研究論文

914. 陰解法に基づく流れの数値解法における 反復解法の収束性

富山明男*, 高橋亮一**

(1989年 2月6日 受理)

Convergency of Iterative Methods for Implicit Solution Schemes of Fluid Flows

By Akio TOMIYAMA and Ryoichi TAKAHASHI

Implicit difference schemes have been regarded as unconditionally stable methods. Iterative methods are however usually adopted to solve simultaneous equations resulting from the implicit schemes. If the iteration fails to converge, the unconditional stability cannot be obtained in practice. In the present study, convergency of the iterative methods for the implicit schemes with space-centered differencing was examined.

First, the convergency of linear iterative methods for the linear transport equation was analyzed with the spectral radius of the iteration matrix. This showed that the iteration diverges unless the Courant number less than about unity.

Next, numerical experiments were conducted to check the convergency of four iterative methods for the solution of the nonlinear simultaneous equation derived from Burgers' equation. It was confirmed that the iterative methods break the unconditional stability of the implicit scheme, except for the case that the direct methods are applied to solve the linearized equation obtained by the Newton method.

Lastly, the shock tube problem was solved using the four iterative methods. As a result, the unconditional stability could not be obtained. This experiment confirmed that the convergency is subject to the Courant condition, the Courant-Friedricks-Levy condition or the degree of discontinuity in state variables.

KEYWORDS: *Burgers equation, convergence, Courant number, discontinuity, implicit difference scheme, iterative method, simultaneous equation, linear transport equation, numerical experiment, shock tube problems, spectral radius, unconditional stability*

1. 緒 言

熱流体力学的現象を精度良く、かつ効率的に予測するために、差分スキームの改良が精力的に行われている。特に、数値計算の大規模化が進むにつれ、空間メッシュ数が数万以上の計算も行われるようになり、計算機の負担は増大する傾向にある。この負担の軽減を目的として、時間刻み幅 Δt を大きく取れるような差分スキームの開発が進められている。このことは、高速気体流や気液二相流のような圧縮性流れの解析におい

て特に重要である。圧縮性流れでは、状態量の微小変動が音速 a で伝播する。したがって、通常の陽な差分スキームでは、数値的に安定な計算のための Δt に対する制約(CFL条件)は、

$$\Delta t \leq \Delta x / (a + u)$$

ここで、 u : 最大流速、 Δx : 空間刻み幅となる。一方、非圧縮性流れの場合は、クーラン条件

* 神戸大学工学部 (Fac. of Eng., Kobe Univ.)

** 東京工業大学原子炉工学研究所 (Res. Lab. for Nucl. Reactors, Tokyo Inst. of Technol.)

$$\Delta t \leq \Delta x / u$$

で規制される⁽¹⁾。一般に音速は流体速度に比べて大きいので、圧縮性流れの差分解析法に使用できる Δt は小さく、計算は長時間を要する。このためCFL条件の制約を受けない差分スキームの開発は早くから行われており、ICE法⁽²⁾に代表される半陰解法、無条件安定な完全陰解法などが考察されている。

ところで、半陰解法や完全陰解法を用いる場合、新しい時刻の解を求めるには連立方程式、あるいは非線形連立方程式の解法が必要となる。これらの方程式の解法は、解を効率的に求めるための鍵といえる。従来、連立方程式の解法自体は数多く検討されているが、流れ解析と組み合わせる場合の考察はほとんど行われていない⁽³⁾⁽⁴⁾。陰解法を用いる流れ解析コードの多くは、連立方程式を反復法で解く⁽⁵⁾。したがって、差分スキーム自体が無条件安定であっても、これを解く反復法の収束が保証されなければ、現実には無条件安定とはいえない。例えば、ICE法では線形安定性解析が許容するほど大きな Δt は使用できず、CFL条件をわずかに越える程度であった⁽²⁾。この原因の一つに反復の未収束が考えられる。

本研究の目的は、上記の視点から陰解法を見直すことにある。すなわち、陰に定式化された差分スキームに及ぼす反復解法の影響を基本的な例題を通して調べる。以下、第II章では線形移動方程式を対象に陰解法に線形反復法を組み合わせた場合の特性について、第III章ではBurgers方程式を用いて完全陰解法にNewton法系統の反復解法を組み合わせた場合について考察する。第IV章では非粘性圧縮性流体の衝撃波管問題を通して完全陰解法の効率を検討する。空間微分項の離散化には多くの方法が考えられるが、本報では中心差分法に限定して陰解法における反復解法の収束性を考察する。

II. 線形移動方程式

1. 準備

本章では、流れ解析の安定性考察の基礎式である1次元線形移動方程式⁽¹⁾

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (u, \alpha \geq 0 \text{ の定数}) \quad (1)$$

を対象とする。上式を第1図に示すメッシュ上で陰に中心差分化すると次式を得る。

$$f_i^{n+1} - f_i^n + \frac{c}{2} (f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}) = d(f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}) \quad (2)$$

