研究論文

162. 多領域原子炉の原子炉周期の計算法

安 成 弘*

Methods for Calculating the Reactor Periods of Multi-region Reactors

By Shigehiro AN

The methods for calculating the reactor periods of multi-region reactors by multi-group theory are discussed.

It is usually very difficult to solve the kinetic problems of multi-region reactors by a strict and straight forward method. Therefore, two kinds of approximation, the perturbation method and the method of coupled system parameters, are used here under the condition that the system is nearly critical. In the former, introducing a vektor, the elements of which consist of neutron fluxes and delayed neutron precursor concentrations, we can derive a formula which relates the variation of the reactor periods to the perturbation conditions. The equation relating the reactivity with the steady reactor period is also obtained. In the latter, the coupled parameters concerning the neutron source terms of every energy group in every region are defined, and the kinetic equation which gives the steady period is derived using such parameters.

ま え が き

多領域原子炉の動特性は将来の新しいアイディアによる多領域原子炉の場合は勿論、低濃縮ウランや天然ウランを燃料とした動力炉の燃料燃焼に伴う Pu の蓄積等による多領域化、あるいは Pu 燃料、 ^{233}U 燃料の使用による多領域化の場合等に重要な問題である。

本報は多領域原子炉の原子炉周期の逆数 ω の計算法について述べたものである。

多領域原子炉の場合には、直截的な方法で ω 求めることは、つぎに述べるように一般的には非常に困難であり、なんらかの近似的方法を用いることとなるが、本報では多組拡散理論で論ずる場合について、この問題に関して従来得られている結果よりも、遅発中性子の取扱等においてさらに一步を進めた解答を与えている。多領域原子炉を多組理論で扱う場合、勿論デジタル計算機を使用することになろうが、本報もデジタル計算機での計算を念頭において議論している。

遅発中性子のある場合、多組拡散理論によれば中性子束の変化は次式で与えられる。

$$\text{div } D_i \text{ grad } \Phi_i - \sum_{a,i} \Phi_i + \sum_{r,i-1} \Phi_{i-1} - \sum_{r,i} \Phi_i + \sum_{j=1}^N \chi_{j,i} (1 - \beta_j) \nu_j \sum_{j,j} \Phi_j + \delta_{ai} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \lambda_{j,k} Q_{j,k}$$

$$= \frac{1}{v_i} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \quad i=1, 2, \dots, N \quad (1)$$

$$\beta_{j,k} \nu_j \sum_{j,j} \Phi_j - \lambda_{j,k} Q_{j,k} = \frac{\partial Q_{j,k}}{\partial t} \quad (2)$$

$$k=1, 2, \dots, M \quad \beta_j = \sum_{k=1}^M \beta_{j,k}$$

Φ_i : i 番目のエネルギーグループの中性子束

v_i : i 番目のエネルギーグループの中性子の速度

$\sum_{j,j}$: j 番目のエネルギーグループの核分裂断面積

$\sum_{a,i}$: i 番目のエネルギーグループの吸収断面積

$\sum_{r,i}$: i 番目のエネルギーグループの中性子が ($i+1$) 番目のエネルギーグループへ入る除去断面積

ν_j : j 番目のエネルギーグループでの核分裂による分裂中性子数

$\chi_{j,i}$: j 番目のエネルギーグループでの核分裂による即発中性子の中で i 番目のエネルギーグループに属するものの割合, $\sum_{j=1}^N \chi_{j,i} = 1$

$\beta_{j,k}$: j 番目のエネルギーグループでの核分裂による k 番目の遅発中性子**の生成率

* 東京大学工学部 (Faculty of Engng., Univ. of Tokyo)

** 本報では数学的形式化の為核分裂を生ずるエネルギーグループ毎に遅発中性子先行核を区別した。

$Q_{j,k}$: 上述の遅発中性子の先行核の濃度

$\lambda_{j,k}$: 上述の先行核の崩壊定数

上の(1),(2)式においては、勿論 $\Phi_i, Q_{j,k}$ は場所と時間との関係である。また、遅発中性子の発生エネルギーはすべて α 番目のエネルギーの中に入るとし、 i 番目のグループからの減速の結果除去される中性子は、すべて $(i+1)$ 番目の組に入るとしている。また上式中の断面積等の組定数は、多組拡散理論の成立する範囲で場所の関数と考えてよい。

多領域原子炉の ω を求めるために、直截的な方法を用いるとすると、通常行なうように、

$$\Phi_i(r, t) = \varphi_i(r) e^{\omega t} \quad (3)$$

$$Q_{j,k}(r, t) = q_{j,k}(r) e^{\omega t} \quad (4)$$

と(1),(2)式に入れると、

$$\begin{aligned} & \text{div } D_i \text{ grad } \varphi_i - \sum_{a,i} \varphi_i + \sum_{r,i-1} \varphi_{i-1} - \sum_{r,i} \varphi_i \\ & + \sum_{j=1}^N \chi_{j,i} (1 - \beta_j) \nu_j \varphi_j \sum_{f,j} + \delta_{ii} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \lambda_{j,k} q_{j,k} \\ & = \frac{\omega}{v_i} \varphi_i \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (5)$$

$$\beta_{j,k} \nu_j \varphi_j \sum_{f,j} - \lambda_{j,k} q_{j,k} = \omega q_{j,k} \quad (6)$$

$$k = 1, 2, \dots, M$$

の関係が求められる。

さらに(6)式から

$$q_{j,k} = \frac{1}{\omega + \lambda_{j,k}} \beta_{j,k} \nu_j \varphi_j \sum_{f,j} \quad (7)$$

