式に(9), (10)式を代入することにより, ΔU_e^* は次のようになる。

$$\Delta U_e^* = \{\delta\}^T [K_e]^* \{\delta\} \quad (12)$$

ここで,

$$[K_e]^* = \iint \{[h]^{-1}\}^T [P]^T [D] [P] [h]^{-1} dx dy$$

$[K_e]^*$: 要素当りの剛性マトリックス

しかし, (12)式で与えられる歪エネルギーは, Fig. 3 で示される局所座標系で求められているため, 加算する前に Fig. 1 に示されたような全体座標系での表示式に変換しなければならない。変換マトリックス $[Q]$ を用いて, ΔU_e^* は次式のようにになる。

$$\Delta U_e^* = \{\delta\}^T [K_e]^* \{\delta\}, \quad (13)$$

$$[K_e]^* = [Q]^T [K_e]^* [Q] \quad (14)$$

添字 g は全体座標系であることを表わしている。

したがって, ΔU_e は次のように求められる。

$$\Delta U_e = \{\delta\}^T [K_e] \{\delta\} \quad (15)$$

ここで, $[K_e]$: コイル全体における剛性マトリックス

$\{\delta\}$: 全体座標系における節点変位ベクトル

次に, 試験コイルの磁気エネルギーは, 電流密度ベクトル J と隣接コイルがつくるベクトルポテンシャル A とのスカラ積で与えられる。つまり, ここでは自己インダクタンスによるエネルギーは考慮しない。また磁気エネルギーを, 試験コイルが変形する前の磁気エネルギー U_m^0 と, 変形するとき生じる磁気エネルギーの変化 ΔU_m に分けると, U_m^0 は次式で与えられる。

$$U_m^0 = \iint A \cdot J t dx dy \quad (16)$$

次に ΔU_m を求めるが, その前に変形によるベクトルポテンシャルと電流密度ベクトルの変化を考える。

ベクトルポテンシャルは次式で定義される。

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{J}{|r-r'|} dv' \quad (17)$$

まず, Fig. 1 に示した2個の隣接コイルが試験コイルの1要素の重心につくるベクトルポテンシャルを求め

る。ここで仮定(b)を用い、さらに(17)式の積分を区分求積法で行なって A を求めると、次式ようになる。

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \sum_i \frac{I ds_{i,1}}{|r_0 - r_{i,1}|} + \sum_i \frac{I ds_{i,2}}{|r_0 - r_{i,2}|} \right\} \quad (18)$$

(18)式の右辺の第1, 第2項はそれぞれFig. 1におけるコイル1, コイル2がつくるベクトルポテンシャルである。第1項の中で, I はコイル電流, $ds_{i,1}$ はFig. 1に示されているような線要素, $r_{i,1}$ はその線要素の中点, r_0 はテストコイルの要素の重心を表わしている。ここで,

$$ds_{i,1} = (\Delta x_{i,1} \Delta y_{i,1} \Delta z_{i,1})$$

$$ds_{i,2} = (\Delta x_{i,2} \Delta y_{i,2} \Delta z_{i,2})$$

とおくと, A は次のように書き直せる。

$$A = A_x i + A_y j \quad (19)$$

$$\text{ただし, } A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \sum_i \frac{I \Delta x_{i,1}}{|r_0 - r_{i,1}|} + \sum_i \frac{I \Delta x_{i,2}}{|r_0 - r_{i,2}|} \right\}$$

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \sum_i \frac{I \Delta y_{i,1}}{|r_0 - r_{i,1}|} + \sum_i \frac{I \Delta y_{i,2}}{|r_0 - r_{i,2}|} \right\}$$

また, i, j, k はそれぞれ全体座標系における x, y, z 方向の単位ベクトルを表わす(Fig. 4(a))。 A_x は隣接コイルが対称的に配置されているのでゼロとなる。次に, 試験コイルに面外変位 w , 回転 β_x, β_y が生じた後のベクトルポテンシャル A' を求める。いま, 微小変形を考えているので, ベクトルポテンシャルの変化は面外変位にのみ依存し, 回転には依存しないとした。したがって, A' は次のようになる。

$$A' = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \sum_i \frac{I ds_{i,1}}{|r_0 + u - r_{i,1}|} + \sum_i \frac{I ds_{i,2}}{|r_0 + u - r_{i,2}|} \right\} \quad (20)$$

