研究論文

894. k - ϵ 乱流モデルを用いた有限要素法熱流動解析

奥田 洋司*, 矢川 元基*, 江口 譲**

(1988年 6月23日 受理)

*Finite Element Thermal Hydraulic Analysis Using k - ϵ Turbulence Model*By Hiroshi OKUDA,
Genki YAGAWA and Yuzuru EGUCHI

This paper describes a turbulent flow analysis technique that is suitable for three-dimensional large scale problems such as flows in the fast breeder reactors (FBR). The Navier-Stokes equations, the incompressible constraint, the energy conservation and the k - ϵ transport equations are discretized by the finite element method (FEM) using the rather low order elements, i.e. velocity piecewise trilinear-pressure piecewise constant elements. The coefficient matrices are evaluated by the one-point quadrature with hourglass controlling in order to reduce the computational storage and CPU cost. The velocity correction method is utilized as a time integration scheme where the incompressible constraint is converted into the Poisson equation for pressure. For verification of the developed technique, a turbulent flow over a two-dimensional backward facing step is solved and compared with the experiment. As the application to three-dimensional problems, turbulent flows in the upper plenum of the pool-type FBR are calculated, in particular, transient analysis of thermal flows at the trip of the reactor is carried out.

KEYWORDS: thermal-hydraulics, k - ϵ turbulence model, turbulent flow, finite element method, one-point quadrature, velocity correction method, flow over a backward facing step, pool-type FBR

1. 序

タンク型 FBR の上部プレナム部に見られるような複雑な流路の流動問題に対する解析手法としては有限要素法が有効である。ところが、実機レベルの条件を想定すると問題はかなり大規模なものとなり、乱流の考慮も必要となる。有限要素法は流体力学の分野においても有力な解析手法のひとつであるが、これまでは主に層流を中心として、要素、アルゴリズム等に関する種々の報告^①がなされてきた。本報では今後、実際の設計・開発の場への応用を考えるにあたって、乱流を考慮できしかも 3 次元の大規模な問題が手軽に取り扱える有限要素解析手法について報告する。

本手法では、乱流モデルとして k - ϵ モデル^②を採用

する。 k - ϵ モデルはいまなおモデル自身の検証、改良が盛んに行われてはいるが、他の乱流解析法 (LES, DNS 等^③) よりも低コストであり、種々の流れ場における計算経験が比較的豊富である。さらに、基礎方程式を空間方向に離散化の際には、Gresho^④により提唱された要素行列の 1 点積分法を k と ϵ の輸送方程式にも拡張して適用することにより、大幅に記憶容量、演算数の低減化を実現している。

1 点積分法は、江口^⑤により層流問題に対してその有効性が示されている。離散化後の非線形行列方程

* 東京大学工学部原子力工学科 (Dept. of Nucl. Eng., Fac. of Eng., Univ. of Tokyo)

** 熱電力中央研究所 (Central Res. Inst. of Elec. Power Ind.)

式の解法は、圧力のみを陰に扱う速度修正法(MAC法)⁽⁴⁾⁽⁵⁾に従っている。これらの手法により、3次元の大規模な問題を効率的に、十分な精度で解析することが可能となった。以下に、数値解析法の詳細、計算例として2次元後向きステップ流れ、タンク型FBRの上部プレナムを模擬した熱流動解析について述べる。

II. 数値解析法

1. 支配方程式・境界条件

Navier-Stokes 方程式(N-S 式)、連続の式およびエネルギー保存式において平均操作を施すと、対流項の非線形性のために Reynolds 応力と呼ばれる項が未知量として残る。この Reynolds 応力を等方的渦粘性性と平均速度勾配との積で表わすことにより、非圧縮性粘性流体の乱流場は以下の式で記述される。

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} + \{(\nu + \nu_t) u_{i,j}\}_{,j} + f_i \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (2)$$

$$\dot{T} + u_j T_{,j} = \left(\frac{\nu_t}{\sigma_T} + \alpha \right) T_{,j,j} \quad (3)$$

ここで、 u_i : i 方向流速成分($i=1, 2, 3$)

T : 温度, p : 圧力

ρ : 密度, ν : 動粘性係数

ν_t : 渦動粘性係数

α : 温度拡散係数

σ_T : 乱流プラントル数

f_i : 外力項

($\dot{}$), () $_{,i}$: それぞれ時間微分, i 方向偏微分を表わし、繰返し記号は総和規約に従うものとする。

乱流のモデル化には k - ε モデル⁽⁶⁾を採用する。すなわち、乱流場の基本的な統計量として k (乱流運動エネルギー) と ε (乱流運動エネルギー散逸率) を選ぶことにより、 ν_t を次元解析的に次の Prandtl-Kolmogorov 則で表わす。