となるので、(7)式を(5)式に入れて、 $\varphi_i(r)$ のみの方程式として $\varphi_i(r)$ の一般解を求め、さらに境界条件を適用すると、 ω および任意定数の比が決定されることになるが、この方法は一般には困難な問題となる。

ゆえに、なんらかの近似的な方法を用いることが必要となるが、本報では摂動論的取扱いおよび結合パラメータによる取扱いについて述べる。

I. 摂動論的取扱いによる近似法

摂動論的取扱いについての本報の特徴は、中性子束および遅発中性子先行核の濃度を成分とするベクトルを用い、随伴演算子、随伴ベクトルにより今まで求められていない遅発中性子の効果を含んだ摂動に対する ω の変化を示す式を導出しているところにある。この式の応用例として、多領域原子炉の場合の反応度と ω とを結びつける関係式を導いた。

類似の問題を扱った文献としては、輸送理論の場合文献(4)があるが、上述の ω の変化に関する式は導出されていない。また、多組拡散理論の場合には文献(5)が

あるが、遅発中性子に関しては全然考慮されていない。文献(6)は遅発中性子を考慮した一組および二組理論の場合を扱っているが、その扱いは多領域の場合としては正当でない*。文献(7)では文献(4)と同種の方法で、二組拡散理論、二領域の場合の式を導出しているが、勿論本報の一般的結果から導出される。

1. 遅発中性子を考慮した多組理論による摂動法

ベクトル $\mathfrak{B}$ として、 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, q_{1,1}, q_{1,2}, \dots, q_{1,M}, \dots, q_{N,1}, q_{N,2}, \dots, q_{N,M}$ を成分とするベクトルを考え、行列 M としてつぎのものを考える。

$$M \equiv \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,N} & 0 & \dots & 0 \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,N} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{d,1} & M_{d,2} & \dots & M_{d,N} & N_{1,1} & N_{1,2} & \dots & N_{1,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N,1} & M_{N,2} & \dots & M_{N,N} & 0 & \dots & 0 \\ B_{1,1}^1 & B_{1,1}^2 & \dots & B_{1,1}^M & -\lambda_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ B_{1,2}^1 & B_{1,2}^2 & \dots & B_{1,2}^M & 0 & -\lambda_{1,2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N,M}^1 & B_{N,M}^2 & \dots & B_{N,M}^M & 0 & \dots & 0 & -\lambda_{N,M} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$M_{i,t} = v_i [\text{div } D_i \text{ grad} - \sum_{a,i} - \sum_{r,i}] + \chi_{t,i} (1 - \beta_i) \nu_i \sum_{f,i}$$

$$M_{i,i-1} = v_i [\sum_{r,i-1} + \chi_{i-1,i} (1 - \beta_{i-1}) \nu_{i-1} \sum_{f,i-1}]$$

$$M_{i,j} = v_i \chi_{j,i} (1 - \beta_j) \nu_j \sum_{f,j} \quad (j \neq i, i-1)$$

$$N_{i,j} = v_i \lambda_{i,j}$$

$$B_{i,j}^l = \delta_{il} \beta_{j,i} \nu_i \sum_{f,i}$$

ベクトル $\mathfrak{B}$ と演算子 M を用いれば(5),(6)式はつぎの形に書き直される。

$$M \mathfrak{B} = \omega \mathfrak{B} \quad (9)$$

α は固有値および固有ベクトルを区別するための添字である。

つぎに M の転置行列 $\tilde{M}^{**}$ を導入し、次式を考えてみよう。

$$\tilde{M} \mathfrak{B}^+ = \omega^+ \mathfrak{B}^+ \quad (10)$$

* 炉心全域で遅発中性子生成率は一定として取り扱っており、摂動項の中に遅発中性子のパラメータに関する変化を含めることができない。

** 以下の議論については、たとえば文献(9)の摂動論の章を参照されたい。なお、本報と関係のある時間依存のボルツマン方程式の随伴方程式およびその解である時間依存の中性子インポートランスの概念と取り扱いについては参考文献(1)-(3)を参照されたい。

ただし、 $\mathfrak{B}^+$ は $\varphi_1^+, \varphi_2^+, \dots, \varphi_N^+, q_{1,1}^+, q_{1,2}^+, \dots, q_{1,M}^+, \dots, q_{N,1}^+, \dots, q_{N,M}^+$ を成分とするベクトルであって、(10)式は書き直すと、

$$\begin{aligned} & v_i (\text{div } D_i \text{ grad} - \sum_{\alpha,i} - \sum_{r,i}) \varphi_i^+ + v_{i+1} \sum_{r,i} \varphi_{i+1}^+ \\ & + \sum_{j=1}^N v_j \chi_{i,j} (1 - \beta_i) v_i \sum_{j,i} \varphi_j^+ \\ & + \sum_{j=1}^M \beta_i v_{ij} \sum_{j,i} q_{i,j}^+ = \omega^+ \varphi_i^+ \end{aligned} \quad (11)$$

$$\varphi_i^+ v_a \lambda_{j,k} - \lambda_{j,k} q_{i,j}^+ = \omega^+ q_{j,k}^+ \quad (12)$$

となる。

$$\text{ゆえに,} \quad q_{j,k}^+ = \frac{q_i^+ v_a \lambda_{j,k}}{\omega^+ + \lambda_{j,k}} \quad (13)$$

である。

(10)式すなわち(11), (12)式に対しては、 φ_i^+ に対する境界条件として、 φ_i に対すると同じものを課する。この場合も、固有値、固有ベクトルを区別するための添字 β を付すと、

$$\tilde{M} \mathfrak{B}_\beta^+ = \omega_\beta \mathfrak{B}_\beta \quad (14)$$

となる。

つぎに、 $\tilde{M}$ が M の随伴演算子であることを証明しよう。そのためには、

$$\langle \mathfrak{B}_\beta^+ M \mathfrak{B}_\alpha \rangle^* - \langle \mathfrak{B}_\alpha \tilde{M} \mathfrak{B}_\beta^+ \rangle = 0 \quad (15)$$