ただし, $u = (0 \ 0 \ w)$

(20)式の右辺をテーラー展開して, 配置の対称性を考慮すると, 次式が得られる。

$$A' = A + I \sum_i \left\{ 2F_2 w^2 \begin{pmatrix} \Delta x_{i,1} \\ \Delta y_{i,1} \\ 0 \end{pmatrix} + (2F_1 w + 2F_3 w^3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta z_{i,1} \end{pmatrix} \right\} \quad (21)$$

ただし, A は変形前のベクトルポテンシャルであり, F_n はテーラー展開の n 次の係数に対応している。

次に, 試験コイルの電流密度ベクトル J を求める。試験コイルはFig. 4に示すように x - y 平面上の薄板と仮定しているため J は z 成分をもたない。したがって,

(a) Current vector on X-Y plane

(b) Variation of current density vector induced by rotation about Y axis

Fig. 4 Current density vector and its variation

$$J = J_x i + J_y j \quad (22)$$

Fig. 4(b)に示すように, 回転 β_x, β_y によって J の大きさは変わらないが, ベクトル量であるため次式に示される J' に変化する。

$$\begin{aligned} J' &= J_x \cos \beta_y i + J_y \cos \beta_x j + (J_y \sin \beta_x - J_x \sin \beta_y) k \\ &\approx J_x \left(1 - \frac{\beta_y^2}{2} \right) i + J_y \left(1 - \frac{\beta_x^2}{2} \right) j + (J_y \beta_x - J_x \beta_y) k \\ &= J - \frac{1}{2} J_x \beta_y^2 i - \frac{1}{2} J_y \beta_x^2 j + (J_y \beta_x - J_x \beta_y) k \end{aligned} \quad (23)$$

また, 要素当りの磁気エネルギー変化 ΔU_m^e は次式で与えられるので,

$$\Delta U_m^e = \iint A' \cdot J' t dx dy - \iint A \cdot J t dx dy \quad (24)$$

(24)式に(19), (21)~(23)式を代入して整理すると次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \Delta U_m^e &= -\frac{1}{2} \iint (J_x A_x \beta_x^2 + J_y A_y \beta_y^2) t dx dy \\ &\quad + I \iint \sum_i F_2 (J_x \Delta x_{i,1} + J_y \Delta y_{i,1}) w^2 t dx dy \end{aligned} \quad (25)$$

(25)式の右辺の第1項は回転 β_x, β_y のみに依存する項で、第2項は面外変位 w のみに依存する項である。

(21)式の F_1, F_2, F_3 および(25)式の導出については〔付録〕を参照されたい。以後それぞれ $\Delta U_{m,r}^*, \Delta U_{m,i}^*$ で表わす。

次に、 $\Delta U_{m,r}^*$ に(8)式を代入することにより、次のように書き直せる。

$$\Delta U_{m,r}^* = -\{\delta\}^T I^2 [K_m]_r \{\delta\} \quad (26)$$

ただし、

$$[K_m]_r = \iint \{[h]^{-1}\}^T \left\{ \frac{J_x}{I} \cdot \frac{A_x}{I} \cdot \frac{\partial[N]^T}{\partial x} \cdot \frac{\partial[N]}{\partial x} + \frac{J_y}{I} \cdot \frac{A_y}{I} \cdot \frac{\partial[N]^T}{\partial y} \cdot \frac{\partial[N]}{\partial y} \right\} [h]^{-1} t dx dy$$

次に $\Delta U_{m,i}^*$ は次のように書き換えることができる。

$$\Delta U_{m,i}^* = I^2 \Phi \iint w^2 t dx dy \quad (27)$$

$$\text{ただし、} \Phi = \sum_i 2F_i \left(\frac{J_x}{I} \Delta x_{i,1} + \frac{J_y}{I} \Delta y_{i,1} \right)$$

(27)式に(8)式を代入すると、次のようになる。

$$\Delta U_{m,i}^* = I^2 \{\delta\}^T [K_m]_i \{\delta\} \quad (28)$$

ただし、

$$[K_m]_i = \{[h]^{-1}\}^T \Phi \iint [X]^T [X] t dx dy [h]^{-1}$$

ΔU_m^* は(26)、(28)式より次式のように求められる。

$$\Delta U_m^* = I^2 \{-\{\delta\}^T [K_m]_r \{\delta\} + \{\delta\}^T [K_m]_i \{\delta\}\} \quad (29)$$

