[76] 遠心法によるウラン同位体の分離

流れと拡散の解析

三 神 尚*

(1982年 3月1日 受理)

Uranium Isotope Separation in Gas Centrifuge Gas Dynamics and Separation Theory

By Hisashi MIKAMI

The subject of uranium isotope separation in the gas centrifuge is reviewed with emphasis on the flow field analysis in a rapidly rotating cylinder.

The separation theory proposed by Landahl using ideas from perturbation theory is outlined, in comparison with the Onsager-Cohen formulation.

Numerical methods to solve the full Navier-Stokes equations describing the rotating compressible flow are also briefly reviewed.

KEYWORDS: uranium enrichment, isotope separation, separation theory, flow analysis, boundary layer theory, rotating flow, numerical analysis, centrifugation, computer calculations

I. はじめに

遠心分離法による同位体分離に関しては、すでに優れた総説、解説が数多く書かれている。このうち手もとにある最近のものとして、Landahl⁽¹⁾, Rätz⁽²⁾, Soubbaramayer⁽³⁾, Lowry と Von Halle⁽⁴⁾ によるものがあげられる。Landahl の総説では、高速回転気体の中の種々の境界層流れについての新しい知識が非常に明快に説明されていると同時に、流れが分離にどのように影響するのかについての鋭い指摘が随所に見られる。Rätz のものは、カルマン流体力学研究所における講義をまとめたものであり、遠心機回転円筒内の流れと分離の解析の最近の成果が広く詳細に説明されている。Soubbaramayer の総説は、叢書・応用物理学のトピックスの中の1冊『ウラン濃縮』の中に含まれているが、流れと分離の理論がわかりやすく書かれており、読者はこの分野の研究の現状を容易にとらえることができるだろう。また、Lowry と Von Halle のものは、「第12回希薄気体力学国際会議」で招待講演として報告されたものである。さらに詳細な知見は、高速回転気体力学ワークショップのプロシーディングス⁽⁵⁾⁽⁶⁾に編集されている諸論文から得ることができるので、この分野に興味のある読者には、充分な情報が用意されているといえてよい。本稿では、上記の総説の内容に沿いながら、

若干の新しい成果を加えた総説を再構成してみた。ただし、すべての関連する論文を読み通すことはできなかったもので、当然とらえられべき論文が引用されていない場合もあることをお断りしておく。

II. 分離の理論

回転円筒内に混合気体を入れて高速で回転させると、流体粒子に作用する遠心力と釣り合うように、半径方向に大きな圧力勾配の場が形成され、さらに、この圧力勾配に比例して各成分の圧力拡散フラックスが生成される。例えば、 $^{235}\text{UF}_6$ (六フッ化ウラン) と $^{238}\text{UF}_6$ の2成分混合気体を考えると、軽成分の拡散フラックス j_1 は具体的には、次式で表現される。

$$j_1 = \rho \mathcal{D} \left[N(1-N) \frac{m_1 - m_2}{m} \text{grad}(\ln P) - \text{grad} N \right] \quad (1)$$

ここで、 ρ : 混合気体の密度

$\mathcal{D}$: 相互拡散係数

N : 軽成分の質量分率

m_1, m_2 : それぞれ軽成分、重成分の質量

m : 混合気体のモル平均質量

P : 圧力

* 東京工業大学原子炉工学研究所(Res. Lab. for Nucl. Reactors, Tokyo Inst. of Technol.)

(1)式の右辺の第1項は圧力拡散フラックス, 第2項は濃度拡散フラックスを表わしている。

一方, 重い成分の拡散フラックス j_2 は, j_1 と大きさが等しく反対向きに生成される。したがって, 2つの成分が互いに分離されること, その分離のされ方は圧力勾配については円筒の回転速度が大きいほど大きくなるであろうことは, 直観的に理解されよう。実際の遠心分離機では第1, 2図⁽¹⁾に示すように, 回転円筒内

に, 向流(countercurrent flow)をつくり出し, 上記の半径方向の分離効果を軸方向に重畳させ, 1台の遠心分離機で大きな分離性能が達成できるように工夫している。この向流をつくり出したり, 回転円筒内の気体を抜き出したりするためには, スクープと呼ばれる静止したピトー総圧管が用いられる。スクープは, 回転円筒内で分離された軽い気体と重い気体を圧縮して抜き

O: 回転円筒	G, F: スクープ
A: しなやかな軸	H: バッフル板
P: 剛な軸	K: ねじり型分子ポンプ
J: ピボット軸受	M: 駆動用電動モータ
T: 軸受ハウジング	Y: 油容器
U: ボールベアリング	Z: 冷却管
R, S: 磁気軸受	Q: 小磁石
V: スプリング	TV: 排気孔
B, D: 永久磁石	W: 回転数測定用ピックアップコイル
E: 気体供給管	

第1図 Zippe型遠心分離機の断面図

(ZIPPE, G.: The development of short bowl ultracentrifuges, ORO-315(1960) より多少手直しして転載)

第2図 遠心分離機回転円筒内の流れの略図

出すと同時に、スクープの囲りを流れる気体に抗力を及ぼし、角運動量を減少させることによって、半径方向に中心軸に向う流れをつくり出し、これを円筒内に供給するという作用によって軸方向の循環向流をつくり出す。回転円筒内の流れを模式的に書くと、第2図のようになる。遠心分離機の実用性能は、圧力勾配の場合と、循環向流の形成のされ方によって基本的に規定されることは明らかであり、望ましい分離性能の達成のためには、長くしかも高速で回る回転円筒を実現すること、抜き出し気体の圧力回復が大きく、かつ最適の循環流量が生成できるスクープ(およびバッフル板)を設計することが必要となる。これらの要求に応ずるためには、高速回転円筒内の圧縮性気体の流れと、混合気体の分離現象に関する詳細な知識が必要である。UF₆の混合気体の場合、各成分の質量はほとんど等しいので、流れと拡散現象を同時に考慮に入れて基礎方程式(Navier-Stokesの方程式と拡散方程式)を解く必要はなく、流れの解をまず求めておいて、その流れの中の拡散現象を考えればよいことになる。