であることを証明すればよろしい。ただし、上式の積分は原子炉の全体積上で行なう。

(15)式の左辺を計算すると、

$$\begin{aligned} & \int \left(\sum_{i=1}^N \varphi_{i,\beta}^+ v_i \text{div } D_i \text{ grad } \varphi_{i,\alpha} \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^N \varphi_{i,\alpha} v_i \text{div } D_i \text{ grad } \varphi_{i,\beta}^+ \right) dV \end{aligned} \quad (16)$$

となる。さらに D_i の一定の領域に分けて考え、多組

の取扱いをしているので、 v_i は領域によらず一定とすると、

$$\sum_{r=1}^R \sum_{i=1}^N D_{i,r} v_i \int_{V_r} (\varphi_{i,\beta}^+ \text{div grad } \varphi_{i,\alpha} - \varphi_{i,\alpha} \text{div grad } \varphi_{i,\beta}^+) dV \quad (17)$$

となる。ただし、 R は領域の数、 V_r は r 番目の積分領域を示す。表面積分に書き改めると、

$$\sum_{r=1}^R \sum_{i=1}^N D_{i,r} v_i \int_{S_r} (\varphi_{i,\beta}^+ \text{grad}_n \varphi_{i,\alpha} - \varphi_{i,\alpha} \text{grad}_n \varphi_{i,\beta}^+) dS \quad (18)$$

S_r は r 番目の領域の境界面を示す。上式は境界条件から零となる**。したがって、 $\tilde{M}$ は M の随伴演算子である。(14)式が(9)式と同じ固有値を持つことの厳密な証明は困難であるが、つぎのような関係式も成立するので、通常このことを仮定している**。

$$\begin{aligned} & \langle \mathfrak{B}_\beta^+ M \mathfrak{B}_\alpha \rangle - \langle \mathfrak{B}_\alpha \tilde{M} \mathfrak{B}_\beta^+ \rangle \\ & = (\omega_\alpha - \omega_\beta^*) \langle \mathfrak{B}_\beta^+ \mathfrak{B}_\alpha \rangle \\ & = 0 \end{aligned}$$

いま、原子炉に対する摂動を演算子 P で示すと、摂動後の(9)式に対する式は、

$$(M + P) \mathfrak{B}_\alpha' = \omega_\alpha' \mathfrak{B}_\alpha' \quad (19)$$

となる。(19)式に $\tilde{\mathfrak{B}}_\beta^+$ を乗じて積分し、(14)式に $\tilde{\mathfrak{B}}_\alpha'$ を乗じて積分し、両式の減法を行なって $\tilde{M}$ が M の随伴演算子であることを用いると、

$$\langle \mathfrak{B}_\beta^+ P \mathfrak{B}_\alpha' \rangle = (\omega_\alpha' - \omega_\beta) \langle \mathfrak{B}_\beta^+ \mathfrak{B}_\alpha' \rangle \quad (20)$$

となる。上式は摂動 P を受けた結果の ω の変化を示す式であり、このままの形では遅発中性子を考慮しない場合と同一であるが、具体的に書き直して見るとその差が明らかになる。 $\alpha = \beta$ の場合に対しては、

$$\Delta \omega_\alpha = \omega_\alpha' - \omega_\alpha = \frac{\langle \mathfrak{B}_\alpha^+ P \mathfrak{B}_\alpha' \rangle}{\sum_{i=1}^N \int_V \varphi_{i,\alpha}^+ \varphi_{i,\alpha'} dV + \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \int \frac{\varphi_{i,\alpha}^+ v_a \lambda_{j,k} \beta_{j,k} v_j' \varphi_{j,\alpha'} \sum_{j,i} \alpha V}{(\omega_\alpha + \lambda_{j,k})(\omega_\alpha' + \lambda_{j,k})} dV} \quad (21)$$

ただし、 $'$ を付したものは摂動後の値を示している。わりに $\mathfrak{B}_\alpha$ を用いることができるので、ここで、摂動の小さい場合には、近似として $\mathfrak{B}_\alpha'$ の代

$$\Delta \omega_\alpha \doteq \frac{\langle \mathfrak{B}_\alpha^+ P \mathfrak{B}_\alpha \rangle}{\sum_{i=1}^N \int_V \varphi_{i,\alpha}^+ \varphi_{i,\alpha} dV + \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \int \frac{\varphi_{i,\alpha}^+ v_a \lambda_{j,k} \beta_{j,k} v_j \varphi_{j,\alpha} \sum_{j,i} dV}{(\omega_\alpha + \lambda_{j,k})^2}} \quad (22)$$

* $\int_V \tilde{\mathfrak{B}}_\beta^+ M \mathfrak{B}_\alpha dV = \langle \mathfrak{B}_\beta^+ M \mathfrak{B}_\alpha \rangle$

** 境界面上で $\varphi_{i,\alpha}$, $\varphi_{i,\beta}^+$, $D_{i,r} \text{ grad}_n \varphi_{i,\alpha}$, $D_{i,r} \text{ grad}_n \varphi_{i,\beta}^+$ は連続である。したがって、(18)式の積分の各項の中で、ある領域の境界面上の積分と、それに隣接する領域の同じ境界面上の積分とでは、その境界への垂直なベクトルが逆向きとなるので、その和は零となる。また、原子炉の外面上では $\varphi_{i,\alpha}$, $\varphi_{i,\beta}^+$ はともに零であるから、外面上の積分も零となる。したがって、(18)式は零となる。