さらに、歪エネルギーのときと同じ操作により、試験コイル全体における磁気エネルギー変化 ΔU_m は次式のようにになる。

$$\Delta U_m = I^2 \{-\{\delta\}^T [K_m]_r \{\delta\} + \{\delta\}^T [K_m]_i \{\delta\}\} \quad (30)$$

(30)式で全体座標系の節点変位ベクトルを改めて $\{\delta\}$ と表わした。

試験コイルの変形により、試験コイルと隣接コイルとの相互インダクタンスは変化するが、コイル電流を供給する電源は電流値を一定に保つために仕事をする。この電源のなす仕事 U_s は、回路を動かすに要する仕事とは符号が反対で絶対値は2倍となる⁽⁸⁾。微小回転 β_x, β_y によって相互インダクタンスが変化しないと考えれば、回路を動かすに要する仕事とは $\Delta U_{m,i}$ となる。したがって U_s は次式のように求められる。

$$U_s = -2I^2 \{\delta\}^T [K_m]_i \{\delta\} \quad (31)$$

変形によるポテンシャルエネルギーの変化 ΔU はこれらの和であり、以下のように与えられる。

$$\Delta U = \Delta U_s + \Delta U_m + \Delta U_{m,i}$$

$$= \{\delta\}^T [K_s] \{\delta\} - I^2 \{\delta\}^T [K_m]_r \{\delta\} + \{\delta\}^T [K_m]_i \{\delta\} \quad (32)$$

2. 電磁弾性座屈に対するポテンシャル

エネルギーの停留原理の適用

第II-1節で求めたポテンシャルエネルギーを用いて、電磁弾性座屈の機構を説明してみる。変形後の試験コイルに蓄えられるポテンシャルエネルギー U は次式で表わされる。

$$U = U_m^0 + \Delta U_s + \Delta U_{m,r} + \Delta U_{m,i} \quad (33)$$

(32)式の各項は、コイルが変形するときFig.5に示されるような傾向をもつことが数値的に調べられた。横軸に試験コイルの変形の大きさをとり、縦軸に U をとっている。 $I=0$ のときは $U_m^0 = \Delta U_{m,r} = \Delta U_{m,i} = 0$ 、 ΔU_s は単調増加であるため初期の状態は安定である。 $I < I_c$ のときは、 $U_m^0 > 0$ 、 ΔU_s は単調増加であるが、 $\Delta U_{m,r}$ と $-\Delta U_{m,i}$ が単調減少のために U は依然として下に凸であり、初期状態は安定である。 $I \geq I_c$ のときは、 U は上に凸になり初期状態が不安定になるため、面外方向に座屈を起す。

Fig. 5 Variation of potential energy due to deformation of coil

以上より、コイル電流が座屈電流値 I_c 以上のときは、試験コイルのポテンシャルエネルギーは極大値をとり、不安定座屈を起すということがわかった。した

がらうるとき、変形によるポテンシャルエネルギー変化 ΔU を節点変位ベクトルで1階微分したものはゼロになる⁽⁹⁾。

$$[[K_e] - I^2([K_m]_r + [K_m]_i)]\{\delta\} = 0 \quad (34)$$

(34)式より、座屈電流値およびコイル電流がそれに達する前後の変形状態における安定性を論じることができる。すなわち、(34)式より

$$\{\delta\} = 0 \quad (35)$$

$$\text{または、} |[K_e] - I^2([K_m]_r + [K_m]_i)| = 0 \quad (36)$$

が得られ、(35)式が安定平衡状態を、(36)式が不安定平衡状態をそれぞれ表わしている。したがって、座屈電流値は(36)式の最小固有値の平方根として求められる。境界条件は、拘束された節点の変位と回転をゼロにすることであるが、本解析では、 $\{\delta\}$ の k 番目の成分がゼロになる場合、(36)式の各マトリックスの k 行と k 列を抜き取る方法を採用している。本研究では言及していないが、トロイダルコイルに横支持が置かれている場合も、この方法によって容易に考慮できる。