分離現象を記述する拡散方程式は、各成分の質量保存を表現するものであり、(1)式を用いて次式で与えられる。

$$\operatorname{div}(\rho u N + j_i) = 0 \quad (2)$$

ここで、 u : 混合気体の質量平均流速

一方、(2)式の境界条件は、回転円筒壁面で拡散フラックスがゼロとなること、また気体の流入口、流出口における気体の濃度は、流入、流出する気体の濃度と等しいとして与えられる。第2図に示したように、原点が回転円筒の中心にある円筒座標系(r, θ, z)を考え、この座標系に対する流速 u の成分を(u, v, w)とする。さらに、 $U = (\frac{1}{2})\rho \omega r$, $W = (\frac{1}{4})\omega^2 r^2$ (r_2 : 回転円筒の半径)によって変換された速度 U, W を導入し、 r の代わりに $x = (r/r_0)^2$ を用い、軸対称であることを仮定すると、(2)式は次のように書き表わせることになる⁽¹⁾。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \mathcal{D} x \left(\frac{\partial N}{\partial x} + aN \right) - UN \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(B \frac{\partial N}{\partial z} - WN \right) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $B = (\frac{1}{4})r_2^2 \rho \mathcal{D}$

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta m}{m} \cdot \frac{v^2}{(R/M)Tx}$$

で定義される量であり、また、 $N \ll 1$ であるとして $N(1-N) \approx N$ で近似して線形化されている。一方、 U, W に対しては連続の式

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

が成り立つことが容易に示される。

回転円筒内の流れの解が得られていると、(3)式に現れる量のうち $U, W, B, a, \rho \mathcal{D}$ などは、位置の関数としてあらかじめ与えられることになるが、その場合でも、(3)式の厳密解はいまのところ得ることができないので、解を求めるためには、近似的な方法が数値計算に頼らなければならない。近似的な方法ではいくつかの仮定がさらに必要となるので、数値計算に比べ精度が悪いと考えられているが、結果が比較的簡単な式で表現されるので、物理的な理解や概略の設計計算、最適計算といった目的のためにはきわめて有用である。数値計算においても、差分近似に伴う数値的な拡散による誤差が当然予想され、解析解との比較をする必要があるという意味からも近似解は必要であろう。

拡散方程式の近似解法としては、Onsager-Cohen の理論がよく知られている。この理論は、もともと Onsager が、熱拡散塔の分離性能の計算のために導いたものを Cohen が遠心分離機回転円筒内の拡散に適用したものである。Onsager-Cohen の理論は、半径方向の速度がゼロでなく、したがって、軸方向速度が軸方向に変化する場合に拡張されている(この拡張はきわめて容易である)。実際、遠心機回転円筒内の流れでは、後で述べる Stewartson 層内の流れに見られるように、軸方向に速度変化があることから、上記のように理論を拡張しておくことが現実的である。さらに、回転円筒内の流れにどのような軸方向変化を与えれば分離パワーを最大にできるかという問題の検討にも、この拡張が必要である。これは、回転円筒内の向流を用いる濃縮操作は、カスケード理論でいうところの方形カスケードに対応しており、理想カスケードに対応する流量分布を回転円筒内につくり出すことによって、分離パワーの向上が期待されるからである。軸方向に流れが変化しないとき遠心分離機の達成できる最大分離パワーは、理論的な最大分離パワーの81%であることはよく知られているが、軸方向の各位置における循環流量を各位置における最適値に選ぶことにより、分離効率を81%から100%に近づけ得ることが Von Halle⁽²⁾により示されている。

次に、Onsager-Cohenの近似理論について、簡単に説明しよう。いま、第1図に示したようなスクープ導入管の半径 r_0 に対応する x を $x_0 (= r_0^2/r_2^2)$ として、(3)式を x_0 から x まで積分すると、

$$\rho \mathcal{D} x \left(\frac{\partial N}{\partial x} + a N \right) - U N \\ = - \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial z} \left(B \frac{\partial N}{\partial z} - W N \right) dx \quad (5)$$

が得られる。Onsager-Cohenの近似では、 $N, \partial N / \partial z$ の半径方向の変化は小さいとし、それらを濃度の半径方向についての平均値 $\bar{N}$ を用いて表現し、さらに $\bar{N}$ の z 方向の勾配は z 方向にあまり変化しないとして、 $\bar{N}$ の z に関する2階微分を省略する。また、(4)式が成り立つことにより流れ関数 Ψ^* を導入でき $U = -\partial \Psi / \partial z$, $W = \partial \Psi / \partial x$ と表現されるので、(5)式は次のように書くことができる。

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -a \bar{N} + \frac{\Psi}{\rho \mathcal{D} x} \cdot \frac{\partial \bar{N}}{\partial z} \quad (6)$$

一方、未知変数として半径方向平均濃度 $\bar{N}$ を用いたことにより、境界条件も巨視的なものが必要となり、 z 方向の任意の断面で軽成分の輸送量が一定という条件が用いられる。 $z \geq 0$ の濃縮領域について考えると、

$$\Psi_1 N_F = \int_{x_0}^1 \left(W N - B \frac{\partial N}{\partial z} \right) dx \\ = \Psi_0 N - \int_{x_0}^1 \Psi \frac{\partial N}{\partial x} - \int_{x_0}^1 B \frac{\partial N}{\partial z} dx \quad (7)$$

となる。添字1は $x=1$ における値を示す。また Ψ_1 は $z \geq 0, z \leq 0$ では異なる値となる。(7)式においても、 N を $\bar{N}$, $\partial N / \partial z$ を $\partial \bar{N} / \partial z$ に置き換え、さらに(6), (7)式から $\partial N / \partial x$ を消去すると、結局次の基礎式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial z} \int_{x_0}^1 \left(\Psi_1^2 \frac{1}{\rho \mathcal{D}} + B \right) dx \\ - \bar{N} \left(\Psi_1 + \int_{x_0}^1 \Psi a dx \right) - \Psi_1 N_F = 0 \quad (8)$$

この式の解は、特解

$$\bar{N}_s = \Psi_1 N_F / \left(\Psi_1 + \int_{x_0}^1 \Psi a dx \right) \quad (9)$$