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (4)$$

(1)~(4) 式は以下の k と ε の輸送方程式(k - ε 式)とともに閉じた方程式系をなす。

$$\dot{k} + u_j k_{,j} = \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} k_{,j} \right)_{,j} + \nu_t (u_{i,j} + u_{j,i}) u_{i,j} - \varepsilon \quad (5)$$

$$\dot{\varepsilon} + u_j \varepsilon_{,j} = \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_{,j} \right)_{,j} + C_1 \nu_t \frac{\varepsilon}{k} (u_{i,j} + u_{j,i}) u_{i,j} - C_2 \frac{\varepsilon^3}{k}$$

$$C_\mu = 0.09, \quad C_1 = 1.55, \quad C_2 = 1.92,$$

$$\sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad \sigma_T = 0.9 \quad (6)$$

なお、浮力については Boussinesq 近似が成り立つもの

としている。

以上の支配方程式に対する境界条件としては、基本境界条件、自然境界条件の2タイプを考える。

$$u_i = \hat{u}_i, \quad T = \hat{T}, \quad k = \hat{k}, \quad \varepsilon = \hat{\varepsilon} \quad \text{on } \Gamma_E \quad (7)$$

$$\tau_i = (\hat{\tau}_i), \quad q_i = (\hat{q}_i), \quad \frac{\partial k}{\partial n} = \left(\frac{\partial \hat{k}}{\partial n} \right), \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = \left(\frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial n} \right) \quad \text{on } \Gamma_N \quad (8)$$

ここで、 Γ_E , Γ_N : それぞれ基本境界条件、自然境界条件の与えられる境界

($\hat{}$): 既知量を表わす

q_i : 熱流束

τ_i は次式で定義される i 方向表面力成分である。

$$\tau_i = \left\{ -\frac{1}{\rho} p \delta_{ij} + (\nu + \nu_t) u_{i,j} \right\} n_j \quad (9)$$

ここで、 δ_{ij} , n_i はそれぞれ Kronecker のデルタ, Γ_N 上の外向き単位法線ベクトル成分を表わす。(7)と(8)式を適宜組み合わせることにより、流入境界、流出境界、対称面、壁面での境界条件が指定される。ただし、(5), (6) 式の k - ε モデルは分子粘性が無視できる高レイノルズ数領域を前提としており、壁面近傍に適用できないので、壁面における境界条件には以下の壁法則が取り込まれる。

$$\frac{u_s}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln E \frac{h u_*}{\nu} \quad \left(\frac{h u_*}{\nu} > 30, \quad \kappa = 0.42, \quad E = 9.0 \right) \quad (10)$$

ここで、 u_s : 壁面に沿った流速成分

h : 壁面からの距離

毎時間ステップで最新の u_s を用いて上式より摩擦速度 u_* を更新することにより、N-S 式に対しては

$$\tau_w = \rho u_*^2 \quad (11)$$

の関係式を用いて壁面からの応力を境界条件として与え、 k - ε 式に対しては粘性底層において乱流エネルギーの生成と消滅が釣り合うという仮定より得られる次式

$$k = u_*^2 / C_\mu^{1/2} \quad (12)$$

$$\varepsilon = u_*^3 / \kappa h \quad (13)$$

を用いて基本境界条件を与える。

2. 1点積分法を用いた有限要素法の適用

有限要素近似を適用するにあたり、まず支配方程式の重みつき残差式において、N-S 式の圧力勾配項、N-S 式、エネルギー保存式および k - ε 式の拡散項を部分積分することにより、以下の弱形式を導く。

$$\int_\Omega w^i \dot{u}_i d\Omega + \int_\Omega w^i u_{j,i} d\Omega - \int_\Omega w^i_{,j} p d\Omega + \int_\Omega w^i_{,j} (\nu + \nu_t) u_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma_N} w^i \hat{\tau}_i d\Omega \quad (14)$$