Ⅲ. 実験的研究

実験は超電導モデルコイルを用いて組み立てた部分トーラスについて実施し、座屈電流値を得ることができた。さらに、計算機コードを用いて正確な座屈電流値を算出するためには、使用したコイルの液体 He 温度での弾性定数を求めなければならない。しかしながら現在、液体 He 温度における材料の弾性定数のデータは十分に蓄積されていないため、コイルから切り出した試験片を用いて液体 He 中で3点曲げ試験が行われた。

1. 実験装置

Fig. 6に示す部分トーラスを組み立てた。この部分トーラスは、16コイル・フルトーラスの45°セクタを模擬している。使用したコイルは、NbTi 線材 (0.68 mmφ, Cu/SC=2 と 0.45 mmφ, Cu/SC=1.35の2種)を、円の1/4を直線状にしたD型に19回巻き、エポキシ樹脂に含浸して作製した。以後、0.68 mmφ 線材のコイルをモデル1、0.45 mmφ 線材のコイルをモデル2と呼ぶ。コイルの幅、厚さはモデル1が14と0.9 mm、モデル2が9と0.6 mmであり、D型の円の半径はどちらもFig. 2に示したように内側で60 mmである。Fig. 6で各コイルは直線部分をウェッジに挟まれた状態で中心柱に固定されている。両側の隣接コイルはそれぞれ発生させる磁場を強くするため、コイルを2枚重ねたものを用いた。さらに、隣接コイルは変形を起こさぬように完全に固定した。このような拘束条件では、座

Fig. 6 Top view of three-coil superconducting partial torus and positions of strain gages

屈モードとして試験コイルが左右に変形するモードのみが存在する。

試験コイルの曲げ歪を測定するために、Fig. 6に示されているように、試験コイルの5個所に低温用歪ゲージが貼付された。本実験では、磁場の強さが0.5 T¹⁰以下であるので、歪ゲージの出力に対する磁場の影響はないとしてよい⁽¹⁰⁾。各コイルは直列に配線されており、同じ向きに電流が流れるようになっている。電流は、超電導コイル用定電流電源によって供給した。Photo. 1は組み立てられた部分トーラスの写真である。隣接コイルは2枚のSUSの板によって固定されている。この部分トーラスは液体 He 用クライオスタット内に配置される。液体 He はすべてのコイルが完全に浸漬されるまで注入し、その状態を保ちながら電流を通じて試験コイルに生じる曲げ歪を測定した。

液体 He 中での3点曲げ試験は、実験で使用したコイルの直線部分から切り出した試験片を用いて行われた。試験機として島津オートグラフを用い、そのクロスヘッドにガラス製の小型液体 He 用デューワーを取り付け、試験片が液体 He に完全に漬った状態で試験を行なった。

2. 実験結果と検討

実験より得られた座屈曲線の例をFig. 7, 8に示す。Fig. 7は、試験コイル、隣接コイルとしてモデル1を用いたときの座屈曲線を示し、横軸にNbTi 線材1本当

Photo. 1 Three-coil superconducting partial torus

りの電流値、縦軸に試験コイルの曲げ歪をとっている。電流が増すにつれて曲げ歪もゆるやかに増加するが、電流がある値に近づくと曲げ歪に急激な上昇が見られた。このことは電磁弾性座屈が実際に起きたこと

を示している。座屈電流値を決定するには、この座屈曲線に対して漸近線を引けばよく、Fig. 7に示すように109 A/turn(線材1本当たりの電流値)と求められた。

また、歪ゲージNo. 1と2の出力値の絶対値の差は、試験コイルの面内変形による歪を表わしている。この歪の値は、電流値が90 A/turn以上では曲げ歪に比べて十分小さいことがわかる。この事実により、面外変形による弾性エネルギーは面内変形によるそれに比べて十分大きいことが実験的に確かめられ、解析の際、面内変形を考慮しなかったことは妥当であったことが示された。

座屈電流値を求める別の方法として、Southwell plot⁽¹¹⁾がある。一般座屈問題では、たわみをたわみ/荷重に対してプロットすると直線になり、その直線の傾きが座屈荷重を与える。これがSouthwell plotの原理である。電磁弾性座屈においては、荷重に対応する電磁力は電流値の2乗に比例するため、曲げ歪を曲げ歪/(電流値)²に対してプロットして得られる直線の傾きの平方根より座屈電流値が求められる。Fig. 7に示すように、Southwell plotより求められた座屈電流値は114 A/turnで、座屈曲線より求められた値とかなりよい一致をみた。

Test coil is Model 1.