ここで、添字 i は位置 $x = i\Delta x$ 、 n は時刻 $t = n\Delta t$ 、

c はクーラン数、 d は拡散数で次式で定義される。

$$c = \frac{u\Delta t}{\Delta x}, \quad d = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \quad (3)$$

第1図 1次元メッシュ

(2)式は、非圧縮性流れ解析で速度場を求めた後で行う、熱や乱流エネルギーの輸送計算の特性を十分表現している。また、ナビエ・ストークス式の対流項を半陰解法で、

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_i^n \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$

と近似する場合に相当する。

(2)式にNeumannの安定性解析⁽⁶⁾を行うと、増幅係数 G は

$$|G|^2 = [1 + 2d(1 - \cos\theta)]^2 + c^2 \sin^2\theta^{-1}$$

となり、 $c \geq 0$ 、 $d \geq 0$ で安定条件 $G \leq 1$ を満足し、差分スキームの安定性のみを考えれば無条件安定である。しかし、(2)式から時刻 $(n+1)$ の解を求めるには連立方程式を解く必要がある。従来、多くのコードはSOR法等の線形反復法を解法に用いている。この反復が収束しなければ、解を得ることはできない。したがって、反復の収束条件を明確に把握しておく必要がある。

以下、問題を拡散問題、対流問題、対流と拡散を含む問題に分けて調べる。境界条件は、流れ解析で頻繁に使用されるDirichlet問題と混合問題を考え、境界条件の影響も同時に調べる。

2. 拡散問題

(2)式で $c=0$ とおくと拡散問題となる。Jacobi法を用いて連立方程式を解く場合、反復式は k を反復段数として次式で表わせる。

$$f_i^{k+1} = \frac{d}{1+2d} (f_{i-1}^k + f_{i+1}^k) + \frac{1}{1+2d} f_i^k \quad (4)$$

Dirichlet問題の場合は、反復が常に収束することが知られている⁽⁶⁾ が、後の議論のため取り上げておく。境界条件は、両端で f の値を固定するDirichlet条件

$$f_0, f_{IM} = \text{const.} \quad (5)$$

である。したがって、三重対角行列の固有値の公式⁽⁶⁾ からJacobi反復行列のスペクトル半径 ρ_J は、

$$\rho_J = \frac{2d}{1+2d} \cos\left(\frac{\pi}{IM}\right) \quad (6)$$

となり、任意の d で反復収束条件 $\rho_J < 1$ を満足する ([付録]参照)。

混合問題の境界条件は次式で表わせる。

$$f_0 = \text{const.}, \quad f_{IM+1}^{k+1} = f_{IM-1}^{k+1}$$

前報⁷⁾で示したように、仮想点 f_{IM+1} を用いて Neumann 条件を設定した場合の ρ_J は、ちょうど 2 倍のノード数を持つ Dirichlet 問題の ρ_J に一致する。したがって、

$$\rho_J = \frac{2d}{1+2d} \cos\left(\frac{\pi}{2IM}\right) \quad (7)$$

となり、混合問題でも反復収束が常に保証される。

以上の結果は、陽な対流項がある場合、すなわち

$$\begin{aligned} f_i^{k+1} - f_i^k + \frac{c}{2}(f_{i+1}^k - f_{i-1}^k) \\ = d(f_{i+1}^{k+1} - 2f_i^{k+1} + f_{i-1}^{k+1}) \end{aligned} \quad (8)$$

にもあてはまる。ただし、 $c \leq 1$ の制約も安定性から付加される。

3. 対流問題

本節では、(2)式で $d=0$ とした、純粋対流問題を検討する。この場合、Jacobi の反復式は次式となる。

$$f_i^{k+1} = -\frac{c}{2}(f_{i+1}^k - f_{i-1}^k) + f_i^k \quad (9)$$

Dirichlet 問題では、三重対角行列の固有値の公式より、

$$\rho_J = c \cos\left(\frac{\pi}{IM}\right)$$

を得る。したがって、反復収束条件 $\rho_J < 1$ より c は次式を満たす必要がある。

$$c < \frac{1}{\cos(\pi/IM)} \quad (10)$$

次に混合問題を考える。対流問題では、仮想点を用いた Neumann 条件を使用すると流出境界が内点と無関係になる。そこで、内点から境界値を外挿する条件

$$f_{IM+1}^{k+1} = f_{IM-1}^{k+1} \quad (11)$$

を Neumann 条件として用いる。これより、境界 $i=IM$ での Jacobi 反復式は

$$f_{IM+1}^{k+1} = \frac{c}{2+c} f_{IM-2}^k + \frac{2}{2+c} f_{IM-1}^k \quad (12)$$

となる。(9)、(12)式からなる反復式のスペクトル半径は解析的に求められない。そこで推定を試みる。

まず $S=c/2$ とおくと、 $IM=3$ の場合の固有方程式は、 $\lambda^2 + S^2/(1+S) = 0$ となる。したがって、 $\rho_J = S/\sqrt{1+S}$ となり、これから収束条件 $\rho_J < 1$ を求めると $c < 1 + \sqrt{5}$ となる。Dirichlet 問題の(10)式を参考にして、

$$c < 1 + \sqrt{5} = \frac{1}{\cos(\pi/q)} \quad (13)$$

として q を求めると $q=2.5$ となる。同様にして、 $IM=4$ の場合 $q=3.5$ が得られる。これから、混合問題の収

束条件は

$$c < \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{IM-0.5}\right)} \quad (14)$$