$$\int_{\Omega} w^i u_{i,j} d\Omega = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w^T \hat{T} d\Omega + \int_{\Omega} w^T u_{i,j} T_{i,j} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w^T \left(\frac{\nu_i}{\sigma_T} + \alpha \right) T_{i,j} d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_N} w^T \hat{q}_i d\Omega \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w^k \hat{k} d\Omega + \int_{\Omega} w^k u_{i,j} k_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} w^k \left(\frac{\nu_i}{\sigma_k} \right) k_{i,j} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} w^k \nu_i (u_{i,j} + u_{j,i}) u_{i,j} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w^k \varepsilon d\Omega = \int_{\Gamma_N} w^k \left(\frac{\nu_i}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\partial k}{\partial n} \right) d\Omega \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w^e \varepsilon d\Omega + \int_{\Omega} w^e u_{i,j} \varepsilon_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} w^e \left(\frac{\nu_i}{\sigma_e} \right) \varepsilon_{i,j} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} w^e C_1 \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) \nu_i (u_{i,j} + u_{j,i}) u_{i,j} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w^e C_2 \left(\frac{\varepsilon^2}{k} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_N} w^e \left(\frac{\nu_i}{\sigma_e} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \right) d\Omega \quad (18) \end{aligned}$$

ここで、 w^i, w^p, w^T, w^k, w^e : 重み関数

次に、Galerkin 有限要素法による空間方向の離散化を行う。混合内挿法⁽⁶⁾に基づき u_i, p を以下のように区分多項式に展開する。

$$\begin{aligned} u_i &= \Phi_{\alpha} u_{i\alpha} (\alpha=1, 2, \dots, NP), \\ p &= \Psi_{\varepsilon} p_{\varepsilon} (\varepsilon=1, 2, \dots, NE) \quad (19) \end{aligned}$$

ここで、 Φ_{α} : 節点 α に関する C^0 連続の区分 3 重線形基本関数

Ψ_{ε} : 要素 ε 上で 1, 他の要素でゼロの値をとる C^{-1} 連続の区分一定基本関数

要素形状の写像には Φ_{α} を用いる。NP, NE はそれぞれ全節点数, 全要素数である。ところで、この要素は混合法による定式化のもとで数値的安定条件である Babuska-Brezzi 条件⁽⁶⁾を満足していないが、ここではコーディング上の便宜、メッシュ作成の容易さを考えてこの要素タイプを選択した。また、後に述べる 1 点積分法は本来このような低次要素を前提としている。なお、 T, k, ε に関しては u_i と同じ基本関数を用いて次のように表わす。

$$T = \Phi_{\alpha} T_{\alpha}, \quad k = \Phi_{\alpha} k_{\alpha}, \quad \varepsilon = \Phi_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \quad (20)$$

重み関数についても同様の区分多項式に展開して以下のように表わす。

$$\begin{aligned} w^i &= \Phi_{\alpha} w_{\alpha}^i, \quad w^p = \Psi_{\varepsilon} w_{\varepsilon}^p, \quad w^T = \Phi_{\alpha} w_{\alpha}^T, \\ w^k &= \Phi_{\alpha} w_{\alpha}^k, \quad w^e = \Phi_{\alpha} w_{\alpha}^e \quad (21) \end{aligned}$$

(19)~(21) 式を (14)~(18) 式に代入し、 $w_{\alpha}^i, w_{\alpha}^p, w_{\alpha}^T, w_{\alpha}^k, w_{\alpha}^e$ の任意性を考慮することにより、次の有限要素行列方程式を得る。

$$M\dot{u} + Bu - Cp + D^u u = f \quad (22)$$

$$C^t u = 0 \quad (23)$$

$$M\dot{T} + BT + D^T T = f^T \quad (24)$$

$$M\dot{k} + Bk + D^k k + s^k = f^k \quad (25)$$

$$M\dot{\varepsilon} + B\varepsilon + D^e \varepsilon + s^e = f^e \quad (26)$$

ここで、 $u (=u_i), T, k, \varepsilon$: 各変数の節点量をすべて含む全体列ベクトル

p : すべての要素圧力値からなる列ベクトル

s : k - ε 式の生成・消滅項に相当する列ベクトル

f : 外力項に相当する列ベクトル

M, C, C^t, B, D : それぞれ、質量、勾配、発散、対流、拡散を表わす全体行列

行列 M, C, B, D , ベクトル s について、各要素 Ω^e からの寄与を以下に示す。

$$^e M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega^e} \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} d\Omega \quad (27)$$

$$^e C_{\alpha i} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_i} \Psi_{\varepsilon} d\Omega \quad (28)$$

$$^e B_{\alpha\beta} = \int_{\Omega^e} \Phi_{\alpha} (\Phi_{\beta} u_{i,j}) \frac{\partial \Phi_{\beta}}{\partial x_j} d\Omega \quad (29)$$

$$^e D_{\alpha\beta}^u = \int_{\Omega^e} (\nu_i + \nu_i) \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_{\beta}}{\partial x_j} d\Omega \quad (30)$$

$$^e S_{\alpha}^k = - \int_{\Omega^e} \Phi_{\alpha} [\nu_i (u_{i,j} + u_{j,i}) u_{i,j} - \varepsilon] d\Omega \quad (31)$$