Fig. 7 Current-strain curves and Southwell plot obtained from buckling experiment on three-coil superconducting partial torus

Fig. 8に、試験コイルがモデル2、隣接コイルがモデル1の場合の座屈曲線を示す。座屈電流値は47.8 A/turnと求められた。一度座屈すると電流を切っても

試験コイルには永久変形が残るが、この状態で再び座屈実験を行い、得られた座屈曲線が図示されている。この場合、初期たわみのある場合の座屈なので、座屈電

流値は1回目よりも小さく41.3A/turnであった。

Test coil is Model 2.

Fig. 8 Current-strain curves obtained from buckling experiment on three-coil superconducting partial torus

次に、液体 He 中での3点曲げ試験の結果を示す。モデル1, 2から切り出した試験片について得られた荷重たわみ曲線は、それぞれFig. 9 (a), (b)に示す。支点間距離は40 mmとした。荷重たわみ曲線の直線部分の傾きより、コイルの液体 He 温度での線材方向のヤング率が計算できるが、モデル1, 2についてそれぞれ3,510, 2,810 kg/mm²と求められた。しかし、計算機コードを用いて座屈電流値を算出する際、これらの値だけでは不十分である。なぜなら、実験で使用したコイルは直交異方性をもった弾性定数を有するからである。したがって、以下に述べる直交異方性理論を導入した。まず、コイルはFig. 10の上図に示すような断面をもつ。斜線を施した部分が線材、その他の部分がエポキシを表わしている。ここで、Fig. 10の(I), (II)に示すような2通りのモデル化を行い、それぞれに関し、下に示したような植村、山脇の経験式⁽¹²⁾を用いて弾性定数を求めた。

$$\left. \begin{aligned} E_L^I &= E_f V_f + E_m (1 - V_f) \\ E_T^I &= \frac{E_f E_m}{E_m V_f + E_f (1 - V_f)} \\ \nu_L^I &= \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \\ G_{LT}^I &= \frac{G_f G_m}{G_m V_f + G_f (1 - V_f)} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

(a) Model 1

(b) Model 2

Fig. 9 (a), (b) Load-deflection curve at Point C of test piece cut from superconducting coil at 4.2 K

Fig. 10 Modeling of superconducting coil

$$\left. \begin{aligned} E_L^I &= E_T^I = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \\ \nu_L^I &= \frac{\nu_f E_f V_f + \nu_m E_m (1 - V_f)}{E_L^I} \\ G_{LT}^I &= G_f V_f + G_m (1 - V_f) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

上式で、 E, ν, G はそれぞれヤング率、ポアソン比、剪断弾性係数、 L, T はそれぞれ線材方向、線材と垂直

方向, f, m はそれぞれ線材, エポキシ, V_f は線材の体積含有率を表わしている。 E_L は実験で求められており, 他の弾性定数も (37), (38) 式の右辺に $V_f=0.63$, $E_m=450\text{kg/mm}^2$, $\nu_m=0.3^{(13)}$ を代入することにより求められる。そして, (I) が弾性定数の下限を, (II) が上限を与え, 実際のコイルの弾性定数はその間にあると考えた。計算された弾性定数の値を Table 1 に示す。

Table 1 Elastic coefficients

		E_L (kg/mm ²)	E_T (kg/mm ²)	ν_L	ν_T	G_{LT} (kg/mm ²)
Model 1	(I)	3,510	885	0.30	0.076	341
	(II)	3,510	3,510	0.30	0.30	1,340
Model 2	(I)	2,810	914	0.30	0.098	352
	(II)	2,810	2,810	0.30	0.30	1,080

以上のようにして評価した弾性定数を用いて算出された座屈電流値を Table 2 に示す。(I), (II) の弾性定数が座屈電流値のそれぞれ下限, 上限を与えていることがわかる。試験コイルがモデル 1, 2 のいずれの場合も計算値の変域の中に実験値がある。このことは, 第 1 章で述べた電磁弾性座屈理論が妥当であることを示している。