** 摂動論に関しては文献(5), (9), (10)等を参照されたい。

遅発中性子の特性に関して等しい領域に分けると,

$$\Delta\omega_\alpha \doteq \frac{\langle \mathfrak{B}_\alpha^+ P \mathfrak{B}_\alpha \rangle}{\sum_{i=1}^N \int_V \varphi_{i,\alpha}^+ \varphi_{i,\alpha} dV + \sum_{r=1}^R \left[\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \frac{\lambda_{j,k}^r \beta_{j,k}^r v_d}{(\omega_\alpha + \lambda_{j,k}^r)^2} \int_V \varphi_{d,\alpha}^+ \nu_j \varphi_{j,\alpha} \sum_{f,j} dV \right]} \quad (23)$$

となる。

遅発中性子を含めて、摂動を取り扱った(23)式は新しい結果であるが、従来の即発中性子のみを取り扱った場合の式に比してつぎの特徴を持っている。

臨界からのへだたりの小さい場合、遅発中性子の原子炉周期への影響はきわめて大きいので、従来の即発中性子のみを考慮した式では、原子炉周期の変化の近似値は与えられない。いま、簡単な場合を例にとり、中性子束を2組、遅発中性子を1組とし、 $\alpha=0$, $\omega_0=0$ の場合を考えよう。したがって、 $\varphi_{d,\alpha}^+ = \varphi_{f,\alpha}^+$, $v_d = v_f$ となる。また、 $\sum_{f,j} = 0$ とする(f は速中性子の組を、 t は熱中性子の組を示す)。この場合、(23)式の分母は

$$\int_V (\varphi_{f,0}^+ \varphi_{f,0} + \varphi_{t,0}^+ \varphi_{t,0}) dV + \sum_{r=1}^R \frac{\beta_r}{\lambda_r} v_f \int_V \varphi_{f,0}^+ \nu \varphi_{t,0} \sum_{f,t} dV$$

となる。ここで、 φ_f^+ , φ_t^+ をインポートランス関数とすると、 $\varphi_{f,0}^+ = \varphi_f^+ / v_f$, $\varphi_{t,0}^+ = \varphi_t^+ / v_t$ の関係がある* ので、上式は、

$$\int_V (\varphi_f^+ \varphi_{f,0} / v_f + \varphi_t^+ \varphi_{t,0} / v_t) dV + \sum_{r=1}^R \frac{\beta_r}{\lambda_r} \int_V \varphi_f^+ \nu \varphi_{t,0} \sum_{f,t} dV$$

となる。上式で φ_f^+ , φ_t^+ は同じオーダーと考えられる。 β_r / λ_r は0.1のオーダーである。 $\varphi_{f,0}$, $\varphi_{t,0}$ もその差はそれほど大きくはない。ゆえに、 v_f の存在のために第1番目の積分の最初の項は他の項と比較して、無視できる程度に小さい。また、 v_t の存在のために通常第1番目の積分は第2番目の積分に比して遙かに小さくなる。したがって、第2番目の積分を無視しては $\Delta\omega_0$ は与えられない。このことは、もっと一般的な取扱いの場合にも勿論同様にいえることである。

また、もう1つの重要な特色は、 P の中に遅発中性子に関するパラメータの変化を含めることができる点である。以上の理由を考えると、きわめて適用範囲の広い多領域の場合には特に有用な式であるといえる。

なお、この節の結果の応用例の1つとして、結果的には、すでに Ussachoff らの得た式と同じものになるのであるが、 ω_0 と ρ (反応度) とを関係づける式を次節において導出する。

2. 反応度と ω との関係を与える式

この節では前節で得られた結果をもとにして、反応

度と ω との関係を与える近似式を求めてみよう。また本節では、中性子束の空間分布に関しては、基本モードに限ることとする。

臨界でない場合には、次式が成立している。

$$M \mathfrak{B}_0 = \omega_0 \mathfrak{B}_0 \quad (26)$$

$$\omega_0 \neq 0$$

ここで、 ν_t のみ $\Delta\mu\nu_t$ だけ変化させて、原子炉を臨界状態にしたと考え、この変化を演算子 P で示すと、

$$(M+P) \mathfrak{B}_0' = \omega_0' \mathfrak{B}_0' \quad (27)$$

$$\omega_0' = 0$$

であるような $\mathfrak{B}_0'$ が決定される。ただし、 P はつぎのように表わされる。

$$P \equiv \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \cdots & P_{1,N} & 0 & \cdots & 0 \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots & P_{2,N} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N,1} & P_{N,2} & \cdots & P_{N,N} & 0 & \cdots & 0 \\ B_{1,1}^1 & B_{1,1}^2 & \cdots & B_{1,1}^N & 0 & \cdots & 0 \\ B_{1,2}^1 & B_{1,2}^2 & \cdots & B_{1,2}^N & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N,M}^1 & B_{N,M}^2 & \cdots & B_{N,M}^N & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$P_{i,j} = \nu_j \Delta\mu \chi_{j,i} (1 - \beta_j) \nu_j \sum_{f,j}$$

$$B_{i,j}^1 = \Delta\mu B_{i,j}^1$$

ここで、 $M+P=M'$ とおくと、

$$M' \mathfrak{B}_0' = \omega_0' \mathfrak{B}_0' \quad (29)$$

$$\omega_0' = 0$$

となるが、この M' に $(-P)$ で表わされる変化を与えたとして、

$$(M'-P) \mathfrak{B}_0 = \omega_0 \mathfrak{B}_0 \quad (30)$$

$$\omega_0 \neq 0$$

となる。したがって、(20)式から、

$$\langle \mathfrak{B}_0^+ (-P) \mathfrak{B}_0 \rangle = (\omega_0 - \omega_0') \langle \mathfrak{B}_0^+ \mathfrak{B}_0 \rangle \quad (31)$$