D^T, D^k, D^e は D^u と同様であり、また s^e は s^k と同様であるため省略した。これらの積分計算は、通常の場合 8 点 ($2 \times 2 \times 2$ 点) の積分点を用いた Gauss-Legendre 数値積分によって行われるが、ここで、 B, D, s は毎時間ステップで作り直す必要があり、また 3 次元の大規模問題においてはすべての行列を記憶することは多大な負担となることに注意する。ここでは、記憶容量および (積分計算に要する) 演算数の低減化を優先して 1 点積分法を適用する。

まず、(28)~(31) 式を以下のように近似する。

$$^e C_{\alpha i} = \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_i} (0) Q^e \quad (28)'$$

$$^e B_{\alpha\beta} = \frac{1}{8} u_i (0) C_{\beta j} \quad (29)'$$

$$^e D_{\alpha\beta}^u = [\nu_i + \nu_i (0)] C_{\alpha j} C_{\beta j} / Q^e \quad (30)'$$

$$^e S_{\alpha}^k = - \frac{1}{8} (\nu_i (0) \bar{S} - \varepsilon (0)) Q^e \quad (31)'$$

$$\bar{S} = [C_{\beta j} u_{i\beta} + C_{\beta j} u_{j\beta}] C_{\gamma i} u_{i\gamma} / Q^e \quad (32)$$

ここで、 $\cdot (0)$ は要素中心における値を示す。上式からわかるように、1 点積分を仮定することにより B, D, S は、 C と要素体積ベクトル Q および u_i を使って計算することができるため、大幅な記憶容量の削減が可能となるほか、 k - ε モデルを導入したことによる特別な記憶容量も必要としなくなる。また、当然のこと

ながら積分計算に必要な演算数は1/8以下となり、CPU時間の低減化を図ることができる。さらに、(32)式の $\bar{S}$ の表記は生成項の要素上での平均化操作を意味するため、 k - ε 式の安定化⁽⁸⁾にも寄与することが期待される。

質量行列 M については、集中化⁽⁸⁾したのち、配列の大きさがNPの列ベクトルとして記憶しておく。

3. アワーグラス・コントローラの導出

拡散行列 D を1点積分すると、ゼロの固有値に相当するモード⁽⁴⁾⁽⁹⁾による解の空間的な振動(アワーグラス・モード)を引き起こす場合がある⁽⁹⁾。ここではアワーグラス・コントローラを要素のアスペクト比を考慮できる形で導出した。

まず、辺の長さが h_x, h_y, h_z の直方体要素を考える。等方的な拡散を仮定すると(簡単のため拡散係数を1とする)、拡散行列は座標軸に対する要素の傾きに依存せず、次のように厳密に計算することができる。

$$D^{exact}_{\alpha\beta} = \frac{h_x h_y h_z}{16} \left[\frac{1}{h_x^2} \xi_\alpha \xi_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) + \frac{1}{h_y^2} \eta_\alpha \eta_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) + \frac{1}{h_z^2} \zeta_\alpha \zeta_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \right] \quad (33)$$

ここで、 ξ, η, ζ : 局所系における節点 α の座標一方、1点積分を用いた場合、 ξ - η 間、 η - ζ 間、 ξ - ζ 間の相互作用が無視され、以下のように求められる。

$$D^{1P}_{\alpha\beta} = \frac{h_x h_y h_z}{16} \left[\frac{1}{h_x^2} \xi_\alpha \xi_\beta + \frac{1}{h_y^2} \eta_\alpha \eta_\beta + \frac{1}{h_z^2} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right] \quad (34)$$

(33)式から(34)式を差し引くと、1点積分を用いたことによる誤差が4個のモードを含む形で次のように表わされる。

$$\begin{aligned} & \frac{h_x h_y h_z}{144} \left\{ \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right\} \{H1\} \{H1\}^t \\ & + \frac{h_x h_y h_z}{48} \left\{ \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right\} \{H2\} \{H2\}^t \\ & + \frac{h_x h_y h_z}{48} \left\{ \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right\} \{H3\} \{H3\}^t \\ & + \frac{h_x h_y h_z}{48} \left\{ \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_z^2} \right\} \{H4\} \{H4\}^t \quad (35) \end{aligned}$$

ここで、 $\{H1\}, \{H2\}, \{H3\}, \{H4\}$ は以下に定義されるアワーグラス・モードベクトルであり、(34)式の行列に関しての固有値ゼロのモード(ゼロエネルギー・