と推定できる。上式が任意の IM で成立することは、数値実験で確認した。

以上、無条件安定な陰解法を用いてもこれを解くために線形反復法を用いると、反復収束の点からクラン数には(10)あるいは(14)式の制約が加わることがわかった。第2図には、反復収束可能な最大クラン数 $c_{\max}$ とノード数の関係を示す。ノード数が10程度で $c < 1$ の制約が課されることがわかる。

第2図 対流方程式の $c_{\max}$

4. 対流・拡散問題

対流と拡散を含む(2)式の Jacobi 反復式は、

$$\begin{aligned} f_i^{k+1} = \frac{d}{1+2d} \left\{ \left(d + \frac{c}{2} \right) f_{i-1}^k \right. \\ \left. + \left(d - \frac{c}{2} \right) f_{i+1}^k \right\} + \frac{1}{1+2d} f_i^k \end{aligned} \quad (15)$$

となる。したがって、Dirichlet 問題の ρ_J は

$$\rho_J = \frac{\sqrt{4d^2 - c^2}}{1+2d} \cos\left(\frac{\pi}{IM}\right) \quad (16)$$

となる。反復収束は d, c, IM の3つのパラメータに支配されているが、 $IM=20$ 程度で $\cos(\pi/IM) \div 1$ なので、実用性の観点から $\cos(\pi/IM) = 1$ とみなし、 d, c が満足すべき関係を求めると、 $\rho_J < 1$ より

$$c < \sqrt{1+4d+8d^2} \quad (17)$$

を得る。第3図に (c, d) 平面上で、反復の発散領域を斜線で示す。図中の破線は、セルレイノルズ数 Re_c ($\equiv c/d$) が2の位置を示している。これより、発散領域は、 $Re_c > 2$ の領域にあることがわかる。したがって、拡散が支配的な問題のみに陰解法が適していることがわかる。

混合問題の ρ_J は解析的に求められない。しかし、拡

第3図 移動方程式のDirichlet問題における反復収束領域

第4図 移動方程式の混合問題における反復収束領域

散問題, 対流問題では, 境界条件による固有値の差は $\cos \theta$ の θ のみに表われ, ノード数の増加に伴いこの差は小さくなっていった。そこで, $IM=30$ として, 数値実験的に反復の収束を調べた。結果を第4図に示す。図よりDirichlet問題とはほぼ同一の収束領域を持つことがわかる。したがって, 混合問題でも(17)式が収束条件とみなせよう。

第1表に, 空間微分項を中心差分で近似した線形移動方程式に対して得られた結果を整理した。本考察よ

り, 温度場の計算等に陰解法を用いても, 線形反復法で解を求めるならば $c < 1$ の制約が現れ, 結果として陽解法と同じ dt しか取れないこと, 境界条件による収束領域の差は少ないことがわかった。これより, 陰解法では反復計算に多くの時間を費やすので陽解法より計算効率が劣るといえる。また, 陰解法の無条件安定性を実現するには, 直接法あるいはそれに類する方法で連立方程式を解く必要がある。

第1表 陰解法と線形反復法を組み合わせた解法の制約条件

問 題	差 分 法		安定条件	境界条件	反復収束条件
	対流項	拡散項			
拡 散	—	陰	無条件	Dirichlet問題	無条件
				混合問題	
対 流	陰	—	無条件	Dirichlet問題	$c < \cos(\pi/IM)$
				混合問題	$c < \cos(\pi/[IM-0.5])$
対流と 拡散	陽	陰	$c < 1$	Dirichlet問題	無条件
				混合問題	
	陰	陽	$d < 1/2$	Dirichlet問題	$c < \cos(\pi/IM)$
				混合問題	$c < \cos(\pi/[IM-0.5])$
	陰	陰	無条件	Dirichlet問題	$c < \sqrt{1+4d+8d^2}$
				混合問題	

以上の結果は, 空間微分項に中心差分法を用いた場合のみ適用できることを注意しておく。例えば, 対流項に風上差分法を用いるならば, 線形反復法は任意のクーラン数で収束することを示せる。陰解法に組み合わせて使用する個々の空間差分法について, 以上のような考察を積み重ねていくことが, 数値解法の選択や得られた計算結果の安定性や収束特性を理解する上で重要と考える。

II. Burgers 方程式

本章では, 非線形性を含む最も基本的な例として, 非粘性の Burgers 方程式,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

における反復法の収束を考察する。上式を完全陰解法で差分化すると次式を得る。

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} + u_i^{n+1} \frac{u_i^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad (19)$$

