資料

乱流解析における乱流モデルをめぐる諸問題

吉 澤 徹*

(1990年 5月8日 受理)

Some Aspects of Turbulence Models in Study of Turbulent Flows

By Akira YOSHIZAWA

Turbulence models are often indispensable for investigating flow phenomena in engineering and natural science. In this article, the necessity of turbulence models are clarified in close relation to the energy dissipation mechanism in turbulence. Moreover, how these models are constructed and what care is necessary for their application are explained with special attention paid to the k - ϵ model.

KEYWORDS: turbulence model, turbulent flow, energy losses, k - ϵ model

I. はじめに

時間・空間的に複雑に変動する流れは、通常「乱流」と総称され、原子力工学を含む多くの理工学分野に現れ、かつ本質的役割を演じていることが多い。本会々員の中にも、原子炉における熱の輸送等に関連して乱流と深く関わっている方が少なくないであろう。乱流を一義的に定義することは容易ではなく、後述するように、「流れを特徴づけるパラメータ」が大きい場合の流れの特性と理解するのが適当である。乱流がしばしば重要となるという事実は、多くの分野において上述のパラメータがかなり大きいということの裏返しに過ぎない。

本稿においては、まず乱流の数値計算が困難になる理由を述べる。次に、乱流モデルが本来の流体運動および熱伝導に関する方程式からいかなる手続きで構成されるかを説明し、併わせてモデルの持っている限界等について言及する。

II. 基礎方程式

本稿では、流速が音速に比べかなり小さい、すなわち流体の密度変化を無視できる流れについて議論する。このため、流れが音速に近いあるいはこれを越える航空力学における高速乱流や火災等の強い浮力作用を伴う乱流は、ここの議論からは除外される(前者のモデルに関しては文献(1)を参照)。

粘性作用を持つ密度一定の流体に対する基礎方程式

$$\text{は, } \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -(1/\rho) \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\partial \theta / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = \kappa \Delta \theta \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{u}$: 流速ベクトル, p : 圧力
 ρ : 流体密度, θ : 温度
 ν : 流体の動粘性率, κ : 温度拡散率
 ∇ : 勾配ベクトル, Δ : ラプラシアン

で与えられる。保存則の観点から見ると、(1)~(3)式はそれぞれ質量、運動量、エネルギー保存則に対応している。

流れの解析において、(1)~(3)式はよく知られた方程式であるため、これらがどのような近似のもとに導出されているかを忘れがちである。(1)式は古典力学の範囲内では全く問題はないが、(2)、(3)式は構成分子の集合を連続体近似する際のモデルであり、運動量保存則に比べれば、はるかに近似的要素の多い方程式である。この点に関しては、乱流モデルの説明の際、改めて言及する。

III. 粘性の影響

(2)式の粘性項がどのような性質を持っているかを見るために、 $\mathbf{u}$ を波数表示してみよう。すなわち、

$$\mathbf{u} = \int \mathbf{u}(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k} \quad (4)$$

* 東京大学生産技術研究所 (Inst. of Indus. Sci., Univ. of Tokyo)

と書く。おのおのの波数 $k(=|k|)$ に対して、その波長 L_k を定義すると、

$$L_k = 2\pi/k \quad (5)$$

で与えられる。(5)式は、大きな k は小さな空間スケールに対応し、小さな k は逆に大きな空間スケールに対応していることを示している。

(4)式を使うと、(2)式の粘性項は

$$\nu \Delta u = -\nu \int k^2 u(k) \exp(-ik \cdot x) dk \quad (6)$$

となる。(6)式では(4)式に比べて因子 k^2 が付加されているが、これは何を意味するのであろうか。この点を簡単に見るために、

$$f = \exp(-x^2), \quad g = x^{2n} \exp(-x^2) \quad (7)$$

という2つの関数を考える。 f は $x=0$ で最大値を持つが g は $n^{1/2}$ で最大値をとる。そこで、

$$\int f dx, \quad \int g dx \quad (8)$$

という2つの積分を考えたとき、後者は前者に比べて x の大きい部分の寄与が重要となり、この性質は n が大きくなればなるほど顕著になる。

以上の説明を念頭において(4)と(5)式を比較すると、(6)式の粘性項では u におけるよりも k の大きな部分、すなわち小さな長さスケールを持つ変動が重要となることがわかる。この性質は、細かな変動成分が多い乱流ではエネルギー散逸が増幅されるという経験的事実と一致している。