モード)に相当する。

$$\begin{aligned} \{H1\} &= (-1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1)^t \\ \{H2\} &= (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1)^t \\ \{H3\} &= (1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1)^t \\ \{H4\} &= (1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1)^t \end{aligned} \quad (36)$$

ここでは、(35)式をアワーグラス・コントローラとして1点積分で求めた拡散行列に加え込むことにより、モードの発生を抑えている。この方法は、要素形状が直方体の場合には厳密積分による結果と等価であり、モードのダンピング係数にあいまいさを残したGreshoらの方法⁽⁴⁾に比べ、要素のアスペクト比を考慮できるという点で合理的である。

4. 時間進行法

(22)~(26)式は速度修正法(MAC法)⁽⁴⁾⁽⁵⁾に基づく時間積分を行う。まず(21), (22)式において u_i を陽、 p を陰に離散化し、次のように表わす。

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t M^{-1} (C p^{n+1} - A u^n) \quad (37)$$

$$C^t u^{n+1} = 0 \quad (38)$$

ここで、 $A = B + D^u$ とした。

まず、(37)式で $p^{n+1} = p^*$, $u^{n+1} = \bar{u}$ とした式を考える。

$$\bar{u} = u^n + \Delta t M^{-1} (C p^n - A u^n) \quad (39)$$

(39)式より得られる流速の中間値 $\bar{u}$ は連続の式を満足しない。(37)式から(39)式を差し引き、整理すると

$$u^{n+1} - \bar{u} = \Delta t M^{-1} C p^* \quad (40)$$

$$\text{ここで、} \quad p^{n+1} = p^* + p^* \quad (41)$$

である。(40)式の発散をとり(両辺に C をかけ)、(38)式を考慮すると、圧力の補正量を求める式が次のように得られる。

$$C^t M^{-1} C p^* = - \frac{1}{\Delta t} C^t \bar{u} \quad (42)$$

ここで、 $C^t M^{-1} C$ は対称正定値の疎行列であり、離散化されたラプラシアンに相当する。なお、質量行列 M は集中化により対角化されているので、その逆行列を求めるのは容易である。(42)式を共役勾配法で解き p^* を求め、次に(37), (41)式によってそれぞれ流速、圧力の時刻が進められる。

なお、(22), (24)~(26)式において、対流項を陽に時間積分することによって導入される負の粘性を補償するために、拡散行列 D を計算するときに、一種の流線上流法である $(\Delta t/2) u_i u_j$ の形のテンソル型人工粘性を加えている。

Ⅲ. 解析結果

1. 2次元後向きステップ流れ

本手法を用いて、Kimら⁽¹¹⁾の2次元後向きステップ乱流の実験をシミュレートした。流体は空気であり、 ρ, ν は20℃、1気圧の乾燥空気のものを用いた。Fig.1(a)に、解析対象および境界条件を示す。ステップ幅 h に対し、入口境界、出口境界をステップ位置よりそれぞれ $4h$ 上流側、 $21h$ 下流側に設けた。また、壁境界は壁法則を適用するために実際の壁より $\Delta h(=h/30=1.27\text{ mm})$ 流体寄りの位置に設定した。実験⁽¹¹⁾では入口境界の位置における境界層の排除厚さが 1.04 mm であり、 Δh の幅に収まるため、入口境界では境界条件として主流速度 U を一樣に与えた。また k_{in}, ϵ_{in} は次の式より算出した。

$$k_{in} = \frac{3}{2} I^2 U_{in}^2 (I=0.015) \quad (39)$$

$$\epsilon_{in} = \frac{k_{in}^{3/2}}{l_{in}} \quad (l_{in} = C\delta_{in}, C=0.09, \delta_{in}=h) \quad (40)$$

出口境界では流れが十分に発達しているという境界条件を用い、また壁境界では壁法則を適用した。

Fig.1(b)に要素分割を示す。節点数2,557、要素数2,442であり、助走区間、壁近傍、剥離点近傍に細かい要素を配置してある。本プログラムは3次元問題用にコーディングされているため、実際には y 方向(紙面垂直方向)に1要素設け、 y 方向の対称性を考慮して

2次元解析を行なっている。したがって、計算上の節点数は5,114となっている。計算は、 $\nu_t=10^2\nu$ 、壁面摩擦なしの条件で層流解を求め、それを出発値として乱流計算を行なった。乱流計算のシミュレーション時間は $3.5 \times 10^{-2}\text{ s}$ であるが、これは計算結果がほぼ定常に達したと判断したためである。また、時間ステップには主に $1.0 \times 10^{-5}\text{ s}$ を用いた。CPU時間はHITAC-M682で時間ステップあたり平均5.1s、合計約3hを要した。