上式は、 u^{n+1} に関して 2 次の項を含む非線形連立方程式を構成している。非線形連立方程式の数値解法は幾つも考察されているが、流体解析では Newton 法系統の解法が最も多く使用されている。そこで、Newton 法により線形化すると次式を得る。

$$L_i^k \delta u_{i-1}^k + D_i^k \delta u_i^k + U_i^k \delta u_{i+1}^k = -f_i^k \quad (20)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \delta u_i^k &= u_i^{k+1} - u_i^k, \quad L_i^k = -\frac{u_i^k}{2\Delta x}, \\ D_i^k &= \frac{1}{\Delta t} + \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2\Delta x}, \quad U_i^k = -\frac{u_i^k}{2\Delta x}, \\ f_i^k &= \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{\Delta t} + u_i^k \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2\Delta x}. \end{aligned}$$

ここで、 k は Newton 反復の段数を意味する。(20)式は、 δu_i^k に関する連立 1 次方程式を構成している。連立方程式の解法が Newton 反復の各段に入ると数値解析の効率が低下するため、多数の解法が(20)式を解くために考察されている。ここでは、以下の 4 つの解法を検討する。

- (1) Newton法+直接法
- (2) 簡易Newton法+直接法
- (3) NBGS法
- (4) Newton法+Gauss-Seidel法

(1)は、連立方程式(20)を Gauss 消去法等の直接法を用いて解く方法である。(2)の簡易 Newton 法は単独非線形の方程式の解法である von Mises 法を非線形連立方程式に適用したもので、(20)式の係数 L_i^k 、 D_i^k 、 U_i^k を Newton 反復の初期値に固定する方法である。連立方程式の解法は直接法とする。(3)は、二相流解析の代表的手法の 1 つで、連立方程式の解法を省くために、(20)式の係数 U_i^k を 0 と近似し、

$$\delta u_i^k = (-f_i^k - A_i^k \delta u_{i-1}^k) / D_i^k \quad (21)$$

によって、第 k 近似解を求めていく方法である。(4)は(20)式を解くために、Gauss-Seidel 法を用いたものである。いずれの方法も頻繁に使用されているが、各方法の優劣は明らかでない。線形方程式の場合は、第 II 章で示したように、ある程度解析的に特性を把握できたが、ここでは非線形性のための解析的把握は困難である。そこで、数値実験的に反復が収束するクーラン数を調べる。

初期、境界条件は双曲形方程式に特有の不連続を含むものとし、次式で与える。ノード数 IM は、前章でみたように 10 以上になると収束特性に及ぼす影響が小さくなるので、ここでは 30 とする。

(初期条件)

$$u_i = \begin{cases} 1 & (0 \leq i \leq IM/2) \\ 0.5 & (IM/2 < i \leq IM) \end{cases} \quad (22)$$

(境界条件)

$$u_0 = 1, \quad u_{IM} = u_{IM-1} \quad (23)$$

収束判定は、外反復である Newton 反復に対しては

$$\max_i |\delta u_i^k| \leq 1 \times 10^{-7},$$

内反復として Gauss-Seidel 法を使用する場合は、

$$\max_i |\delta u_i^{k,j} - \delta u_i^{k,j+1}| \leq 1 \times 10^{-5},$$

とした。ここで、 j は内反復の反復段数を意味する。また、 δu_i の初期値は 0 とした。以下、時刻 0 から次の時刻の解が得られる条件について数値実験を行う。

第 5 図に、数値実験で得た各反復法の収束領域を示す。解法によって収束領域が大きく異なることがわかる。Newton 法によって得られる連立 1 次方程式(20)を直接法で解く場合は、陰解法の持つ無条件安定という性質が保存されるのに対し、内反復を使用する場合クーラン数が 1 以上では発散した。

第 5 図 解法による反復収束可能クーラン数の相違

以下、この原因を考察する。

Jacobi 法と Gauss-Seidel 法の収束は(20)式が Young の性質 $A^{(0)}$ を持つので一致する。そこで Jacobi 法を用いて考察する。Jacobi 反復式は(20)式より、内反復の段数を j とすると次式で表わせる。

$$\begin{aligned} \delta u_i^{j+1} &= -\frac{u_i \Delta t}{2\Delta x \left[1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1} - u_{i-1}) \right]} \\ &\quad \cdot (\delta u_{i+1}^j - \delta u_{i-1}^j) + g_i \end{aligned}$$

ここで、内反復の収束特性と無関係な定数項を g_i と略記した。また、外反復の添字 k は省略した。各ノードごとのクーラン数 $c_i (= u_i \Delta t / \Delta x)$ を用いて書き改めると、

$$\begin{aligned} \delta u_i^{j+1} &= -\frac{c_i}{2 \left[1 + \frac{1}{2} (c_{i+1} - c_{i-1}) \right]} \\ &\quad \cdot (\delta u_{i+1}^j - \delta u_{i-1}^j) + g_i \end{aligned}$$

となる。初期条件(22)より大部分のノードで $c_{i+1}=c_{i-1}$ が成り立つ。したがって、上式は線形移動方程式の反復式(9)とほぼ等しいことがわかる。このため、 $c < 1$ の制約が付加されたと考えられる。