と齊次方程式の解 $\bar{N}_h$ との和で表わされるが、 $\bar{N}_h = A e^{q(z)}$ とおくと、 $q(z)$ は次式から決められることは明らかである。

$$\frac{dq}{dz} = \left(\Psi_1 + \int_{x_0}^1 \Psi a dx \right) / \int_{x_0}^1 \left(\Psi^2 \frac{1}{\rho \mathcal{D}} + B \right) dx \quad (10)$$

$q(0)=0$ として(8)式を積分すれば、 $q(z)$ が求められることになる。一方、 $z=H$ で $\bar{N}=N_F$ であることから、 $\bar{N}$ は次式で表わされる。

$$\bar{N} = \Psi N_F / \left(\Psi_1 + \int_{x_0}^1 \Psi a dx \right) \\ + N_F \left(1 - \frac{\Psi_1}{\Psi_1 + \int_{x_0}^1 \Psi a dx} \right) e^{-q(H)} e^{q(z)} \quad (11)$$

また、供給流量を F , カットを θ とすれば $\Psi_1 = F \theta / 4\pi$ である。 $z \leq 0$ のストリップング領域についても、全く同様に解が求められることは明らかであろう。ところで、遠心機を設計する場合、濃度 $\bar{N}_F$ の気体を流量 F で供給し、 $F \theta$ と $F(1-\theta)$ に分けたとき、 N_F, N_W はどのようなかということが知りたいわけであり、そのためには、解の中に表われる N_F, N_W を N_F, F, θ などの関数として表現しておかねばならない。 N_F, N_W を消去するためには2つの方程式が必要であるが、これには軽成分の系全体にわたっての保存の式

$$F N_F = F \theta N_F + F(1-\theta) N_W \quad (12)$$

と、 $z=0$ で $\bar{N}$ が連続であること、すなわち

$$\bar{N}^+(0) = \bar{N}^-(0) \quad (13)$$

との関係を用いれば充分である。Onsager-Cohenの近似理論は概略上記の通りであるが、近似の仕方が直観的であり近似の程度の評価がしにくいこと、近似を上げる方法を見出しにくいこと、また半径方向についての平均がなされてしまうので異なる濃度の流れの混合の取扱いが物理的なイメージのもとにできないことなどの欠点がある**。これらの欠点をなくし、理論をきわめて明確に展開する方法を提案したのがLandahl⁽⁹⁾である**。彼の理論は、拡散方程式の中に現れる小さなパラメータ $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{4m}{m} \cdot \frac{(r_2 \omega)^2}{(R/M)T}$ に関する漸近展開に基づいており、 r および z の関数として濃度分布を解析的に求めることができる。漸近展開により近似解を求めようとする場合、基礎式の中に現れる種々の量をスケールリングすることが本質的に重要であるが、Landahlは次のようにしてスケールリングに成功している。

- (1) 回転円筒の長さ H により z をスケールすれば、 $z' = z/H$ は1のオーダーになる。
- (2) 細長比 r_2/H が小さく、 ε のオーダーであるとする。すなわち $\bar{r}_2 = r_2 / (2\varepsilon H)$ は1のオーダーである。
- (3) 半径方向と軸方向の拡散フラックスは同じオー

* 濃縮領域とストリップング領域を別々に考え、便宜上おのおのの領域とも $x=x_0$ で $\Psi=0$ とする。気体が供給口から供給されるため z の全体の変域にわたって、 $x=x_0$ で $\Psi=0$ とすることはできない。

** 例えば供給気体が混合するのは、回転円筒内の内側部の上昇流とであり、外側の下降流と混合するわけではない。

** Landahlの理論と対応しやすいように、Onsager-Cohenの理論もLandahlの記法を用いて書き直してある。精度としては、この2つの理論は同じ程度と考えられる。

ダであるとする。軸方向の拡散フラックスは軸方向の流れによるフラックスと同じオーダーであるので、 $\rho W N \sim \rho \mathcal{D} \frac{\partial N}{\partial z} \sim \rho \mathcal{D} \frac{\partial N}{\partial r} \sim \rho \mathcal{D} \frac{N}{2H\varepsilon}$ となり、

$$W = \rho W \frac{1}{4} r_2^2 \sim \frac{1}{4} (2\varepsilon H)^2 \bar{r}_2 \rho \mathcal{D} \frac{1}{2\varepsilon H} \\ = \frac{1}{2} \varepsilon H \rho \mathcal{D} \bar{r}_2$$

と見積られるから、 W は $\bar{W} = W/(\rho_* \mathcal{D}_* \varepsilon H)$ (ここで、 $*$ は基準値を意味する) のようにスケールングされる。

(4) U のスケールングは、連続の式(2)式より $\bar{U} = U/(\rho_* \mathcal{D}_* \varepsilon)$ なることは明らかである。

(5) 濃度 N は、半径方向の変化が小さくなるように、平衡分離のときの関係を用いて次のようにスケールングする。

$$\bar{N} = N \exp \int a dx$$

これらのスケールングされた変数を用いると、拡散方程式(3)式は次の形に書き直される。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\rho} \mathcal{D}_x \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} \right) - \varepsilon \left[a \bar{\rho} \mathcal{D}_x \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} + \bar{U} \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} \right. \\ \left. + \bar{W} \frac{\partial \bar{N}}{\partial z} \right] + \varepsilon^2 \bar{\rho} \mathcal{D} \left[a \bar{U} \bar{N} + \bar{r}_2^2 \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (14)$$

したがって、 (x, z) を一定にして ε をゼロに近づける極限に対応する、次の漸近展開を考えることができる*。

$$\bar{N} = \bar{N}^{(0)}(x, z) + \varepsilon \bar{N}^{(1)}(x, z) + \dots \quad (15)$$

ここで、 z' の代わりに z を用いている。(12)式を用いると、 $\bar{N}^{(0)}$ 、 $\bar{N}^{(1)}$ は次のように与えられる。

$$\bar{N}^{(0)} = \bar{N}_0(z) \quad (16)$$

$$\bar{N}^{(1)} = \frac{d\bar{N}_0}{dz} \int_{x_0}^x \frac{\bar{\psi}}{\bar{\rho} \mathcal{D}_x} d\xi \quad (17)$$