Fig.2に、得られた流速分布を示す。表示の都合上、 x 方向に関して2メッシュごとに表示してある。ステップ流れに対して標準の $k-\epsilon$ モデルを用いると再循環領域の長さ x_R/h は低めに見積られるとされているが⁽¹²⁾⁻⁽¹⁴⁾、ここで得られた値は7.19であり、実験値 7 ± 1 のゆらぎの範囲内の値である。再付着後、十分下流では平板間の発達した流れに近い分布が得られている。

Fig.3(a)~(f)に、それぞれ $x/h=1.33, 2.67, 5.33, 6.22, 7.11, 16.0$ における x 方向無次元流速分布を実験値と比較して示す。再循環領域に比べ再付着点付近は流速の傾きの違いが目立ち、計算値の方が見かけ上、粘性の低い流れとなっている。しかしながら、実験では再付着点付近の時間的な不安定性が特に強く、瞬時的には3次元構造をとることも示唆されており、Fig.3(d),(e)程度のズレは容認できるものと考えられる。Fig.4に、 k の等値線分布を示す。ステップ直後のセ

Fig. 1(a), (b) Two-dimensional backward facing step

Fig. 3(a)~(f) Velocity profiles of calculation and experiment⁽¹¹⁾ Fig. 4 Distributions of turbulence energy (k)

ん断層から再循環領域にかけて k の高い領域が存在する。

Fig. 5 (a)~(f) に、それぞれ $x/h=0.24, 0.42, 1.0, 2.33, 4.11, 6.78$ での k の z 方向変化を示す。ステップ

直後(Fig. 5 (a), (b))に見られる k のピークは実験的には検証されていないが、 k - ϵ モデルを用いた種々の計算⁽⁸⁾⁽¹³⁾ではその存在が知られている。Fig. 5 (c)~(f) の実験値について、文献(11)では $\overline{w'}$ の量が報告されてい

Fig. 5(a)~(f) Profiles of k of calculation and experiment⁽¹¹⁾

ないためここでは便宜上 $k=1/2(\overline{u'^2}+\overline{v'^2})$ として算出した。Fig. 5(c)~(f)は文献(11)より $k=1/2(\overline{u'^2}+\overline{v'^2})$ として算出した。 k のピーク値や分布形状について計算値と実験値とはほぼ一致している。仮に $\overline{w'}$ が $\overline{v'}$ に対して同程度のオーダーであるとして $k=1/2(\overline{u'^2}+\overline{v'^2} \times 2)$ により実験値を評価すると、Fig. 5(c)~(f)に見られる実験値と計算値との差は、さらに小さくなる。次に ε と ν_t の等値線分布をそれぞれ Fig. 6, 7 に示す。 k - ε 式はステップ直後に鋭いピークを示し、流れに沿って急速に減衰する。

2. タンク型FBR上部プレナム内熱流動解析

タンク型FBR上部プレナムの1/10縮小模型における流動実験⁽¹³⁾のシミュレーションを行なった。6基の中間熱交換器(IHX)と4基のポンプをもつタンク型FBRの上部プレナムを、対称性を考慮して90°部分のみを取り出し解析する。Fig. 8に用いた要素分割を示す。主容器半径、炉心出口半径およびNa液面高さはそれぞれ10.5, 1.6, 6.0 mであり、IHXにはプレナム底部から4.0 mの高さの位置に吸込み口(流体出口)を模擬したスリットを設けてある。流体は炉心出口から炉

Fig. 6 Distributions of turbulence energy dissipation rate (ϵ) Fig. 7 Distributions of eddy viscosity (ν_t)

Fig. 8 Upper plenum of pool-type FBR; finite element mesh

内上部構造物 (UIS) に向かって流入しプレナム内を横断した後、IHX のスリット状の吸込み口より流出する。なお、この要素分割は 6,413 要素、8,059 節点からなっているが、ここで必要とされる記憶容量は倍精度計算で約 3.1 MB である。

(1) 定常/等温流解析

熱過渡計算に先立ち、Table 1 の境界条件のもとに等温流の定常状態を求めた。物性値は液体 Na のものを用いた。このときのレイノルズ数は、炉心出口流速と炉心出口直径を代表値にとると 3.2×10^6 となり、実機と同じオーダーである。