すなわち

$$\langle \mathfrak{B}_0^+ P \mathfrak{B}_0 \rangle = -\omega_0 \langle \mathfrak{B}_0^+ \mathfrak{B}_0 \rangle \quad (32)$$

* 文献(9)を参照されたい。

となる。

ここで、インポートランス関数を φ_i^{**} とすると、

$$\varphi_i^{**}/v_i = \varphi_i^{\prime*} \quad (33)$$

であり、 $\Delta\mu = -\rho$ (ρ は反応度) であるから、

$$\omega_0 \left[1 + \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \int_V \varphi_j^{**} \frac{\beta_{j,k}}{\omega_0 + \lambda_{j,k}} \nu_j \sum_{f,j} \varphi_{j,0} dV}{\sum_{i=1}^N \int_V \varphi_i^{**} \varphi_{i,0}/v_i dV} \right] \\ = \rho \left[\frac{R}{\sum_{i=1}^N \int_V \varphi_i^{**} \varphi_{i,0}/v_i dV} \right] \quad (34)$$

$$R = \sum_{i=1}^N \int_V \varphi_i^{**} \sum_{j=1}^N \chi_{j,i} (1 - \beta_j) \nu_j \sum_{f,j} \varphi_{j,0} dV \\ + \sum_{j=1}^N \int_V \varphi_j^{**} \sum_{k=1}^M \beta_{j,k} \nu_j \sum_{f,j} \varphi_{j,0} dV$$

となる。いま摂動の小さい場合を考えているので、(34)式で $\varphi_{j,0}$ の代わりに近似値として臨界の時の中性子束 $\varphi_{j,0}'$ が使用できるのは、(22)式の関係があるので当然である。しかし、この場合は $q_{j,k,0}$ の代わりに $q_{j,k,0}'$ すなわち $\beta_{j,k} \nu_j \sum_{f,j} \varphi_{j,0}' / \lambda_{j,k}$ を使用していないで、(22)式のように φ_0 の近似値として、 φ_0' を使用していないことに注意しておく必要がある。ゆえにこの場合には、

$$\omega_0 \left[1 + \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \int_V \varphi_j^{**} \frac{\beta_{j,k}}{\omega_0 + \lambda_{j,k}} \nu_j \sum_{f,j} \varphi_{j,0}' dV}{\sum_{i=1}^N \int_V \varphi_i^{**} \varphi_{i,0}' / v_i dV} \right] \\ \doteq \rho \left[\frac{R'}{\sum_{i=1}^N \int_V \varphi_i^{**} \varphi_{i,0}' / v_i dV} \right] \quad (35)$$

となる。ただし、 R' は R において、 $\varphi_{j,0}$ の代わりに $\varphi_{j,0}'$ とおいた式である。

(35)式は Ussachoff が $\bar{l}$ (平均中性子寿命) および $\beta_{j,k}'$ (実効的遅発中性子生成率) に対して行なったと同様の意味づけにより、次式のように書き改めることができる。

$$\rho \doteq \bar{l} \omega_0 + \omega_0 \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \frac{\beta_{j,k}'}{\omega_0 + \lambda_{j,k}} \quad (36)$$

(36)式は ρ と ω_0 を関係づける式であり、形式上はいわゆる Inhour 式と同じである。求める ω_0 は(36)式の根の中の最大値である。

II. 結合パラメータによる近似法

Avery は “Coupled Reactor” の理論において、各炉心間の核分裂過程に関する結合パラメータを導入して議論を行なっているが、ここでは、Avery の場合と異なる各領域、各エネルギーグループの中性子発生項

に関する結合パラメータを導入し、多領域の場合の近似的な動特性方程式を求めて ω の計算式を導出する。著者が新しい結合パラメータを導入して、動特性を論じた理由はつぎのようなものである。

Avery の場合には、動特性方程式の中に実効的遅発中性子生成率とその求め方に論及することなく用いられている。動特性に対する実効的遅発中性子生成率の及ぼす影響の大きいことを考えると、Avery の理論の場合、一貫性を失わない実効的遅発中性子生成率の求め方が問題となろう。一方、本報の方法によると、エネルギーグループの組数を適当にすれば、絶対的遅発中性子生成率を用いることができ、実効的遅発中性子生成率を求める必要がない。つぎに、Avery の場合はインポートランスについて式を求めているが、中性子束と直接関係のつく本報の式の方が、ある場合にはより興味があるであろう。特に実験と結びつける場合には有用であろう。なお、このことと関係があるが、多領域炉の伝達関数を議論できる点、しかも必要に応じてエネルギーを組み分けして議論し得る可能性のあることも特徴である。勿論この結合パラメータは系の静的な場合の解析にも利用できることはいうまでもない。しかし本報では、動特性方程式の導出と ω の計算とについてのみ論ずることとする。

議論を簡単にするために、二組拡散理論により二領域原子炉を取り扱う場合について論ずるが、勿論より一般的に拡張することは容易である。なお、以下の議論においては中性子束の空間分布は基本モードに限ることとする。

原子炉の動特性はつぎのようなパラメータを用いて表わすことができる。

$S_{i,j}$: j 番目の領域において発生した i 番目のエネルギーグループの中性子の炉心全体での毎秒の消失数

$\alpha_{k,m}^{i,j}$: j 番目の領域において発生した i 番目のエネルギーグループの中性子の消失につき、 m 番目の領域で k 番目のエネルギーグループの中性子の発生する個数、これが結合パラメータである。