$\bar{N}_0(z)$ の具体的な形を決めるには、Onsager-Cohen の近似と同じように、軽成分の軸方向の輸送量が一定という条件を用いることとなる。最終的な結果は次のように与えられている。

$$\bar{N} = A_0 \exp \left(- \int_{x_0}^x a(\xi) d\xi \right) \\ + A_1 \left(1 + \varepsilon \lambda \int_{x_0}^x \frac{\bar{\psi} d\xi}{\bar{\rho} \mathcal{D}_x} \right) \exp \left(- \int_{x_0}^x a(\xi) d\xi + q(z) \right) \quad (18)$$

$$\varepsilon \frac{dq}{dz} \equiv \varepsilon \lambda$$

$$\bar{\psi}_1 \exp \left(- \int_{x_0}^x a d\xi \right) + \varepsilon \int_{x_0}^x a \bar{\psi} \exp \left(- \varepsilon \int_{x_0}^x a d\xi \right) dx \\ = \frac{\int_{x_0}^x \bar{\psi} (\bar{\psi} - \bar{\psi}_1) dx + \bar{r}_2^2 \int_{x_0}^x \bar{\rho} \mathcal{D} dx}{\int_{x_0}^x \bar{\rho} \mathcal{D}_x} \quad (19)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ の極限での dq/dz は、Onsager-Cohen の近似によるものと似てはいるが同じにはならない。Landahl の解においては、濃度は z ばかりでなく r の関数でもあるので、定数 A_0 、 A_1 をより物理的イメージに近い境界条件から決めることが可能になる。いま、回転円筒内の流れを薄い層状の流れでモデル化すると、Landahl が示しているように、Zippe 型遠心機回転円筒内の流れは第2図のように表現され、 $z \geq 0$ 、 $z \leq 0$ に対応する解を決める定数 A_0^+ 、 A_1^+ 、 A_0^- 、 A_1^- は次の4式の関係から決められることになる。

$$N^+(x_1, H_2) = N^+(1, H_2) \quad (20)$$

$$N^+(1, 0) = N^-(1, 0) \quad (21)$$

$$N^+(x_1, 0)(L + F\theta) \\ = N^-(x_1, 0)[L - F(1 - \theta)] + N_1 F \quad (22)$$

$$N^-(x_1, -H_1) = N^-(1, H_1) \quad (23)$$

ただし、軸方向の流れは r_1 、 r_2 にデルタ関数として存在するとしている。一方、製品、廃棄材中の濃度 N_F 、 N_W は軸方向の軽成分の輸送量が $z \geq 0$ 、 $z \leq 0$ で一定という条件から求められる。以上の解の中に含まれるパラメータは F 、 θ 、 L であり、分離パワーは、 $\theta = 1/2$ すると L/F と F の関数となる。遠心機の幾何学的形状を与えると、これらの式を用いて最大分離パワーを与える F および L/F の値を求めることができる。

Ⅲ. 流れの解析

分離の理論から見られるとおり、分離性能の計算のためには、回転円筒内の流れ特に軸方向速度の分布に関する解が得られていなくてはならない。この流れを決めるのは循環流量 L 、供給流量 F および循環流れの半径方向の位置に関連するバッフル板の内径 r_1 である。ここで、循環流量 L は下部スクープの角運動量の減速性能に依存する戻り流量 $2L - F(1 - \theta)$ から決定される。一方、 L が与えられると、バッフル板上の半径方向の流れの構造が決まり、ひいては回転円筒中心部の圧力分布すなわち $a(x, z)$ が求められることになる。このような圧縮性高速回転気体の流れは Stockholm 工科大学のグループや中山ら¹⁰⁾、桜井、松田ら¹¹⁾ の非圧縮性回転流体の知識に基づいた研究によって明らかにされてきた。詳細は Landahl の総説¹²⁾ に明解に説明されている。高速回転気体の流れで特徴的なのは、第3図に示すように、種々の構造を持つ境界層が形成さ

* 端板付近では、 $x, z/\varepsilon$ を一定にして ε をゼロに近づける漸近展開を考え、境界条件を満足させる必要がある。しかし、この解では ε のゼロ次のオーダーの項は消えることが示されている。

れることである。この図は、上部バッフル板付近の流れを拡大して模式的に画いたものであるが、バッフル板上の Ekman 層、回転軸に平行な Stewartson 層および Stewartson 層内の Ekman 層(Ekman extension)が主なものである。Ekman 層の厚さは、局所的な Ekman 数を E^* として、 $E^{1/2}$ のオーダーである。Stewartson 層は二重構造をしており、周方向の速度の境界条件への適合に対応して形成される $E^{1/4}$ のオーダーの層と、軸方向への強制流に対応して形成される $E^{1/3}$ のオーダーの層とからなっている。また Stewartson 層には、回転円筒壁による拘束を受ける壁面 Stewartson と、円筒中心部の壁の影響を受けない自由 Stewartson 層とがある。

第3図 高速回転円筒内の境界層

次に、これらの流れについて簡単に説明しておこう。一定の角速度 ω で回転する回転円筒とともに回転する座標から見ると、回転円筒内の圧縮性気体の流れは次の Navier-Stokes の式で記述される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{u} = 0 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) + \text{curl } \mathbf{u} \times \mathbf{u} \right] \\ = -\text{grad } P + \text{grad} (\zeta \text{div } \mathbf{u}) + \text{div } \mu \text{def } \mathbf{u} \\ + \rho \mathbf{g} - \rho (2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \rho C_P \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } T \right] \\ = \text{div } k \text{grad } T + \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } P \right) \\ + \zeta (\text{div } \mathbf{u})^2 + \frac{1}{2} \mu (\text{def } \mathbf{u})^2 \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、 $\mathbf{u}$: 流速、 ρ : 密度、 P : 圧力
 T : 温度、 C_P : 定圧比熱
 μ : すべり粘性係数
 ζ : 第2粘性係数
 k : 熱伝導度
 $\mathbf{g}$: 重力の加速度

(25)式右辺の最後の項は、コリオリスの力と遠心力を表現しており、この2つの項の存在が回転流体に特徴的な流れをひきおこす原因になる。(24)~(26)式は非線形の方程式であり、これをそのまま扱って解析解を求めることは困難である。しかし現実の遠心機回転円筒内の流れでは、流れの量の剛体回転からの変位は小さく、線形化された方程式によって実際の流れを充分正しく記述できる場合が多い**。いま、無次元化された流れの量を次のように表現しよう。

$$\left. \begin{aligned} P &= P_1 + P_2 \\ \rho &= \rho_1 + \rho_2 \\ T &= T_1 + T_2 \\ v &= v_1, \quad w = w_1, \quad u = u_1 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ここで、添字 1: 剛体回転からの変位を表わす量