Table 1 にあるように、ここでの壁面速度境界条件

Table 1 Boundary conditions of upper plenum of pool-type FBR

Core-outlet	$u_z = 1.0 \text{ m/s}$, $u_x = u_y = 0$ $k = 1.50 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}^2$ $\epsilon = 1.53 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}^3$
IHX-inlet	$\tau_i = 0$ $\partial k / \partial n = 0$ $\partial \epsilon / \partial n = 0$
Wall boundary	$u_i = 0$ $\partial k / \partial n = 0$ $\epsilon = C^{3/4} k^{3/2} / \kappa h$
Fluid upper surface	Symmetrical condition $\partial / \partial n = 0$
xy-plane, yz-plane	Symmetrical condition $\partial / \partial n = 0$

には、すべりなしの条件を用いている。その理由は、(1)対数則は平板の単純なせん断流を前提としている⁽¹⁶⁾、(2)3次元的に傾いた面上においては、対数則から導かれるせん断応力を境界条件として取り込むことが困難、(3)村上ら⁽¹⁷⁾の壁面境界条件に関する診断によれば、 k と ϵ について Table 1 の境界条件を用いると速度の境界条件は流れの状況に大きな影響を及ぼさない、等である。

Fig. 9 (a), (b)に、それぞれ IHX を XY 面に垂直に横切る面における流速、乱流運動エネルギー k の分布を示す。炉心からの流体は UIS に衝突した後、xy 平面に対して約 30° の角度でプレナム内に流入し、1対の互いに逆向きの渦を生じる。また、IHX 上のプレナム底部から 1.77 m の高さ付近で流体はよどむ。この速度分布は実験⁽¹⁵⁾と定性的に一致しているが、炉心出口における k と ϵ の境界条件の選定によっては、副渦の大きさが 1.5~2 倍程度変化する場合があった⁽¹⁸⁾ことを付記する。 k は UIS 頂部および IHX 吸込み口において、速度勾配にともなう k の鋭いピークが見られる。

(a) Velocity vectors

(b) Distributions of turbulence energy (k)

Fig. 9(a), (b) Steady state of isothermal flow

(2) 原子炉トリップを模擬した熱過渡解析

原子炉がトリップすると炉心熱出力は定格運転時の数%にまで急激に低下するため、冷たいNaが高温の上部プレナム内に直接流入してポンプ、IHXなどの構造材に熱衝撃を与える可能性がある。また、流入する低温Naの運動量が、負方向の浮力にうち勝てない場合には高温Naと低温Naの混合した領域と、混合からとり残された成層化した領域との間に急峻な温度勾配を生じ、構造材に大きな熱応力を与える可能性がある。さらに、温度成層界面のゆらぎや界面上昇は、クリープ疲労損傷/ラチェットひずみの累積、付加的な熱衝撃の原因となる可能性がある。

そこで、前節の結果(定格運転状態, 510℃一様)を初期条件とし、時刻 $t=0$ sで炉心出口温度、炉心出口流速をそれぞれ

$$T=510^{\circ}\text{C} \rightarrow 355^{\circ}\text{C}$$

$$u_s=1.0\text{ m/s} \rightarrow 0.226\text{ m/s}$$

にステップ状に変化させることにより原子炉のトリップを想定した熱流動解析を行なった。この他の条件として $g=-9.8\text{ m/s}^2$, $\beta=2.77 \times 10^{-4}/^{\circ}\text{C}$ (g : z 方向重力加速度, β : 体膨脹係数)とすることにより、温度成層化を支配する無次元パラメータであるレイノルズ数(Re)とリチャードソン数(Ri)を実機とほぼ等しくした(Table 2)。炉心出口部を除く境界条件はTable 1と同様であり、温度に関しては断熱とした。

Fig. 10(a)~(d)にトリップ後5, 10, 20, 40 sにおけるプレナム内の温度分布および流速分布を示す。図中、等温線の間隔は 10°C である。原子炉のトリップに

Table 2 Non-dimensional parameters at trip of reactor

	Steady state		Trip	
	Re	Fr	Re	Ri
Practical plant ⁽¹⁵⁾	8.5×10^6	0.29	1.2×10^6	13.1
Calculation	3.2×10^6	0.25	0.7×10^6	13.2