上の点を詳しく見るために、流れの粘性効果が重要となる長さスケール、すなわち散逸スケール L_d がどの程度の大きさになるかを考えてみよう。 L_d を規定する量として、動粘性率 ν と単位時間、単位体積当りに失われるエネルギー ε が重要と思われる。次元解析より、

$$L_d = 0[(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}] \quad (9)$$

となるが、これは一様等方性乱流の研究からもその理論的根拠が与えられている¹⁰⁾。(9)式の ε が何によって規定されるかがわからないと、(9)式を持つ物理的意味が明確にならない。 ε の大きさを直感的に理解するために、流れがどのように駆動されているかを考えてみよう。例えば、水道管中の流れは管断面に加えられた圧力によって生じていることから、外部からのエネルギー注入機構は、管の断面等の比較的大きな空間スケールと関連している。すなわち、流れの中でどれだけのエネルギーが失われるかは、外部から注入されるエネルギーによって制限されるはずである(支出は収入に依存する)。このことから、 ε は円管の半径と

か断面を通過する平均流速等の大きなスケールに関係した基準の長さ L 、速度 V を用いて、

$$\varepsilon = 0(V^3/L) \quad (10)$$

と評価できる。

(9)と(10)式より、

$$L_d/L = 0(R^{-3/4}) \quad (11)$$

となる。ここで、 R はレイノルズ数と呼ばれる無次元量であり、

$$R = VL/\nu \quad (12)$$

で定義される。流体力学の教科書等で R の定義をすでにご存じの人は、ここでの R の導入方法には少し違和感を感じられるかも知れない。 L, V を用いた f のオーダー評価を $\{f\}$ と書くとき、通常の方法では(2)式の各項を

$$\{(u \cdot \nabla)u\} = V^2/L \text{ (慣性項)} \quad (13a)$$

$$\{\nu \Delta u\} = \nu V/L^2 \text{ (粘性項)} \quad (13b)$$

のように評価し、 R を

$$R = (\text{慣性項})/(\text{粘性項}) \quad (14)$$

で定義し、(12)式を得る。

(14)式の定義によると、 R が大きいことは慣性効果が粘性効果に比べて重要となることを意味し、観測事実と矛盾しない。しかし、このことを粘性効果という側面から見ると、 R が大きいときは粘性作用の重要性が減少するように見える。実際には、 R が大きくなるにつれて流れは乱流になり、粘性によるエネルギー散逸が増大することがよく知られている。 R をめぐる上の事情は、筆者が流体力学に初めて接する人達に R の定義式を説明する際、いつも困惑した点である。上の見かけ上の矛盾は、 L_d ではなく、 L という大きな長さスケールで粘性作用を評価したことから生じている。

R が大きくなるにつれて、 L_d は L に比べてますます小さくなる。われわれが目にするスケールは L であるから、 R が大きくなると、 L から L_d までの長さスケールを持つ多数の変動成分が流れの中に混在することになる。細かな変動を持つ流れが生じるとき、われわれはこれを乱流と総称している。このことから、 R が大きいことが乱流の顕著な特徴であることをよく理解できるであろう。

(11)式と、いわゆる層流における境界層厚さとの関連を述べておこう。流線形物体等の周りに生じる乱れの少ない層流においては、粘性効果は強い速度勾配の生じる固体壁等の近傍に限られる。このとき、その厚さ δ は

$$\delta/L = 0(R^{-1/2}) \quad (15)$$

となることが知られている。(11)と(15)式を比べたとき、注意すべきことは(11)式のスケールでの粘性作用は固体壁から離れた領域でも起こり得ることである。

温度 θ に関しても同様の事情が成り立ち、熱の散逸が重要となる長さスケール L_{θ} は

$$L_{\theta}/L=0(Pe^{-3/4}) \quad (16)$$

となり、ここで Pe はペクレ数であり、

$$Pe=VL/\kappa \quad (17)$$

で定義される。 ν と κ の比、すなわち

$$Pr=\nu/\kappa \quad (18)$$

はプラントル数 Pr と呼ばれる。 Pr が 1 程度のときは、力学および熱的エネルギーの散逸が同程度の空間スケールで生じることになる。ちなみに、 Pr は水では 7、空気では 0.7 程度である。