Table 2 Buckling currents

		$I_{c, \text{cal.}}$ (A/turn)	$I_{c, \text{exp.}}$ (A/turn)
Model 1	(I)	85.6	109
	(II)	141	
Model 2	(I)	39.3	47.8
	(II)	59.0	

IV. 結論と今後の課題

超電導トロイダルコイルの電磁弾性座屈が実験的に確認され, 座屈電流値が測定された。さらに, 座屈電流値の実験値と計算値はよい一致をみた。このことは, 電流弾性座屈に対する理論的考察およびそれに基づいた有限要素法による解析手法の妥当性が検証されたことを示している。しかし, この解析手法を実際の核融合炉のようなフルトラスに適用するためには, 次の課題が残されている。

- (1) フルトラスの場合, コイル電流が座屈電流値に達すると, すべてのコイルが同時に座屈を起すと考えられるため, 試験コイル上の磁気エネルギー変化の計算は, 他のすべてのコイルの

変形を考慮しなければならないこと。

- (2) 横支持を考慮すること。

- (3) 実際のトロイダルコイルは, 複雑な断面をもつ複合材料であるため, 本研究のように 2 次元平板とみなすことに限界があること。

(1) に関しては, 試験コイル上に隣接コイルがつくるベクトルポテンシャルを計算する際, 隣接コイル上で 1 周積分を行なっているが, この積分路の変形を考えなければならないところに複雑さがある。現在, 適当な近似を用いて, 部分トーラスの場合と同様に簡略化することを検討中である。(2) に関しては, 本文中でも述べたが, 境界条件を変えることにより解決できる。また, (3) に関して本研究で用いた板曲げ要素の代わりに, 厚肉シェル要素を用いることを考案中である。さらに, より正確な複合材料理論を採用して弾性定数を評価する必要もあろう。

序で言及したように, 電磁弾性座屈現象は振動問題と密接な関係がある。本研究では座屈解析手法として静的手法を採用したが, これ以外に, コイルの振動数の 2 乗がコイル電流値の 2 乗に比例して減少し, 振動数がゼロの時のコイル電流値が座屈電流値を与えると動く手法がある。コイルの振動数がコイル電流値が増加するにつれて減少することは, 安全設計上好ましくないことは自明である。その意味からも, 動的手法の開発は重要であり, 現在, 研究を進めている。

本研究は, 東京大学工学部核融合炉ブランケット設計基礎実験装置運営委員会(関口 晃委員長)のプロジェクト研究の 1 つとして実施された。同委員会委員各位の本研究に対して示されたご理解に感謝いたします。さらに, コイル材料の液体 He 中での 3 点曲げ試験に際して, 茨城大学工学部本橋嘉信博士のご協力に感謝いたします。

— 参考文献 —

- (1) SWANSON, C., MOON, F.C.: *J. Appl. Phys.*, 48[7], 3110~3115 (1977).
- (2) MOON, F.C.: *J. Appl. Mech.*, 46[1], 145~150 (1979).
- (3) MIYA, K., HARA, K., SOMEYA, K.: *ibid.*, 45[2], 355~360 (1978).
- (4) MIYA, K., TAKAGI, T., ANDO, Y.: *ibid.*, 47[2], 377~382 (1980).
- (5) MIYA, K., TAKAGI, T.: *J. Pressure Vessel Technol.*, 100, 1~24 (1978).
- (6) 藤井太一, 座古 勝: “複合材料の破壊と力学”, (1979), 実教出版.
- (7) TOCHER, J.L.: Analysis of plate bending using

- triangular elements, PhD Dissertation, (1962), Civil Eng. Dep. Univ. of Calif.
- (8) STRATTON, J.A.: "Electromagnetics Theory", (1940), McGraw-Hill.
- (9) WASHIZU, K.: "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", (2nd ed.), 152~167 (1975), Pergamon Press.
- (10) WALSTORM, P.L.: *Cryogenics*, **15**, 270~272 (1975).
- (11) SOUTHWELL, R.V.: *Proc. Royal Soc. (London)*, A, **135**, 60 (1932).
- (12) 林 毅編: "複合材料工学", 531~538 (1978), 日科技連.
- (13) 西嶋茂宏, 岡田東一: 低温工学, **14**(3), 110~115 (1979).