添字 2: 剛体回転気体に関する量

また、流れの量は、例えば回転円筒の壁面での対応する流れの量を用いて無次元化する。このように書くと $T_1 \ll 1$, $P_1 \ll P_2$, $\rho_1 \ll \rho_2$ であり、また u_1, v_1, w_1 もそれぞれ T_1, P_1, ρ_1 と同じオーダーで小さく、これらの変数の積はもとの変数に比べて無視できるとしてよい。そうすると、Navier-Stokes の式(24)~(26)式は、第2図の円筒座標系を用いて、次のように書き直されることになる。

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r u_1)}{\partial r} + \frac{\partial w_1}{\partial z} + u_1 r M_R^2 = 0 \quad (28)$$

* Navier-Stokes の式を無次元化すると2つの無次元数 $E = \mu / \rho r_2^2 \omega$ と $M_R = r_2 \omega / \sqrt{\gamma(R/M)T}$ が現れる。Ekman 数 E は境界層の厚さを、回転 Mach 数 M_R は密度スケール距離 h を決める。

ここで、 $h = 1 / \left(\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right) = r_2 / (\gamma M_R^2)$ であり、壁から密度が e^{-1} に減少する距離である。

** Stewartson 層における非線形項のオーダーは、 ε / E^β ($\beta = 1/3, 1/4$, ε : Rossby 数) であり、Ekman 数が非常に小さい場合、非線形性が重要になることが Landahl⁽¹⁾により指摘されている。

$$\begin{aligned} & \rho_s(T_1 r - 2v_1) - Pr + \frac{1}{M_R^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} \\ &= E(2+X) \left[\frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (ru_1) + \frac{\partial^2 w_1}{\partial r \partial z} \right] \\ &+ E \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial z \partial r} \right) \quad (29) \end{aligned}$$

$$2\rho_s u_1 = E \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rv_1) \right] \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_R^2} \frac{\partial P}{\partial z} &= (2+X) E \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (ru_1)}{\partial z \partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right] \\ &+ E \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} - \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \right] \quad (31) \\ &- \frac{(\gamma-1)}{\gamma} u_1 \rho_s M_R^2 r \end{aligned}$$

$$= \frac{E}{Pr} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \right) \quad (32)$$

これらの式の中に現れる無次元数である Ekman 数, 回転 Mach 数については脚注(p. 342)で説明した。また $X = \zeta/\mu$ である。(28)~(32)式は, さらに運動量やエネルギーの拡散は半径方向か, 軸方向かどちらか一方が支配的であると考えて(薄い層の近似), いわゆる境界層の方程式に直すことが可能であり, その場合には, あとで述べるように, 解析的に解を求めることができる。しかし, スクープと相互作用する流れや気体供給口付近の流れでは, 非線形性の考慮が本質的に必要であり, 回転円筒の中心領域のように, 境界層が回転円筒内に拡がってしまうような場合には, 半径方向, 軸方向の拡散をとともに考慮する必要が生じてくる。さきに述べた種々の境界層流れを記述する方程式は, 線形化された方程式(28)~(32)式をスケールングし, その時現れる小さい値のパラメータ(Ekman 数, 密度スケール距離等)に関する適当な漸近展開により導くのが見通しがよい。この時本質的なのは, 対象としている流れの物理的な理解に基づいて, もとの方程式の中に現れる種々の量をいかに正しくスケールングするかにある。回転円筒の側壁に沿う流れに対応して形成される $E^{1/2}$ 境界層を記述する基礎式は, 境界層の厚さと密度スケール距離との比 $E^{1/2}/h$ を一定にして $E^{1/2}$ をゼロに近づける極限に対応する漸近展開から導かれ, 次のようになる¹⁾。

$$\frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \rho_s^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \rho_s^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + 4(1+\alpha^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad (33)$$

ここで, ρ_s : 気体が剛体回転するときの
密度分布

Ψ : 流れ関数

$$\alpha^2 = \frac{(\gamma-1)}{4\gamma} M_R^2 Pr$$

M_R : 回転 Mach 数

Pr : Prandtl 数であり, Ekman 数^{*}は, 側壁上の密度, 回転円筒の半径, 角速度を用いて $E = \mu/\rho_s r_s^2 \omega$ の関係で定義される。

$$\eta = (1-r)/E^{1/2}$$

(33)式において, u は $E^{1/2}$ のオーダー, v, w は $E^{1/6}$ のオーダー, P は $E^{1/2}$ のオーダー, T, ρ は $E^{1/6}$ オーダーとしてスケールングされており, z 方向に関して, u, w は対称, v, P, T は反対称な流れが表現されている。ちなみに圧縮性回転気体の流れの研究は, 米国においても独立に進められ, 軸方向流れに関する(33)式と同様な基礎方程式は, Onsager の Pancake 方程式^{(12)**}と呼ばれている。

一方, 流れ関数 Ψ に対する境界条件は, この境界層を z 方向に流れる流量が L であることから決められる。この流量 L は, パッフル板上の Ekman 層から Stewartson 層へ注入されるが, その領域は側壁とパッフル板の接する角の $E^{1/2} \times E^{1/2}$ のオーダーの領域であり, 角にある湧き出しで近似的に注入が表現される¹⁾。同様に, 下端の角には吸い込みがあるとすればよい。したがって流れ関数に関する境界条件は, 流れ関数がパッフル板上でゼロ, 側壁上で定数(規格化して1)であるとして良い近似になる。上記の境界条件および壁面で流速と温度がゼロの条件を満たす(33)式の解は, Barkら⁽¹³⁾によって得られており, 第4図に示す通りである。彼らは, 流れ関数を

$$\Psi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\pi z/2l} \Psi_k(\eta) \quad (34)$$