IV. 乱流の数値計算

近年の計算機能力の向上は著しく、流れに関係した研究分野で数値計算が果たす役割もこれに応じて大きくなっている。しかし、やみくもに計算機を使用しても入力者の能力以上の結果はなかなか出て来ないのが普通である。では、乱流の数値計算上、(11)式は何を意味するのであろうか。(11)式は、 R が大きくなると流れの空間スケールが L で測られるものから L_d のものまで幅広く分布することを意味する。現実の流れではエネルギー散逸を引き起こす粘性効果を無視できないので、差分法等で基本方程式(1)～(3)を数値計算する場合は、その格子間隔は(11)式の L_d と同程度でなければならない。この事実から、乱流の数値計算上、必要な領域分割数あるいはモード数 N は

$$N=0(L/L_d)^3=0(R^{3/4}) \quad (19)$$

となる。

(19)式の N が通常の理工学現象においてどの程度のものになるかを見るために、身近な水道管内の流れを例にしよう。管の直径を 1 cm、流速を 100 cm/s とし、これらをそれぞれ L, V とすると、水の動粘性率は 0.01 cm²/s であることから、 R は 10^4 程度になる。(19)式よりこの R に対応する N は 10^3 となり、1 次元当り 10^3 という格子配置が必要となる。差分法等で流れの数値計算を行なった経験のある読者は、この格子数は現在の計算機にとって途方もなく大きなものであることを容易に理解できるであろう。ちなみに、乱流の直接数値計算が行われた例は、2 枚の平行平板間の発達した乱流、1 枚の平板上の乱流境界層等に限定されており、そのときの R は 10^3 程度であり、必要とした N は 10^7 となる⁽³⁾⁽⁴⁾。計算機の性能も年々向上しているが、現在の

最高の機種を用いてもこの種の計算は数 10 時間から 100 時間程度はかかるであろう。この現状を考えると、幾何学的にかなり簡単な場合でも、 R が 10^4 あるいはそれ以上の乱流を直接数値計算することは極めて困難といえる。まして、工学上現れる複雑な形状下での乱流や天体物理学における R が 10^{10} を越えるプラズマ乱流現象の直接計算などは見果てぬ夢といえる。

上述の困難を一言でいうと、「高レイノルズ数の流れでは、エネルギー(強さ)に関係した長さスケール L から散逸スケール L_d まで非常に沢山の自由度が存在する」ということに尽きる。加えて、小さな空間スケールを持つ変動は時間変化が速いため、時間に関しても高い分解能が必要となり、一層困難が増大する。この困難を緩和するためには、どちらか一方に注目して他方を何らかの近似的方法で取り込まざるを得ない。

理論的な研究として一様乱流がしばしば取り上げられるが、これは非常に小さなスケールに注目し、平均の流れの空間依存性を無視したことに対応する。しかし、現実的に重要かつ興味深い乱流現象においては、境界条件等が少なからぬ影響を持つため、大きなスケールの関与する部分を扱うことが不可欠となる。このため、粘性効果の関係を部分を近似することになるが、この近似法がいわゆる「乱流モデル」と総称されているものである。

V. レイノルズ応力と乱流熱輸送率

大きな空間スケールの変動に注目するために、ある物理量 f を平均 F とそれからのズレ f' とに分けて、

$$f=F+f', F=\langle f \rangle \quad (20)$$

$$\text{ただし、} f=(u, p, \theta), F=(U, P, \Theta) \\ f'=(u', p', \theta')$$

と書く。(20)式において、 $\langle f \rangle$ は f のアンサンブル平均、すなわち同一の初期・境界条件下で繰り返し行われた観測値の平均として定義される。アンサンブル平均は、理論的観点からはもっとも考え易い平均値の定義方法である。定常乱流、すなわち平均値が時間によらない乱流では、時間平均と考えてもよい。

(1)～(3)式の平均をとると、

$$\nabla \cdot U=0 \quad (21)$$

$$D U_i / D t = -(1/\rho) \partial P / \partial x_i \\ + \nu \Delta U_i + \partial R_{ij} / \partial x_j \quad (22)$$