より炉心から冷たいNaが流入してくるが、トリップ直後(5 s, Fig. 10(a))では低温Naはまだプレナム内部へ達しておらず、速度分布も定常時の様子とあまり変わらない。10 s後(Fig. 10(b))には、炉心からの流れにそって低温Naが次第に高温Na内に広がるため、浮力効果でUIS壁付近の下降流が顕著となりプレナム底部の副渦をIHXの方へ押し込むような形で小さくしているのがわかる。流入してくる低温Naの運動量よりもこの負の向きの浮力が卓越しているため、20 s後(Fig. 10(c))には副渦はほとんど消滅して大きな1つの循環流を形成する。低温Naは、界面の高さがほぼ一定のままプレナム底部に沿うように広がり、そして40 s後(Fig. 10(d))にはプレナム底部にたまって界面が形成され始める。そのとき流れは、 z 方向に縦長の2個の循環流と θ 方向の流れとからなる複雑な分布を示している。なおトリップ後40 sの時点では温度成層界面の上昇はまだ観察されていない。

本例題の計算には、圧力ポアソン式のソルバーである共役勾配法の反復回数(収束判定条件 $|\text{div } u| < 1.0 \times 10^{-8}$, 打ち切り反復数=200回)に応じ、HITAC-M682を用いて7~31 s/time stepを要した。 Δt は $0.005 \sim 0.1$ sを用いた。

Fig. 10(a)~(d) Thermal hydraulics at trip of reactor; Velocity vectors and temperature distributions

Ⅳ. おわりに

すべての係数行列に対して1点積分を適用した大規模問題の向けの有限要素法乱流解析コードを開発し

た。本手法により、数メガバイトの記憶容量をもつコンピュータがあれば、従来の有限要素法では対処することのできなかったような大規模な問題を取り扱うことができる。

Fig. 10(d) 40 s

1点積分法は記憶容量の低減化を優先させた手法ではあるが、アワーグラスコントローラの導入により2次元後向きステップ流れの解析において十分な精度が得られることが検証された。

また、実際のな大規模な問題への適用例として、原子炉トリップを想定したFBR上部プレナム内の熱流動解析を行なった。その結果プレナム内の液体Naの流動、温度成層界面の形成をシミュレートすることができた。今後、コストダウン(原子炉トリップ時の流量低下)の模擬精度の向上、浮力効果の卓越した非等方的な流れ場における乱流モデルの適用性、壁面境界条件などの検討をさらに進める必要がある。

—参考文献—

- (1) 例えば, GALLAGHER, R.H., *et al.* (ed.): "Finite Elements in Fluids", Vol. 6, (1985).
- (2) LAUNDER B.E., SPALDING, D.B.: "Mathematical Models of Turbulence", (1972), Academic Press.
- (3) 例えば, "生産研究", 40(1), (1988).
- (4) GRESHO, P.M., *et al.*: A modified finite element method for solving the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations, Part 1; Theory, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 4, 557~598 (1984).
- (5) DONEA, J. *et al.*: Finite element solution of the unsteady Navier-Stokes equations by a fractional step method, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 30, 53~73 (1982).
- (6) SANI, R.L., *et al.*: The cause and cure(?) of the spurious pressures generated by certain FEM solutions of the incompressible Navier-Stokes equations: Part 1, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 1, 17~43 (1981).
- (7) 江口 謙, 矢川元基: 原子力誌, 30(1), 77~86 (1988).
- (8) SMITH, R.M.: On the finite-element calculation of turbulent flow using the $k-\epsilon$ model, *ibid.*, 4, 303~319 (1984).
- (9) FLANAGAN, D.P., BELYTSCHKO, T.: A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control, *ibid.*, 17, 679~706 (1981).
- (10) 奥田洋司, 他, 機 論B, 54(498), 337~344 (1988).
- (11) KIM, J. *et al.*: Investigation of a reattaching turbulent shear layer; Flow over a backward-facing step, *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, 102, 302~308 (1980).
- (12) TALYOR, C., *et al.*: Modelling flow over a backward-facing step using the F.E.M. and the two-equation model of turbulence, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 1, 295~304 (1981).
- (13) BETTS, P.L., HAROUTUNIAN, V.: $k-\epsilon$ modelling of turbulent flow over a backward facing by a finite element method with finite volume solutions and experiment, *Proc. Int. Conf. Numer. Meth. Laminar and Turbulent Flow*, p. 574~585 (1985).
- (14) AUTRET, A., *et al.*: Finite element computation of a turbulent flow over a two-dimensional backward-facing step, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 7, 89~102 (1987).
- (15) 電研報告, 総合報告: A01, タンク型FBR フィージビリティ・スタディ最終報告書, (1984).
- (16) LAUNDER, B.E.: Numerical computation of convective heat transfer in complex turbulent flows; Time to abandon wall functions?, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 27(9), 1485~1491 (1984).
- (17) 村上周二, 他: 建築学会関東支部研報, p. 149 (1985).