$l_{i,j}$: j 番目の領域で発生した i 番目のエネルギーグループの中性子寿命

$\beta_{r,m}^{**}$: m 番目の領域での r 種の遅発中性子の実効

* 文献(9)を参照されたい。

** 高速中性子を1つのグループとして扱っているので、絶対的生成率を用いることができない。この点については後述する。

的生成率

速中性子の組には添字 1 を，熱中性子の組には添字 2 を付すことにすると，上述のパラメータを使用して neutron balance から次式を導くことができる。

$$l_{1,1} \frac{dS_{1,1}}{dt} = \alpha_{1,1}^2 S_{2,1} (1 - \beta_1) \alpha_{1,1}^2 (1 - \beta_1) S_{2,2} + \sum_{r=1}^N \lambda_r C_{r,1} - S_{1,1} \quad (37)$$

$$l_{2,1} \frac{dS_{2,1}}{dt} = \alpha_{2,1}^2 S_{1,1} + \alpha_{2,1}^2 S_{1,2} - S_{2,1} \quad (38)$$

$$l_{1,2} \frac{dS_{1,2}}{dt} = \alpha_{1,2}^2 S_{2,1} (1 - \beta_2) + \alpha_{1,2}^2 S_{2,2} (1 - \beta_2) + \sum_{r=1}^N \lambda_r C_{r,2} - S_{1,2} \quad (39)$$

$$l_{2,2} \frac{dS_{2,2}}{dt} = \alpha_{2,2}^2 S_{1,1} + \alpha_{2,2}^2 S_{1,2} - S_{2,2} \quad (40)$$

$$\frac{dC_{r,m}}{dt} = \beta_{r,m} (\alpha_{1,m}^2 S_{2,1} + \alpha_{1,m}^2 S_{2,2}) - \lambda_r C_{r,m} \quad (41)$$

$$r = 1, 2, \dots, N$$

$$\beta_m = \sum_{r=1}^N \beta_{r,m} \quad (42)$$

$$m = 1, 2$$

ただし， $\alpha_{1,1}^2$ および $\alpha_{1,2}^2$ は遅発中性子先行核の発生個数を含む。

ここで，上の各式の意味を述べてみよう。

(37)式について考えると，右辺の第 1, 2 項は領域 1 における高速グループ中性子の即発中性子としての発生項，第 3 項は遅発中性子としての発生項，第 4 項は領域 1 において発生した高速グループ中性子の全炉心内における消失項である。したがって，右辺全体としては，全炉心内における，領域 1 で発生した高速グループ中性子の時刻 t における変化の割合を示すものである。一方，中性子の個数を N ，中性子消失数を S ，中性子寿命を l とすると， $lS = N$ の関係があるので，(37)式が成立する。同様に，(39)式は領域 2 で発生した高速グループ中性子の全炉心内における変化の割合を示す式である。(38)式の右辺の第 1, 2 項は高速グループ中性子の減速により，領域 1 において発生する熱グループ中性子の発生数を示す。第 3 項は領域 1 で発生した熱グループ中性子の全炉心内における消失数を示すものである。したがって，(38)式は領域 1 において発生した熱グループ中性子の全炉心内における変化を示している。(40)式も同様に，領域 2 で発生した熱グループ中性子の全炉心内における変化を示している。(41)式は遅発中性子先行核の濃度の変化を示す式である。

つぎに，上述のパラメータの求め方について述べてみよう。この値を正確に求めるためには，問題にして

いる状態における中性子束を正確に求めなければならない。しかし，ここでは系が臨界からのへだたりが小さい場合を考え，Avery が用いているような近似* を行なうことにする。すなわち，核分裂の結果発生する中性子の個数 ν_i のみを変化させて，臨界とした場合（以下擬臨界と呼ぶ）の高速グループ中性子束 $\phi_1(r)$ および熱グループ中性子束 $\phi_2(r)$ を求め，これを用いて計算する。

つぎに， $\alpha_{1,1}^2$ の場合について述べてみよう。 j 領域における熱グループ中性子に対する源 $\Sigma_{1,j} \phi_1(r)$ ($\Sigma_{1,j}$ は j 領域における高速中性子に対する除去断面積) のみを与えて次式により $\phi_{2,j}(r)$ を求める。

$$D_2 \nabla^2 \phi_{2,j} - \Sigma_2 \phi_{2,j} + \Sigma_{1,j} \phi_1 = 0 \quad (43)$$

D_2 ， Σ_2 はそれぞれ熱グループ中性子に対する拡散係数および吸収断面積である。上のようにして求められた $\phi_{2,j}(r)$ は j 領域でのみ与えられた熱グループ中性子源が炉心全体に拡散して行った場合の中性子束である。したがって， $\alpha_{1,1}^2$ は次式で与えられる。

$$\alpha_{1,1}^2 = \frac{\Sigma_{2,1} k_1 \int_{V_1} \phi_{2,1}(r) dV}{\Sigma_{1,1} \int_{V_1} \phi_1(r) dV} \quad (44)$$

k_i : i 領域での無限大増倍率

同様の考えにより， $\phi_{1,j}(r)$ を j 領域でのみ高速グループ中性子に対する源 $\Sigma_{2,j} k_2 \phi_2(r)$ を与えて，(43)式に類似の高速グループ中性子に対する拡散方程式を解いて求めた高速中性子束であるとする。

$$\alpha_{1,2}^2 = \frac{\Sigma_{1,2} \int_{V_2} \phi_{1,2}(r) dV}{\Sigma_{2,2} k_2 \int_{V_2} \phi_2(r) dV} \quad (45)$$