$$D \theta / D t = \kappa \Delta \theta + \nabla \cdot H \quad (23)$$

となる。ここで、

$$D / D t = \partial / \partial t + U \cdot \nabla \quad (24)$$

$$R_{ij} = -\langle u_i' u_j' \rangle \quad (25)$$

$$H = \langle u' \theta' \rangle \quad (26)$$

で定義される。 R_{ij} , H はそれぞれレイノルズ応力, 乱流熱輸送率と呼ばれている。

R_{ij} , H は, 平均量を支配する(21)~(23)式と, 本来の方程式(1)~(3)式とを区別する唯一の量であるから, その重要性は容易に理解できるであろう。これらの量の持つ物理的意味をもう少し詳しく見てみよう。(25)式の $\langle u'_i u'_j \rangle$ は, u'_i という単位質量当りの i 方向の運動量が u'_j によって j 方向に単位時間当たり運ばれる割合である。そこで, $(\partial/\partial x_j) R_{ij}$ はある1点で運動量の i 成分が j 方向から流入し, j 方向に流出するときの正味の運動量の増減を意味する。この量が(22)式に付加されているということは, U , P 等の平均量のみを考慮したとき無視されてしまう u' による運動量変化, すなわち力の重要性を示している。この事情は, (2)式を連続体近似のもとで導出した手続きを思い出すともっと鮮明になる。連続体近似では, 構成分子の平均自由航路より遥かに大きい空間スケールの変動のみに注目するので, 構成分子そのものは扱わない。しかし, 分子同士が衝突する際引き起こす様々な影響をある程度取り入れておかないと現実の物理現象を近似できない。通常, この分子運動による効果は応力 τ_{ij} として表現され,

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(\partial U_j/\partial x_i + \partial U_i/\partial x_j) \quad (27)$$

とモデル化される(μ : 通常の粘性率, $\nu = \mu/\rho$)。(27)式の第1, 2項はそれぞれ粒子が衝突する際に面に垂直方向, 平行方向に及ぼす力を表わしている。(27)式を運動量保存則

$$\rho(\partial u_i/\partial t + (u \cdot \nabla) u_i) = \partial \tau_{ij}/\partial x_j \quad (28)$$

に代入すると, (2)式を得る。

R_{ij} は「平均流に含まれる細かい乱れの与える影響」という点では, 連続体近似における分子運動の効果 τ_{ij} と類似の関係になっている。 H も R_{ij} と同様に乱れによる熱輸送効果を表わしている。乱流中では, 粘性効果や熱輸送効果の増大が観測されるのは, まさにこの2つの量によるのである。後述するように, R_{ij} や H による効果を表現するとき, 乱流粘性率および乱流熱拡散率の概念を導入するのは, R_{ij} と τ_{ij} の類似性から来ている。(21)~(23)式は R_{ij} , H を含むために閉じた系にはならず, なんらかの方法で U , θ 等と関係づける必要がある。これがいわゆる乱流のモデル化であり, 本稿の目的である。

後の都合上, R_{ij} に対する方程式を与えると,

$$\begin{aligned} DR_{ij}/Dt = & -(R_{ik}\partial U_j/\partial x_k + R_{jk}\partial U_i/\partial x_k) \\ & - \langle p'(\partial u_j'/\partial x_i + \partial u_i'/\partial x_j) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2\nu \langle \partial u_j'/\partial x_k \partial u_i'/\partial x_k \rangle \\ & + [(\partial/\partial x_k) \langle u_i' u_j' u_k' \rangle \\ & + \delta_{ik} \langle p' u_j' \rangle + \delta_{jk} \langle p' u_i' \rangle] \\ & + \nu \Delta R_{ij} \end{aligned} \quad (29)$$

となる。単位質量当りの乱れのエネルギー k , すなわち

$$k = \langle u'^2 \rangle / 2 = -R_{ii} / 2 \quad (30)$$

に対する方程式は, (29)式より

$$Dk/Dt = P - \varepsilon + \nabla \cdot (T_k + \nu \nabla k) \quad (31)$$

となる。ここで, P , ε , T_k はそれぞれ k の生成率, 散逸率, 輸送率と呼ばれ,

$$P = R_{ij} \partial U_j / \partial x_i \quad (32)$$

$$\varepsilon = \nu \langle (\partial u_i' / \partial x_i)^2 \rangle \quad (33)$$

$$T_k = -(1/2) \langle u' u'^2 \rangle - \langle u' p' \rangle \quad (34)$$

で与えられる。

乱れが生成される機構を感覚的に理解するために, (32)~(34)式の各項の特徴を見てみよう。まず, (33)式はすでに第Ⅲ章で散逸スケール L_d を定義したとき導入した量であり, 正定値であるので, その物理的性質は明らかで常に k を減少させる性質を持っている。他方, (34)式の T_k は $\nabla \cdot T_k$ の形式で書かれているため, これを流れ全領域で積分すると, ガウスの定理より領域を囲う表面上の値で表わされる。物体上等では, 流速ゼロの条件からこの表面積分の寄与はゼロとなることが多い。このことから, T_k は k をある場所から他の場所に移す役目を持つが, 正味の乱流エネルギーの生成・散逸には寄与しないことがわかる。