以上より、対流項を完全陰解法で差分化しても、Newton法による連立1次方程式を反復法で解くならば(10)あるいは(14)式の制約が課され、さらに各時刻で多数の反復を必要とするため計算効率が陽解法より劣ることがわかった。また、陰解法の効率を最大限に利用するには、内反復は使用せず直接法でNewton法による線形化式を解くべきであることがわかった。

次に、初期条件の影響について検討する。Newton法は初期値が解の近傍にあるとき解に2次収束し、簡易Newton法は1次収束することが知られている。したがって、双曲形方程式の解に特有な解の不連続性の度合いが大きいと、初期値が解から離れ、反復の収束が悪化することが予想される。そこで、前の数値実験で c が1を超えたNewton法+直接法、簡易Newton法について初期不連続が反復収束に及ぼす影響を調べてみた。初期条件(22)式を

$$u_i = \begin{cases} u_{\text{HIGH}} = 1 & (0 \leq i \leq IM/2) \\ u_{\text{LOW}} & (IM/2 < i \leq IM) \end{cases}$$

に変え、 u_{LOW} を変化させて数値実験を行なった。

第6図に、簡易Newton法が収束した最大クーラン数 c_{max} と $u_{\text{HIGH}}/u_{\text{LOW}}$ の関係を示す。変数の不連続の程度が大きくなるにつれ、 c_{max} が小さくなることがわかる。一方、Newton法と直接法を組み合わせた場合は、不連続の程度に無関係に $c=100$ 程度でも収束した。

第6図 簡易Newton法の c_{max} の初期不連続性による変化

以上より、対流項を中心差分法で差分化した完全陰解法の場合、非線形連立方程式を解く解法に加えて取り扱う問題が含む不連続性によってもクーラン数に制

約が課され、無条件安定が破綻することがわかった。もちろん、ここで取り扱った方程式は非線形方程式なので、他の初期条件、境界条件では上記とは異なった収束特性になると考えられる。さらに、空間差分法が異なる場合も別の結果が得られるであろう。しかし、陰解法が構成する非線形連立方程式を解くための反復法の種類によって、陰解法を持つ無条件安定性が破綻し時間刻み幅が制約されることは事実として認識しておくべきである。

IV. 非粘性圧縮性流れ解析

前章までは、差分スキームの安定性考察の基礎となる線形移動方程式、および対流項の非線形性を含むBurgers方程式に対して、陰解法と反復法を組み合わせた場合の特性を調べてきた。従来、これらの方程式は圧縮性流れに対する陽な差分スキームの特性評価の基礎としても使用されてきた。しかし、すでに示したように、陰解法と反復法を組み合わせた場合、その収束特性は方程式によって異なる。したがって、陽解法の場合のようにモデル方程式による収束評価が実際の圧縮性流れ解析手法の評価に役立つか否かは不明である。圧縮性流れ解析における完全陰解法が無条件安定であるためには、前章までに現れたクーラン数の制約、不連続性による制約に加えて、CFL数(便宜上このように呼ぶ)

$$c_f \triangleq \frac{(a+u)\Delta t}{\Delta x}$$

に関する制約という3つの障壁が除かれねばならない。特に第3の制約はモデル方程式では評価できない。そこで本章では、実際に完全陰解法に基づく圧縮性流れ解析コードを作成し、上の3つの制約が解法に与える影響を1次元衝撃波管問題⁹⁾を通して検討する。

1. 基礎式および初期・境界条件

1次元衝撃波管問題とは、断面積一定の管の途中を隔膜で仕切り、一方を高圧 P_{HIGH} 、他方を低圧 P_{LOW} に設定し、隔膜を瞬時に取り除いたときに生じる気体の非定常流れを追跡する問題である。この流れには、初期圧力比 $P_{\text{HIGH}}/P_{\text{LOW}}$ で強度が変化する衝撃波面、接触面、膨脹波面等の種々の不連続が含まれ、かつ解析解も存在するため圧縮性流れ解析の基本問題とみなされている。以下では、管の両端は閉じているとして解析を行う。

1次元非粘性圧縮性流れの保存則は次式で表わせる。

(質量保存)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (24)$$

(運動量保存)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (25)$$

(エネルギー保存)

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho e u}{\partial x} + P \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (26)$$