となる。

つぎに，中性子寿命を $l = N/S$ の関係から求めると

$$l_{1,1} = \frac{\int_V \phi_{1,1}(r) / \nu_1 dV}{\Sigma_{2,1} k_1 \int_{V_1} \phi_2(r) dV} \quad (46)$$

$$l_{2,1} = \int_V \phi_{2,1}(r) / \nu_2 dV / \Sigma_{1,1} \int_{V_1} \phi_1(r) dV \quad (47)$$

$$l_{1,2} = \int_V \phi_{1,2}(r) / \nu_1 dV / k_2 \Sigma_{2,2} \int_{V_2} \phi_2(r) dV \quad (48)$$

$$l_{2,2} = \int_V \phi_{2,2}(r) / \nu_2 dV / \Sigma_{1,2} \int_{V_2} \phi_1(r) dV \quad (49)$$

となる。このようにして，(37)，(38)，……，(41)式中に現われてくるパラメータは，実効的遅発中性子生成率

* 文献(8)を参照されたい。

を除いてすべて求められることになる。このような二組の取扱いでは、絶対的生成率を用いることができないので、他のなんらかのデータから推察するより仕方がない。しかし、即発中性子と遅発中性子の発生エネルギーを区別できるように高速中性子を組分けして扱うならば、遅発中性子の絶対的生成率を用いることができる。

ここで、 ω を用いて

$$S_{i,j} = S_{i,j} e^{\omega t} \quad (50)$$

$$C_{r,i} = C_{r,i} e^{\omega t} \quad (51)$$

と置くと、(37), (38)……, (41)式はそれぞれつぎのようになる。

$$l_{1,1}\omega S_{1,1} = \alpha_{1,1}^{2,1} S_{2,1} (1 - \beta_1) + \alpha_{1,1}^{2,2} (1 - \beta_1) S_{2,2} + \sum_{r=1}^N \lambda_r C_{r,1} - S_{1,1} \quad (52)$$

$$l_{2,1}\omega S_{2,1} = \alpha_{2,1}^{1,1} S_{1,1} + \alpha_{2,1}^{1,2} S_{1,2} - S_{2,1} \quad (53)$$

$$l_{1,2}\omega S_{1,2} = \alpha_{1,2}^{2,1} S_{2,1} (1 - \beta_2) + \alpha_{1,2}^{2,2} S_{2,2} (1 - \beta_2) + \sum_{r=1}^N \lambda_r C_{r,2} - S_{1,2} \quad (54)$$

$$l_{2,2}\omega S_{2,2} = \alpha_{2,2}^{1,1} S_{1,1} + \alpha_{2,2}^{1,2} S_{1,2} - S_{2,2} \quad (55)$$

$$\begin{vmatrix} -(1+l_{1,1}\omega) & \left\{ (1-\beta_1) + \sum_{r=1}^N \frac{\lambda_r \beta_{r,1}}{\omega + \lambda_r} \right\} \alpha_{1,1}^{2,1} & 0 & \left\{ (1-\beta_1) + \sum_{r=1}^N \frac{\lambda_r \beta_{r,1}}{\omega + \lambda_r} \right\} \alpha_{1,1}^{2,2} \\ \alpha_{2,1}^{1,1} & -(1+l_{2,1}\omega) & \alpha_{2,1}^{1,2} & 0 \\ 0 & \left\{ (1-\beta_2) + \sum_{r=1}^N \frac{\lambda_r \beta_{r,2}}{\omega + \lambda_r} \right\} \alpha_{1,2}^{2,1} & -(1+l_{1,2}\omega) & \left\{ (1-\beta_2) + \sum_{r=1}^N \frac{\lambda_r \beta_{r,2}}{\omega + \lambda_r} \right\} \alpha_{1,2}^{2,2} \\ \alpha_{2,2}^{1,1} & 0 & \alpha_{2,2}^{1,2} & -(1+l_{2,2}\omega) \end{vmatrix} = 0 \quad (57)$$

いま系の臨界からのへだたりが小さく、 $|\omega_0| \ll \lambda_r$

$$\begin{vmatrix} -(1+l_{1,1}\omega) & \left(1 - \omega \sum_{r=1}^N \frac{\beta_{r,1}}{\lambda_r}\right) \alpha_{1,1}^{2,1} & 0 & \left(1 - \omega \sum_{r=1}^N \frac{\beta_{r,1}}{\lambda_r}\right) \alpha_{1,1}^{2,2} \\ \alpha_{2,1}^{1,1} & -(1+l_{2,1}\omega) & \alpha_{2,1}^{1,2} & 0 \\ 0 & \left(1 - \omega \sum_{r=1}^N \frac{\beta_{r,2}}{\lambda_r}\right) \alpha_{1,2}^{2,1} & -(1+l_{1,2}\omega) & \left(1 - \omega \sum_{r=1}^N \frac{\beta_{r,2}}{\lambda_r}\right) \alpha_{1,2}^{2,2} \\ \alpha_{2,2}^{1,1} & 0 & \alpha_{2,2}^{1,2} & -(1+l_{2,2}\omega) \end{vmatrix} = 0 \quad (58)$$

となる。さらに(58)式で、 $l_{1,1}$, $l_{2,1}$, $l_{1,2}$, $l_{2,2}$ の値は、他のものに比して小さいので、これらを零とおいて近似することもできる。これは通常の In hour 式により、 $|\omega_0| \ll \lambda_i$ の場合、 $l=0$ として ω_0 の近似値を求める式に対応している。