の形に変数分離し, $\Psi_k(\eta)$ を決める常微分方程式の解を, 2変数漸近展開法により求めている。また, 流れの安定理論で用いられる直交化数値積分法により数値解も求めている。Pancake 方程式も同様に変数分離法により解が求められているが, この場合には, やはり流れの安定理論でよく用いられる Frobenius の方法を用いて解析解が求められている。また, パッフル板上の Ekman 層と適合するような近似的な境界条件が用いられている。2変数漸近展開による解から, Stewartson 層の厚さは $E^{1/2}(H/r_s)^{1/3} r_s$ のオーダーであることがわかる。これから見られるように, 細長比が小さ

* Stockholm 工科大学のグループのように, 回転円筒の半径の代わりに回転円筒の長さを用いた方がより明解になる。

** 非圧縮性回転流体中の Stewartson 層に関する論文は1957年に, 圧縮性気体についての Onsager の Pancake 方程式は1965年にまとめられている。一方, 英国においても1948年に Wipple によって圧縮性の Stewartson 層の研究が既になされていた。

第4図 $E^{1/3}$ 境界層内の軸方向速度の分布⁽¹¹⁾

くなると Stewartson 層の厚さは厚くなり、密度スケール距離より大きくなる状態が普通になることが理解される。代表長さとして r_s のかわりに H を用いて Ekman 数を定義すれば、厚さは $E^{1/3}H$ と書くことは明らかである。回転円筒の内側部の軸方向流れに対応する自由 Stewartson 層も (33) 式と同じ方程式で記述される。密度スケール距離が Stewartson 層の厚さより大きい場合については、中山ら¹⁰⁾ により解が与えられている。

次に、 $E^{1/4}$ Stewartson 層について簡単に述べておく。第2図に示したように、上下バッフル板上を気体が内側から外側へ半径方向へ同じ流量で流れている場合、中心領域(第3図の空白の領域)の気体の回転角速度は剛体回転の角速度より小さくなる。このため側壁近傍に $E^{1/4}$ のオーダーの厚さの境界層が形成され、周方向速度とのマッチングが行われる。 $E^{1/4}$ 層は軸方向の上下に対称な2つの循環流れであり、この層を通過する軸方向の正味の流量はゼロである。この流れでは、 $u, v, T, \partial w / \partial z$ は z に依存せず、 r だけの関数であり、軸方向速度 w については半径方向の速度 u は Ekman 層の吸い込みによってひきおこされる。 v, T はオーダー1であり、 P は $E^{1/2}$ 、 u は $E^{1/2}$ 、 w は $E^{1/4}$ のオーダーにスケールされる。 $\eta = (1-r)/E^{1/4}$ とすると、基礎方程式は

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - 2 \frac{r_s}{H} (1 + \alpha^2)^{1/4} \rho_s^{1/2} v = 0 \quad (35)$$

となる。(35)式の解は Johansson と Barkら⁽¹⁵⁾ により与えられており、第5図に示す通りである。

第5図 $E^{1/4}$ 境界層内の周方向速度の分布⁽¹¹⁾

一方、上下バッフル板上の流れは、強制流量 L により形成される Ekman 層であり、次の方程式によって記述される⁽¹⁴⁾。

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} + 4\rho_s^2 (1 + \alpha^2 r^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} = 0 \quad (36)$$

ここで、 u, v, T は1のオーダー、 w, Ψ は $E^{1/2}$ のオーダーにスケールされており、 ζ は $E^{1/2}$ でスケールされた上部または下部バッフル板からの距離である。流れ関数をバッフル板上でゼロとすると(36)式の解は

$$\Psi = \Psi(\infty) (1 - e^{-\beta \zeta} \cos \beta \zeta - e^{-\beta \zeta} \sin \beta \zeta) \quad (37)$$

となる。ここで、 $\Psi(\infty)$ は Ekman 層の外縁における流れ関数の値であり、強制流量 L が与えられていると、次式から求められる。

$$\Psi(\infty) = \frac{-L}{(2\pi r_s^2 w \rho_s) E^{1/2}} \quad (38)$$

(25)式から、半径方向速度の分布を計算すると、第6図のようになる。Ekman層では、通常の境界層と同様に圧力は境界層の中で z 方向に変化しない。ここで、半径方向の圧力分布を決める中心領域(第3図の空白の領域)の流れを記述する基礎式について述べておこう。この領域では、軸方向の速度は Ekman 層の吸い込みによって規定されるので $E^{1/2}$ のオーダーであり、 v, P, ρ, T はオーダー1、したがって u は E のオーダーとなる。基礎式は温度(一様な温度からの変位)を未知変数

第6図 $E^{1/2}$ 境界層内の半径方向速度の分布

として書かれるのが通常であり、次の Poisson 型の方程式となる ω 。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r(1+\alpha^2 r^2)} \frac{\partial}{\partial r} r(1+\alpha^2 r^2) \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\alpha^2 r}{1+\alpha^2 r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rf) \quad (39)$$

$$\text{ここで, } f = Tr - 2v = -\frac{1}{M_R^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} + Pr$$

また、 f は z に依存せず r だけの関数である。Ekman 層の解が与えられていると、その外縁での T, v が計算されるので、 $f(r)$ の具体的な形が求められ、中心領域での圧力分布を計算することができる。このような考え方を提案し、具体的にバッフル板上の強制流による圧力分布の変化を計算したのは、荒木が最初であると思われる⁽¹⁴⁾。(39)式の解は、非斉次の方程式に対する特解と、温度に関する境界条件を満たす斉次解との和として表現される。斉次方程式は、いわば熱伝導度が場所によって変化するときの熱伝導方程式であり、 z 軸に関して反対称な流れを表現する。この式の解は、 α^2 が小さいとき⁽¹¹⁾や回転円筒の細長比が小さいとき⁽¹⁵⁾には、漸近展開により近似解が得られている。また、固有関数展開によっても容易に数値解を求めることができる⁽¹³⁾。