ただし, ρ : 密度, P : 圧力, u : 速度,
 e : 内部エネルギー

気体の状態方程式はポリトロップ変化を仮定し,

$$P = (\gamma - 1) \rho e \quad (27)$$

とする。ただし, γ は比熱比で 1.4 とする。以上の式を, 第 7 図に示すスタガードメッシュ上で完全陰解法を用いて差分化すると,

$$\rho_i^{n+1} - \rho_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\rho u)_{i+1/2}^{n+1} - (\rho u)_{i-1/2}^{n+1}] = 0 \quad (28)$$

$$u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^n + \frac{\Delta t}{2 \Delta x} u_{i+1/2}^{n+1} (u_{i+3/2}^{n+1} - u_{i-1/2}^{n+1}) \\ + \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\rho_{i+1/2}^{n+1}} (P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}) = 0 \quad (29)$$

$$(\rho e)_i^{n+1} - (\rho e)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\rho e u)_{i+1/2}^{n+1} - (\rho e u)_{i-1/2}^{n+1}] \\ + \frac{\Delta t}{\Delta x} P_i^{n+1} (u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i-1/2}^{n+1}) = 0 \quad (30)$$

$$P_i^{n+1} - (\gamma - 1)(\rho e)_i^{n+1} = 0 \quad (31)$$

を得る。ただし, 空間微分は中心差分法で離散化してある。また, $e_{i+1/2}$ のように変数の定義位置以外で使用する変数は, 内挿により $(e_i + e_{i+1})/2$ として求める。

第 7 図 メッシュおよび変数定義位置

以下では, 便宜上(28)~(31)式をおのの $F_i = 0$, $G_i = 0$, $H_i = 0$, $E_i = 0$ と略記する。

境界条件は, 管の両端が閉じているため,

$$u_{3/2}^{n+1} = u_{IM1+1/2}^{n+1} = 0 \quad (32)$$

とする。 ρ , P , e の境界値は両端の流速が 0 のため不

要となる。

初期条件は, 以下のように設定した。

$$u_{i+1/2} = 0 \quad (1 \leq i \leq IM)$$

$$e_i = 0.25 \quad (1 \leq i \leq IM)$$

$$P_i = \begin{cases} P_{\text{HIGH}} & (1 \leq i \leq IM/2) \\ P_{\text{LOW}} = 0.1 & (IM/2 < i \leq IM) \end{cases}$$

$$\rho_i = P_i / \{(\gamma - 1)e_i\} \quad (1 \leq i \leq IM)$$

高圧室の圧力 P_{HIGH} は, 不連続性が数値解に与える影響を調べるためにパラメータとした。また, ここで用いた数値は行列演算等で丸め, 誤差の影響がでないように, すべての変数が 1 程度の値となるように決めたもので, 現実の流体を模擬したものではない。

(28)~(32)式を Newton 法を用いて線形化すると, ブロック三重対角行列を係数に持つ, 以下の連立方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} D_1 & U_1 & & & \\ L_2 & D_2 & U_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & L_{IM2} & D_{IM2} & U_{IM2} & \\ & & & L_{IM1} & D_{IM1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{IM2} \\ x_{IM1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{IM2} \\ b_{IM1} \end{pmatrix} \quad (33)$$

ただし,

$$x_i^k = \begin{cases} (\delta \rho_i^k, \delta P_i^k, \delta e_i^k, \delta u_{i+1/2}^k)^T & (1 \leq i \leq IM2) \\ (\delta \rho_i^k, \delta P_i^k, \delta e_i^k)^T & (i = IM1) \end{cases}$$

$$b_i^k = \begin{cases} -(F_i^k, G_i^k, H_i^k, E_i^k)^T & (1 \leq i \leq IM2) \\ -(F_i^k, H_i^k, E_i^k)^T & (i = IM1) \end{cases}$$

ここで, k は Newton 法の反復段数, L_i^k , D_i^k , U_i^k はヤコビアン要素からなる 4×4 あるいは 4×3 , 3×4 , 3×3 の行列である。

2. 数値実験条件

(33)式を解くために第 III 章で示した 4 つの解法を適用し, 反復が収束するクーラン数および CFL 数を数値実験により求める。ただし, 係数行列がブロック三重対角行列を持つので, 直接法にはブロック消去法を, 内反復にはブロック Gauss-Seidel 法を用いる。

第 8 図に, 衝撃波管内の密度分布の模式図を示す。流速は衝撃波面が通過した領域②, ③で最大となり, 音速は領域②で最大となる。いずれも初期圧力比より解析的に値を求めることができる。異なる解法の収束条件を同じ基準で評価するために, クーラン数 c および CFL 数 c_f の計算はこの解析解を用いて行う。

第8図 衝撃波管内密度分布の模式図

第9図には、初期圧力比 P_{HIGH}/P_{LOW} と

$$\frac{c_f}{c} = \frac{(u+a)_{max}}{u_{max}}$$

との関係を示す。圧力比が大きくなると気体が大きく加速され、音速に近づくため比が2に近づいていく。以下の数値実験は、不連続性の影響を見るために圧力比が

$$2 \leq P_{HIGH}/P_{LOW} \leq 5$$

の範囲で行なった。また、 IM は42、 Δx は0.1とした。

第9図 理論値による初期圧力比と c_f/c との関係

3. 結果と考察

以下、反復が収束する最大のクーラン数, CFL 数を c_{max} , c_{fmax} で表す。第10図(a)~(d)に各反復法について、 c_{max} , c_{fmax} と初期圧力比との関係を求めた結果を示す。Newton 法と直接法を組み合わせた場合は、第10図(a)に示すように、初期圧力比の増加に伴い c_{max} , c_{fmax} が急減している。Burgers 方程式で無条件安定であった本解法も、実際の圧縮性流れ解析では不連続性に収束性が支配されることがわかった。初期圧力比が小さければ大きなクーラン数を使用できるので、低速流れ解析には効率的な解法といえよう。