以上のことから, 乱流が定常的に維持されているとしたら, P によってエネルギーを注入していることになる。 P に関する上の命名はこの性質からきている。 P の顕著な特徴は, 平均速度勾配に関係していることである。固体境界の上では流速がゼロとなるため, その近くに強い速度勾配が生じるが, 実験的にもそのような場所で k がもっとも大きくなることが確認されている。速度の異なる2つの流体層が接触するとき, 強い乱れが生じ, 混合が加速されるのもこの P の作用による。

Ⅶ. 乱流モデルの構成法

乱流モデルの包括的な解説は文献(5), (6)に譲り, ここではモデル化の基本的な考え方を説明する。試行錯誤的に作られてきたモデルは, 次のような形で整理できる。すなわち,

- (1) 乱れ部分の特徴づける基本的な統計量として, $\{W\} = \{W_n; n=1, \dots, N\}$ を選ぶ。

- (2) 次元解析, テンソル解析等をもとに R_{ij} を U , $\{W\}$ で表現する。ただし, (1) で R_{ij} を $\{W\}$ の中に含めたときは, 次の (3) に直接行く。
- (3) $\{W\}$ に対する方程式中の諸量を U , $\{W\}$ を用いてモデル化する。
- (4) モデル化の際, 現れるいくつかのモデル定数は, 得られたモデル方程式系の結果と実験結果との比較等により最適化を行う。

VII. k - ε モデル

前章のモデル構成法に従って, 工学的にもっとも広く使用されている k - ε モデルを構成し, 他のモデルを学ぶ際の入門としよう。

第Ⅶ章において述べたように, 構成分子の運動をならし連続体と見るとき, 構成分子の衝突によって生じる効果は圧力および摩擦力として (27) 式のようにモデル化され, 流体方程式 (2) の右辺に組み込まれている。乱流においても平均量に注目したとき, 細かな変動を含む乱れ部分は連続体近似における構成分子の役割と似た面を持つ。そこで, 乱れ部分の影響を ν に対応して乱流粘性率 ν_t として取り込むことを考え, R_{ij} を (27) 式にならって

$$R_{ij} = - (2/3) k \delta_{ij} + \nu_t (\partial U_j / \partial x_i + \partial U_i / \partial x_j) \quad (35)$$

と書く。ここで, (27) 式の圧力項に対応する第 1 項は非圧縮条件 (21) 式から生じる。

本来の動粘性率 ν (分子動粘性率と呼ばれる) と乱流粘性率 ν_t を分けるのは, それらを生み出す変動部分の空間スケールの差である。 ν はわれわれが流体運動として取り扱う運動スケールより遥かに小さい空間スケールを持つ構成分子の運動を塗り潰して生じているため, この ν を連続媒質の物質定数的に考えることが可能となる。一方, ν_t に関しては, それを生み出す乱れ部分 u' の空間スケールと平均量 U の空間スケールの間にはそのようなスケール分離がない。このことは, ν_t は U 等を決定する際同時に決まるものであって, ν のようにあらかじめ物質定数のように独立に与えることが不可能となる。言い換えると, (35) 式の乱流粘性表現は, 本来の分子粘性表現ほど信頼性の高いモデルとはならないことを示唆している。

上の前提のもとに, 前章の手続きに従ってまず

$$\{W\} = \{k, \varepsilon\} \quad (36)$$

を選ぶ。 k を選ぶことは, それが u' の大きさの目安になりかつ単位質量当りのエネルギーという重要な意味も持っているので妥当である。 ε はすでに述べたよう

に, 乱流によるエネルギー消散の大きさを与え, また k 方程式中にも現れるので, これを採用することも自然であろう。(36) 式を用いると, ν_t は次元解析より