前にも述べたように、回転円筒内の流れを決める重要なパラメータは循環流量 L であり、これは低部スクープによって生成される。低部スクープ室は、いわば

タービンと同様に角運動量の大きい気体を吸引し、スクープの抗力(モーメント)の作用によって角運動量の小さくなった気体を排出する。したがって、戻り流量 $2L - F(1 - \theta)$ は、巨視的な角運動量のバランスから計算されるであろうことは容易に理解される。スクープ室内の気体が回転円筒より少し遅れた剛体回転をしているとして、角運動量のバランスを考えて循環流量を求めたのはSchmidt⁽¹⁷⁾であり、彼の方法により、実際のスクープの特性を概略とらえることができると考えられる。一方、回転円筒内の流れの解を数値計算によって求めようとする場合、スクープを回転円筒より遅れて回転する円板としてモデル化することが広く行われてきた。このようなモデルにより循環流の生成は計算できるものの、実際のスクープとの関連づけがかなり困難であることは否めない。実際のスクープと流れの相互作用をより正しく表現し、数値計算にも組み込むスクープモデルとして、スクープを質量、角運動量に対する吸い込み、エネルギーに対する湧き出しとして考える方法が米国のグループにより最近提案されている^{(17)~(20)*}。密度スケール距離が非常に小さくなるとスクープの抗力はほとんど先端に集中するので、このモデル化はかなり妥当である。ただし、吸い込

* このモデルはもともとGentryのアイデアによるものといわれる。文献(19, 20)は文献(17)に引用されているが、本稿の執筆時点では入手できなかった。

み、湧き出しは軸対称に円環として分布するとするが、回転座標系からみるとスクープは回転しており、それに対応して時間平均された吸い込み、湧き出しが軸対称に分布すると考えてよいであろう。回転円筒内の流れの大部分は線形化された Navier-Stokes 方程式で記述されるが、吸い込み、湧き出し近傍のトラス状の領域においては、非線形の Navier-Stokes 方程式が用いられる。この領域について適当なスケールリングを適用した漸近展開による解析も Cole⁽¹⁸⁾ によって行われている。一方、Fisher⁽¹⁷⁾ は微小な衝撃圧管を用いて高速回転円筒内の衝撃圧分布の測定を行い、上記のスクープモデルによる計算予測との比較を行なってほぼ良い一致が得られている。スクープのまわりの流れが実際にどのようなになっているかについてはあまり調べられていないが、超音速回転気体中におかれた吸い込み口のまわりの流れの計算⁽²¹⁾ では、吸い込み口前方に形成される衝撃波の形や流れのパターンは、一様流中におかれた吸い込み口のまわりの流れとかなり異なり、非対称性が大きく、また吸い込みノズル壁面の低圧側では、逆流が生じていることが示されている。またノズル外側の下流には、2 次的な衝撃波が形成される。吸い込み流量と背圧の関係をみると、流量が小さくても背圧は垂直衝撃波通過後の衝撃圧よりかなり小さいが、これは逆流が存在するためである。

最後に、数値計算による流れの計算について触れておく。流れが線形であっても軸方向と半径方向の(運動量, エネルギー)の拡散が同じオーダーである場合や非線形項が重要になる場合、パッフル板で仕切られた回転円筒内の全体の流れのように複雑な境界条件の下での解を得ようとする場合には、数値計算によって解を求めることが有効である。高速回転円筒内の流れに関する数値計算はこれまで数多く行われているが、代表的なものをあげると、甲斐⁽²²⁾、Lopez⁽²³⁾、Lahargue と Soubbaramayer⁽²⁴⁾、Dickerson と Jones⁽²⁵⁾、原田⁽²⁶⁾、Merten と Hänel⁽²⁷⁾ のものがある*。甲斐は、定常の Navier-Stokes の式(ただしエネルギー方程式中で散逸項が省略されている)を準線形化せずに差分近似し、変形 Newton 法により与えられた初期解から出発して逐次計算により収束解を求めている。ここで変形という意味は、ヤコビ行列から求められる修正値に緩和係数を乗じて修正を行うことである。Newton 法を用いる場合、原理的に初期解は収束解に充分近いことが必要であるが、初期解に剛体回転気体に対するものを用いて収束解が得られると述べている。ただし、回転円筒の一方の端板が静止しているような場合の計算はな

されていない。

Lopez は線形化された Navier-Stokes 方程式を差分近似して過緩和法で解を求めている。Lahargue と Soubbaramayer の計算は有限要素法によるものであり、収束解を求めるために Newton 法による逐次計算を行なっている。Dickerson と Jones の数値解は線形化方程式に対するものであるが、変動格子間隔のとり方に対してよく考慮がされており、差分方程式を解くのに計算領域を重複ブロックに分けて逐次計算を行うという方法が用いられている。計算の対象は、回転円筒の中心領域が粘性流れになった場合であり、Brouwers の理論解⁽²⁸⁾ との比較・検討が行われていて興味深い。

上記の数値計算はすべて定常の Navier-Stokes の式に基づいたものであるが、非定常の Navier-Stokes の式を用いて数値計算をはじめて行なったのは原田である。回転する中心軸を有する回転円筒内の圧縮性流れが計算の対象であるが、境界条件として上下端板、中心軸の温度が時間に対してステップ状に変化する場合と温度は一定であるが、中心軸と下部端板が突然静止する場合が扱われている。計算スキームは対流項に風上差分を用いた DuFort-Frankel スキームであり、Euler 風上差分スキームに比べ、回転 Mach 数 4 で約 20 倍程度大きい時間格子間隔で安定な計算が可能となっている。ただし、DuFort-Frankel スキームでは、時間微分を中心差分で近似するため、時間フィルタリングによる平均操作を行わないと解が発散するが、原田の計算では、30 時間格子間隔ごとに $\phi^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\phi^n + \phi^{n+1})$ の時間平均操作を行うことにより発散を避けている。

DuFort-Frankel スキームはインプリシットな性格を持っているが、原田の計算に見られるように、やはり空間格子間隔による時間格子間隔に対する制限がある。高速回転気体の流れのように、境界層の厚さが非常に小さい領域があると、その領域に対して妥当な分解能を持つ空間格子間隔はきわめて小さくなり、安定条件をみたす時間格子間隔もしたがって小さくなる。その結果、時間に対する漸近解として定常解を得るのが目的の場合、CPU 時間を多量に消費しなければならない。このような場合、時間ステップごとの計算には、エクスプリシット法に比べてより時間がかかるが、時間ステップを非常に大きくできるインプリシット差分を用いる方が、定常解を求めるための計算時間をより少

* Cloutman と Gentry もインプリシットエクスプリシット非定常数値積分により、非線形の圧縮性回転気体の数値解を求めているが、文献が手に入らないため詳細は不明である。