第10図(b)は、Newton 法と Gauss-Seidel 法を組み合わせた場合である。この方法では、圧力比に依存せず

(a) Newton法+直接法

(b) Newton法+反復法

(c) NBGS法

(d) 簡易Newton法

第10図 各種反復解法の c_{max} , c_{fmax} と初期圧力比との関係

$c_{\max}=1.1$ となった。すなわち、クーラン数に反復収束特性が支配される解法といえる。CFL数が圧力比と共に低下しているのは、 c と c_f が第9図に示した関係にあるためである。この結果は、Burgers方程式の場合と同様に、内反復の性質が線形移動方程式の反復式(9)と等しくなったためと考えられる。

NBGS法の結果を第10図(c)に示す。Gauss-Seidel法を用いた場合とは逆に収束性がCFL数に支配されている。このため、 $c_{\max}$ は圧力比と共に増加し1に近づいている。

第10図(d)は、簡易Newton法の結果である。圧力比が3.5付近までは $c_{\max}$ が一定であり、収束性がCFL数に支配されているが、それ以上では不連続性の影響がでている。 $c_{\max}$ は0.6程度と小さく反復の収束も非常に遅い。したがって、完全陰解法を用いたにもかかわらず陽解法よりはるかに解析効率が劣る。この収束性の悪さは、係数行列を反復ごとに変化させないため、状態の急激な変化に反復解が追従できないためと考えられる。

以上より、空間微分項を中心差分化した場合、完全陰解法を用いても反復法を用いる限り容易に無条件安定とはなり得ないことがわかった。本研究で調べた範囲内では、Newton法によって得られる連立方程式を直接法で解くのが最良の方法であり、低速流れならばほぼ無条件安定性を確保できるといえる。しかし、これは数値解析の効率だけを考えた場合で、解析の精度を考えるとむやみにクーラン数は大きくできない。

第2表に、各解法の収束支配因子を整理した。解法により支配因子はすべて異なっている。特にCFL数が支配因子となる場合は、Burgers方程式等のモデル方程式では評価できない。すなわち、モデル方程式による評価のみでは不十分である。また、使用可能な Δt は解法によって異なりと共に、1つの解法でも不連続性の影響によって変化する。このため Δt の設定は非常に困難となる。この対処方として、著者らが既に提案したあいまい推論に基づく Δt 制御法⁽¹⁰⁾が挙げられよう。

第2表 各反復法の反復収束支配因子

反復法	支配因子		
	クーラン数	CFL数	不連続性
Newton法+直接法			○
Newton法+反復法	○		
NBGS法		○	
簡易Newton法		○	○

○は支配的な因子を意味する。

V. 結 言

流れの数値計算の効率を向上させる一手段に、無条件安定な陰解法がある。陰解法では線形あるいは非線形連立方程式を解く必要があり、そのために反復法が多用されている。この反復が任意の Δt で収束しなければ無条件安定とはいえない。本研究では、空間差分法として中心差分法を用いる陰解法と反復法を組み合わせた数値計算系に対する基礎的安定性評価を行なった。

流速場が与えられたときの熱の輸送等を陰解法で解く場合を考察するために、まず線形移動方程式を検討した。この場合差分式は連立1次方程式を構成するので、線形反復法と組み合わせた計算系の特性を反復行列のスペクトル半径から求めた。その結果、対流項が含まれる場合、ノード数が10程度を越えるとクーラン数が1程度以下でなければ線形反復法は収束せず実際上無条件安定となり得ないこと、セルレイノルズ数が2程度の小さい場合しか収束しないことなどがわかった。また境界条件としてDirichlet問題と混合問題を扱い、境界条件による使用可能クーラン数の差は小さいことを明らかにした。

次に、ナビエ・ストークス式の大対流項を完全陰解法で差分化する場合の基本的特性を調べるためBurgers方程式を検討した。この場合差分式は非線形連立方程式を構成するので、Newton法系統の反復法が不可欠となる。そこで、Newton法によって得られる連立1次方程式を解く方法として、①直接法を用いる場合、②反復法を用いる場合、③簡易Newton法、④NBGS法の4種の解法の反復収束を調べた。

その結果、①はクーラン数が100程度でも収束し無条件安定とみなせたのに対し、②はクーラン数 <1 という制約が課された。この制約の原因は、反復式が線形移動方程式と本質的に等しくなるためであることがわかった。Newton法の近似解法である③、④も小さなクーラン数でのみ収束可能であった。また、状態量の不連続の程度によっても制約が加わることを確認した。

最後に、1次元衝撃波管問題を通して圧縮性流れに対する完全陰解法の性質を検討した。解法としては、上記の4つの方法を調べた。その結果、すべての方法とも無条件安定とはならず、クーラン数、CFL数、あるいは状態量の不連続性のいずれかに収束性が支配されることを確認した。