$$\nu_t = C_k k^2 / \varepsilon \quad (37)$$

と書ける (C_k : 正のモデル定数)。

次に, 手続き (3) に従い, k および ε の方程式を構成する。 k 方程式 (31) において, R_{ij} と関連する (32) 式の P はそのモデル化が済んでいる。唯一モデル化が必要な量は (34) 式の k 輸送率 T_k である。(34) 式の第 1 項は, 乱れのエネルギー $u'^2/2$ が u' によって単位時間当たり運ばれる (輸送される) 割合である。 $u'^2/2$ の大きい部分があると, その近くの領域はその影響によってかき乱され, 結果的には $u'^2/2$ が大きい所から小さい所へ輸送されたことになる。この状況を表現するモデルとして

$$T_k = \nu_k \nabla^2 k \quad (38)$$

が考えられる。後述するように, $u'^2/2$ の代わりに温度変動 θ' とすると, 乱れによって熱が高い方から低い方にその平均温度勾配に関係して伝達することが予想され, この勾配拡散近似の意味が理解し易いであろう。ここで, ν_k は乱れエネルギー拡散率と呼ばれるべき量であり, (34) 式の ν_t と同じ次元を持っており,

$$\nu_k = C_k k^2 / \varepsilon \quad (39)$$

とモデル化される (C_k : 正のモデル定数)。

(38) 式においては, (31) 式の圧力変動 p' に関係した項については全く言及しなかったが, それに対して上述の勾配拡散近似を使用するのは大変危険であることに注意しなければならない。(1) 式を用いると, (2) 式より圧力 p は

$$\Delta p = Q \quad (40)$$

の型のポアソン方程式で記述される。ここで, Q は u およびその空間微分で書かれている。(40) 式の解は, Q の領域積分とそれを囲む表面上での p に関係した量の面積積分とで表わされる。この事実は, 非圧縮流体近似では圧力は近接点のみならず遠方の影響も受け, 温度等のように情報が近接点を通して伝達されるという考え方が適当でないことを示唆している。しかし, 幸いなことに, (38) 式は十分ではないが, ある程度の近似式になっていることがいくつかの場合に確かめられている。

最後に, ε 方程式のモデル化について述べよう。(31) 式の k 方程式と同様に (2) 式から ε に対する方程式を作ることができる。この方程式は, いくつかの複雑な項からなっており, それらをすべてモデル化する必要がある¹⁰⁾。しかし, 実際には k 方程式でなされた

ようなある程度筋道の通ったモデル化は大変難しい。その理由を簡単に述べると、小さなスケールを切り落として大きなスケールの現象のみを扱っているので、前者の詳細が関係する ε 方程式中の各項を評価することは当然できないということである。この事情は乱流モデルにおいて生じる最大の難点の1つである。

では、 k - ε モデルではいかなる ε モデル方程式が使われているのであろうか。通常使用されているものは、

$$D\varepsilon/Dt = C_{\varepsilon 1}(\varepsilon/k)P - C_{\varepsilon 2}\varepsilon^2/k + 7 \cdot [C_{\varepsilon 3}(k^2/\varepsilon)P\varepsilon] \quad (41)$$

である($C_{\varepsilon 1}$: 正のモデル定数)。(31)式の k 方程式と(41)式を比較すると、その構造が極めて類似していることが一見してわかる。すなわち、 k が P によって生成される領域では、 ε もまた生成されることになる。 k および ε をそれぞれ乱れのある側面を特徴づける量と考えると、このモデル化は理解し易い。実際、 k が大きい所では ε も大きいことは実験的にも確かめられており、(41)式はまさにこの事実を表現したものといえる。

以上のような乱流モデルの説明に初めて接した人は、乱流モデルはかなりあやふやな推論の上に構成されていると考えられるかも知れない。確かに、ある面では推測に頼る部分があることを否定できないが、その大きな原因は平均流を持つ非一様乱流の統計理論的研究の遅れにある(筆者もその一員である、乱流の理論研究者の怠慢ともいえる)。実際、ある制限のもとでは、(41)式を統計理論的に証明することが可能である^{(9)~(11)}。そこで、今後の理論研究上の課題は、その制限を緩めてもっと信頼性の高いモデルを導くことである。