〔付 録〕

$$A' = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \sum_i \frac{Id\mathbf{s}_{i,1}}{|\mathbf{r}_0 + \mathbf{u} - \mathbf{r}_{i,1}|} + \sum_i \frac{Id\mathbf{s}_{i,2}}{|\mathbf{r}_0 + \mathbf{u} - \mathbf{r}_{i,2}|} \right\} \quad (20)$$

(20)式の第1項を w に関して3次項までテーラー展開すると, 次式のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{Id\mathbf{s}_{i,1}}{|\mathbf{r}_0 + \mathbf{u} - \mathbf{r}_{i,1}|} \\ &= \sum_i (F_0 + F_1 w + F_2 w^2 + F_3 w^3) Id\mathbf{s}_{i,1} \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{i,1}|} \\ F_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{-(z_0 - z_{m,1})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{i,1}|^3} \\ F_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2(z_0 - z_{m,1})^2 - (x_0 - x_{m,1})^2 - (y_0 - y_{m,1})^2}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{i,1}|^5} \\ &\quad \cdot \frac{1}{2} \\ F_3 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{-6(z_0 - z_{m,1})^3 + 9(z_0 - z_{m,1})C}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{i,1}|^7} \cdot \frac{1}{6} \end{aligned} \quad (A1)$$

ここで, Fig. 1 を見るとわかるように

$$\mathbf{r}_{i,1} = (x_{m,1}, y_{m,1}, z_{m,1})$$

であり, C は定数である。

同様に(21)式の第2項も以下のように展開される。

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{Id\mathbf{s}_{i,2}}{|\mathbf{r}_0 + \mathbf{u} - \mathbf{r}_{i,2}|} \\ &= \sum_i (F'_0 + F'_1 w + F'_2 w^2 + F'_3 w^3) Id\mathbf{s}_{i,2} \end{aligned}$$

ここで, F'_m は(A1)式の $x_{m,1}, y_{m,1}, z_{m,1}$ をそれぞれ $x_{m,2}, y_{m,2}, z_{m,2}$ にかえただけである。

Fig. 1 で, コイル1と2は x - y 平面に関して対称であるため, 以下の関係がある。

$$\begin{aligned} \Delta x_{i,2} &= \Delta x_{i,1}, & x_{m,2} &= x_{m,1} \\ \Delta y_{i,2} &= \Delta y_{i,1}, & y_{m,2} &= y_{m,1} \\ \Delta z_{i,2} &= -\Delta z_{i,1}, & z_{m,2} &= -z_{m,1} \end{aligned}$$

したがって

$$F'_0 = F_0, \quad F'_1 = -F_1, \quad F'_2 = F_2, \quad F'_3 = -F_3$$

が導かれる。よって(20)式は次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} A' &= A + I \sum_i \left\{ 2F_2 w^2 \begin{pmatrix} \Delta x_{i,1} \\ \Delta y_{i,1} \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + (2F_1 w + 2F_3 w^3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta z_{i,1} \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

ただし, (19)式より

$$A = I \sum_i \left\{ 2F_0 \begin{pmatrix} \Delta x_{i,1} \\ \Delta y_{i,1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A2)$$

(21), (23)式をそれぞれ次のように書いてみる。

$$\begin{aligned} A' &= A + \Delta A \\ J' &= J + \Delta J \end{aligned} \quad (A3)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし, } \Delta A &= I \sum_i \left\{ 2F_2 w^2 \begin{pmatrix} \Delta x_{i,1} \\ \Delta y_{i,1} \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + (2F_1 w + 2F_3 w^3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta z_{i,1} \end{pmatrix} \right\} \\ J &= \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} J_x \beta_y^2 \\ -\frac{1}{2} J_y \beta_x^2 \\ J_y \beta_x - J_x \beta_y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (A4)$$

(24)式に(A3)式を代入すると,

$$\begin{aligned} \Delta U_m' &= \iint A' \cdot J' t dx dy - \iint A \cdot J t dx dy \\ &\approx \iint A \cdot \Delta J t dx dy + \iint \Delta A \cdot J t dx dy \end{aligned}$$

となり, 上式に(A2), (A4)式を代入すれば, (25)式は導かれる。