ここで調べたのは、空間差分として中心差分を用いた場合であり、他の差分法を用いた場合は別な結果が得られると考えられる。また、Burgers方程式や圧縮

性流れ解析の基礎式は非線形方程式なので、初期条件や境界条件によっても使用する反復法の収束特性が変化することが予想される。しかし、個々の差分法や計算条件に対して本研究で実施したような検討を積み重ねていくことが、数値的に得られた結果を判断するための指針や、新しく流れの数値計算プログラムを開発する際の解法の選択の指針を得るために重要であると考えている。

— 参考文献 —

- (1) ROACHE, P. J. (高橋亮一, 他訳): “コンピュータによる流体力学(上), (下)”, (1978), 構造計画研究所.
- (2) HARLOW, F.H., AMSDEN, A.A.: *J. Comp. Phys.*, 8, 197 (1971).
- (3) 高橋亮一, 富山明男: 原子力誌, 26[11], 988 (1984).
- (4) WACHSPRESS, E.L.: *KAPL-4116*, (1969).
- (5) 原子力学会「熱流動数値解析」特別専門委編: “原子炉における熱流動数値解析の現状”, (1986).
- (6) SMITH, G.D.: “*Numerical Solution of Partial Differential Equations, Finite Difference Methods*”, (3rd Ed.), (1986), Clarendon Press, Oxford.
- (7) 富山明男, 高橋亮一: 原子力誌, 32[1], 80 (1990).
- (8) YOUNG, D.: *Trans. Amer. Math. Soc.*, 76, 92 (1954).
- (9) LIEPMANN, H.W., ROSHKO, A. (玉田 琰訳): “気体力学”, (1960), 吉岡書店.
- (10) 高橋亮一, 富山明男: 原子力誌, 29[8], 732 (1987).

〔付 録〕

反復の収束とスペクトル半径との関係を説明しておく。線形反復法は次の形に表わせる。

$$\mathbf{x}^{k+1} = H\mathbf{x}^k + \mathbf{b} \quad (\text{A1})$$

ここで, k : 反復の段数, $\mathbf{x}$: 従属変数

H : 反復行列

反復解を $\mathbf{a}$ で表わし, 誤差ベクトル $\mathbf{e}^k$ を, $\mathbf{e}^k = \mathbf{a} - \mathbf{x}^k$ で定義すると, (A1)式は次式となる。

$$\mathbf{e}^{k+1} = H\mathbf{e}^k \quad (\text{A2})$$

初期誤差 $\mathbf{e}^0$ を H の固有ベクトル $\mathbf{f}_n$ を用いて表わすと,

$$\mathbf{e}^0 = \sum_n c_n \mathbf{f}_n \quad (c_n \text{ は定数}) \quad (\text{A3})$$

となる。(A2), (A3)式より, 誤差 $\mathbf{e}^k$ は λ_n を固有値として次式で表わせる。

$$\mathbf{e}^k = \sum_n c_n \lambda_n^k \mathbf{f}_n \quad (\text{A4})$$

したがって, 十分大きな k における誤差成分 $\lambda_n^k \mathbf{f}_n$ の最大値は絶対値最大固有値に対応する。この絶対値最大固有値をスペクトル半径 ρ と呼ぶ。(A4)式より $\rho < 1$ ならば誤差がゼロに収束することがわかる。

$H = (h_{ij})$ が $h_{ii-1} = a$, $h_{ii} = b$, $h_{ii+1} = c$ で他の成分がすべてゼロである一様な三重対角行列であれば, ρ は次式で与えられる。

$$\rho = \left| b + 2 \operatorname{sgn}(c) \sqrt{ac} \cos \left(\frac{\pi}{MD+1} \right) \right| \quad (\text{A5})$$

ここで, MD : 行列の次元

「二相流数値解析法の基礎と応用」

講習会 テキスト 残部僅少!

A4判オフセット印刷, 236p. (1989).

定価 4,000円 (消費税込), (〒350円)

内 容

1. 気液二相流の現象の基礎 ①1次元流としてのパラメータ, ②流動様式と伝熱形態, ③現象の記述のモデル, ④圧力波の伝播速度(音速)と臨界流現象, ⑤不安定流動, ⑥特殊な二相流現象
2. 基礎式 ①均質流モデル, ②ドリフトフラックスモデル, ③二流体モデル
3. 基礎式と状態式 ①基礎式を解くのに必要な構成式と状態式, ②実際に使用されている構成式
4. 数値解法の基礎 ①差分解法の基礎, ②二相流の基礎式と差分式の数学的性質
5. 数値解法の応用 ①半陰解法, ②完全陰解法, ③トピックス

◎ご希望の方は本会事務局へ。

本会マーク入り タイピン・カフセット
(金メッキ・七宝・エポキシ樹脂加工)
創立30周年記念に装い新たに製作しました。海外へのプレゼント用に好評。

頒価 3点セット 3,000円(〒250円) (消費税込)
タイピンのみ 1,500円(//)

◎ご希望の方は学会事務局へ○