なくできるという意味で有効である。

最近 Merten と Hänel は、Beam-Warming の非定常インプリシット差分法により、圧縮性回転流体に対する Navier-Stokes 方程式の数値解を求めた。基礎式は、ストレッチング関数によって変換された空間座標系を用いて表現されており、未知変数ベクトルは ρ', u', w', T' よりなる。ここで、 $\rho' = \rho/\rho_s - 1$, $u' = 2ru/r_1^2 \omega$, $w' = v/r\omega - 1$, $T' = T/T_s - 1$ であり、添字 s は剛体回転に対応する量である。Beam-Warming スキームは完全にインプリシットであるが、近似的因数分解により空間的には r 方向と z 方向を独立に分離して計算ができるので、1次元の計算と同じになり容易に解を求めることができる。壁に温度分布を与える場合、回転円筒の上下端板が回転円筒と異なる速度で回転する場合、気体の供給や抜き出しを行なった場合に回転円筒内に生成される流れの計算が図示されている。

—参考文献—

- (1) LANDAHL, M.T.: Boundary layers and shear layers in a rapidly rotating gas, *Proc. 2nd Workshop on Gases in Strong Rotation, CEN Saclay*, (Soubbaramayer, Ed.), pp.15~50 (1977).
- (2) RÄTZ, E.: Uranium isotope separation in the gas centrifuge, "Aerodynamic Separation of Gases and Isotopes-Recent Advances", Von Karman Inst. of Fluid Dynamics, (1978).
- (3) SOUBBARAMAYER: Centrifugation, *Uranium Enrichment*, (Villani, S. Ed.), *Topics in Applied Physics*, 35, pp.183~242 (1979), Springer-Verlag.
- (4) LOWRY, R.A., Von HALLE, E.: The modern gas centrifuge and rarefied-gas dynamics, *UCC-ND, ORGDP*, Oak Ridge, TN., (1981), (K/OA-4720).
- (5) SOUBBARAMAYER (Ed.): *Proc. 2nd Workshop on Gases in Strong Rotation, CEN, Saclay*, (1977).
- (6) SCURICINI, G.B., (Ed.): *Proc. 3rd Workshop on Gases in Strong Rotation, CNEN, Roma*, (1979).
- (7) RÄTZ, E. (Ed.): *Proc. 4th Workshop on Gases in Strong Rotation, URENCO, Marlow and CENTEC, Belgisch Gladbach*, (1982). (プロシーディングスは未発行であるが、1982年度中には発行の予定)
- (8) Von HALLE, E.: The optimum axial flow taper in a countercurrent gas centrifuge, *UCC-ND, ORGDP*, (1979), (K/OA-4445).
- (9) LANDAHL, M.T.: Diffusion in a long countercurrent gas centrifuge as a perturbation problem, *The Aeronautical Research Institute of Sweden, Aeronautics Department, Technical Note 1* (26), FFA AU-751, Part 31, (1977).
- (10) NAKAYAMA, W., USUI, S.: Flow in rotating cylinder of a gas centrifuge, *J. Nucl. Sci. Technol.*, 11(6), 242~262 (1974).
- (11) SAKURAI, T., MATSUDA, T.: Gas dynamics of a centrifugal machine, *J. Fluid Mech.*, 62, Pt. 4, 727~736 (1974).
- (12) WOOD II, H.G., MORTON, J.B.: Onsager's pancake approximation for the fluid dynamics of a gas centrifuge, *UCC-ND, ORGDP*, (1980), (K/OA-4420).
- (13) BARK, F.H., BARK, T.H.: On vertical boundary layers in rapidly rotating gas, *J. Fluid Mech.*, 78, Pt. 749~761 (1976).
- (14) 荒木達雄: スクープ型遠心分離機の流れ解析, 原子力学会昭50年会要旨集(II), G3 (1975) と私信。
- (15) BARK, F.H., BARK, T.H.: On axially antisymmetric geostrophic flows in rapidly rotating gases, *J. Mécanique*, 18(1), 48~72 (1979).
- (16) SCHMIDT, W.: Strömungsmodell von Gegenstrom-Gasultrazentrifugen, *Atomkernenergie*, 20(4), 299~303 (1972).
- (17) FISHER, S.S., TUCCI, R.J., LOWRY, R.A.: Measured and predicted impact pressures in a UF_6 gas centrifuge, 前出(7).
- (18) COLE, J.D.: An asymptotic study of Pancake theory, 前出(7).
- (19) WOOD II, H.G., SANDERS, G.: Rotating compressible flow with internal sources and sinks, *UCC-ND, ORGDP*, (1980), (K/TS-10, 250).
- (20) CLOUTMAN, L.D., GENTRY, R.A.: Numerical simulation of the countercurrent flow in a gas centrifuge (in preparation).
- (21) MIKAMI, H.: Rotating supersonic flow about scoop inlet using an unsteady implicit technique, 前出(7).
- (22) KAI, T.: Basic characteristics of centrifuges (II), Analysis of fluid flow in centrifuges, *J. Nucl. Sci. Technol.*, 14(4), 267~281 (1977).
- (23) LOPEZ, S.: Comparison between the flow in a mechanically driven centrifuge, calculated by means of a numerical code using the finite difference method, 前出(5), p. 239~250.
- (24) LAHARGUE, J.P., SOUBBARAMAYER: A numerical model for the investigation of the flow and isotope concentration field in an ultracentrifuge, *Comp. Maths. Appl. Mech. Eng.*, 15, 259~273 (1978).
- (25) DICKINSON, G.J., JONES, I.P.: Numerical solutions for the compressible flow in a rapidly rotating cylinder, *J. Fluid Mech.*, 107, 89~107 (1981).
- (26) HARADA, I.: Computation of strongly compressible rotating flows, *J. Comp. Phys.*, 38, 335~356 (1980).
- (27) MERTEN, A., HÄNEL, D.: Navier-Stokes solution for compressible flow in a rotating cylinder, 前出(7).
- (28) BROUWERS, J.J.H.: On the motion of a compressible fluid in a rotating cylinder, Ph. D. thesis, Twente Institute of Technology, Enschede, The Netherlands (1976); On the compressible flow in a gas centrifuge and its effect on the maximum separative power, *Nucl. Technol.*, 39, 311~322 (1978).