II. あとがき

$$\omega C_{r,m} = \beta_{r,m} (\alpha_{1,m}^{2,1} S_{2,1} + \alpha_{1,m}^{2,2} S_{2,2}) - \lambda_r C_{r,m} \quad m=1, 2 \quad r=1, 2, \dots, N \quad (56)$$

以上の式は $S_{i,j}$ および $C_{r,m}$ についての、同次一次連立方程式であり、未知数の個数に等しい個数の ω_r と、それに対する $S_{i,j,i}$, $C_{r,m,i}$ がきまる。しかし、このすべてを有意なものとして採用することには問題がある。上述の近似は、 ω が充分小さい時に成立すること、および(52)~(56)式から決定される $S_{i,j,i}$ は、負の値をとる場合が生ずる可能性があることを考えれば、一応 steady period ω_0 のみを採用するのが安全であろう。 ω_0 に対しては物理的にいって $S_{i,j,0}$, $C_{r,m,0}$ はすべて正の値であるのは勿論であるが、一方、それらがすべて正であるものはただ1つであることが証明できる。(Appendix)

この ω_0 は $\nu_1/\nu_{1,c} = \nu_2/\nu_{2,c} > 1$ であれば正根であり、 < 1 であればいずれの λ_r よりも、その絶対値が小である負根である。ただし、 $\nu_{1,c}$, $\nu_{2,c}$ は擬臨界にした時の ν_1 , ν_2 の値である。

ω_0 を求める式は(56)式から、 $C_{r,m}$ を求めてこれを(52), (54)式に入れ、 $S_{i,j}$ の係数の作る行列式を零とおくことにより、つぎのとおり求められる。

($r=1, 2, \dots, N$) の場合を考えると(57)式は、

本報で記述した近似法は、系の臨界からのへだたりが小さい場合のみ適用できるものであるが、(23), (36), (57)式等は有用であろう。また(36), (57)式は一応 steady period を決定する式であると考えるのが安全であり、transient period については、将来残された問題である。

本報の結果は、系の臨界からのへだたりの小さい場

合、動特性に最も大きな影響を与える遅発中性子の取扱に関して、従来得られていた結果よりもさらに一歩を進めたものといえるであろう。また、結合パラメータについては、他に興味ある問題があるが、別の機会にゆずることとした。

(1961年 1月16日 受理)

[Appendix]

(52)～(56)式においては、 ω を除いては $S_{i,j}$, $C_{r,m}$ の係数はすべて正である(各式の右辺の最後の項はマイナス符号をとれば)ので、以下のようにして、 $S_{i,j}$, $C_{r,m}$ がすべて正であるような ω はただ1つであることが証明できる。

いま、このような ω が2個あったとして、それらを ω_0, ω_0' としそれらに対する $S_{i,j}$, $C_{r,m}$ を $S_{i,j,0}$, $C_{r,m,0}$ および $S_{i,j,0'}$, $C_{r,m,0'}$ としよう。まず、 $S_{i,j,0}/S_{i,j,0'} = R_{i,j}$ および $C_{r,m,0}/C_{r,m,0'} = R_{r,m}$ を求めてみる。つぎに $R_{i,j}$, $R_{r,m}$ の中で最大の値を1とする。例えば、 $R_{1,2}$ が最大の場合は $S_{1,2,0} = S_{1,2,0'}$ とする。このようにすると、他のすべてについては、 $S_{i,j,0} < S_{i,j,0'}$, $C_{r,m,0} < C_{r,m,0'}$ となる。ゆえに、(54)式を考えてみると、右辺の第1, 2, 3項の和は、ダッシュを付した場合の方が付さない場合よりも大きくなるので、(54)式がダッシュを付

した場合に成立するためには $\omega_0' > \omega_0$ とならねばならない。つぎに、 $R_{i,j}$, $R_{r,m}$ の中で最小の値を1とする。例えば、 $R_{2,2}$ が最小の場合 $S_{2,2,0} = S_{2,2,0'}$ とする。この場合、他のすべてについて $S_{i,j,0'} < S_{i,j,0}$, $C_{r,m,0'} < C_{r,m,0}$ となる。ゆえに (55) 式について考えてみると、右辺の第1, 2項の和は、ダッシュを付した場合の方が付さない場合よりも小さい。ゆえに、(55)式がダッシュを付した場合に成立するためには、 $\omega_0' < \omega_0$ となるはずである。このことは (54) 式が成立するための条件と矛盾する。

— 参 考 文 献 —

- (1) D. EMENDÖRFER : *Nukleonik*, **1**, 128, (1959).
- (2) J. LEWINS : *J. Nucl. Energy*, A **13**, 1, (1960).
- (3) J. LEWINS : *Nucl. Sci. Engng.*, **7**, 268, (1960).
- (4) L. A. VSSACHOFF : *A/Conf.*, P/656, (1955).
- (5) H. BROOKS : *KAPL-71*, (1948).
- (6) H. L. McMURRY : *AECD-3656*, (1952).
- (7) H. L. GARABEDIAN, P. VON HERRMAN : *J. Nucl. Energy*, A **10**, 36(1959).
- (8) R. AVERY : *A/Conf.*, P/1858, (1958).
- (9) A. M. WEINBERG, E. P. WIGNER : “*The Physical Theory of Neutron Chain Reactors*”, (1958), The Univ. of Chicago Press.
- (10) B. DAVISON : “*Neutron Transport Theory*”, (1957), Oxford Univ. Press.

投 稿 歓 迎

研究論文・資料のほか、会員の自由投稿欄として、談話室(1,600字1頁程度)・寄書(約2～3頁)・討論(約1～2頁)が設けられています。
会員各位のご意見、ご希望などお気軽にご投稿下さい。