(26)式の H も勾配拡散近似を用いて、

$$H = \kappa_t P \theta \quad (42)$$

と書き、乱流拡散率 κ_t を ν_t と同様に

$$\kappa_t = C_k k^2 / \varepsilon \quad (43)$$

とモデル化する(C_k : 正のモデル定数)。(42)式のモデル化に関しては、文献⁽¹⁰⁾とその中に引用されている文献を参照されたい。

Ⅶ. k - ε モデルに関する注意

前章で紹介された k - ε モデルに関して、以下の2点に関して特に注意が必要である。

1. 乱流粘性表現

R_{ij} に対する(35)式は通常、等方的乱流粘性表現と呼ばれているように、乱流の非等方性を表現する力が

弱いきらいがある。例えば、 x 方向に平均流 U があり、 U は $U(y)$ のように、それに垂直な座標 y のみに依存する場合を考えよう(2枚の平行平板間の発達した乱流はこれに当る)。このとき、 x, y, z 方向の速度変動を u', v', w' とすると、(35)式は

$$\langle u'^2 \rangle = \langle v'^2 \rangle = \langle w'^2 \rangle \quad (44)$$

を与えるが、実験では

$$\langle u'^2 \rangle > \langle w'^2 \rangle > \langle v'^2 \rangle \quad (45)$$

となっている。平行平板間流れではこのことは必ずしも重大ではないが、正方形等の断面を持つ管内流れではこの種の非等方性が流れの本質を決定するために、(35)式の非等方化を行うか^{(11)~(12)}、後に簡単に触れる応力モデルを使う必要がある^{(9)~(17)}。

等方性渦粘性表現のもう1つの大きな欠点は、(32)式の乱流エネルギー生成率 P が

$$P = (1/2) \nu_t (\partial U_i / \partial x_i + \partial U_i / \partial x_i)^2 \quad (46)$$

となり、常に正定値を取ることである。流れがある方向に減速するとき、すなわちその方向に負の速度勾配を持つとき、乱れが増加することが実験的に確かめられている。(46)式はこの事実と矛盾しない。反対に、加速するときは乱れが減少するのであるが、(46)式はこの実験結果を説明できない。乱流粘性表現はこの性質のため、物体の角から流れが剝離して加速されるような場合には、予測精度が一般的に落ちることが知られている⁽¹⁸⁾。

2. 低レイノルズ数効果と境界条件

k - ε モデルの出発点(36)式において、動粘性率 ν を含めなかった。この帰結として、第Ⅶ章に与えられた k - ε モデルは、乱流の強度が小さくなる固体壁の極めて近傍や流れが層流的になる領域では適用できない。このような効果は低レイノルズ数効果と呼ばれ、

$$y^+ = u_\tau y / \nu, \quad R_\tau = \nu_t / \nu \quad (47)$$

という2つの量で関係づけられる。ここで、 y は固体壁からの距離であり、 u_τ は

$$u_\tau = [\nu (dU/dy)_{y=0}]^{1/2} \quad (48)$$

で定義される摩擦速度である。 y^+ は壁からの距離とその近傍を特徴づける速度に関連したレイノルズ数といえる。低レイノルズ数効果は、(44)式が小さいことによって表わされる。

k - ε モデルを壁の近傍まで適用して、流速に対して滑りなし条件を課そうとするならば、(47)式によって表わされる効果を乱流粘性率等につけ加える必要がある。このような効果を与える(47)式の関数は、壁減衰関数等と総称され、多くの研究がある(詳細は文献^{(14)~(16)}を参照)。

しかし、現実の原子力等の現象における乱流モデルの数値計算で、滑りなし条件を課せるほど多くの格子点が取れることはほとんどない。このようなとき、固体壁近傍で成り立つ条件を滑りなし条件の代わりに用いて、格子点数を大幅に節約することが多い。そのような条件として代表的なものは、対数速度分布に関連した壁法則であり、

$$U/u_\tau = (1/\kappa) \log y^+ + A \quad (49a)$$

$$k/u_\tau^2 = C_\varepsilon^{-1/2} \quad (49b)$$

$$\varepsilon = (1/\kappa) u_\tau^3 / y \quad (49c)$$

で与えられる。ここで、 κ はカルマン定数であり、0.40程度の大きさを持つ。他方、 A は壁の滑らかさに関連した定数であり、滑らかな壁面ではほぼ5となる。(49b)、(49c)式は、(49a)式が k - ε モデルと矛盾しないための条件である(詳しくは文献(17)を参照)。

以上のことから、壁近傍で対数速度分布(49a)式を使用するのであれば、(49b)、(49c)式からかけ離れた条件を課すと、 k - ε モデルの解が得られないという状況が生じ得るのである。また、このことは角や剝離点近傍のように(49)式に対応する漸近解を知らないときに、滑り条件を課すことの難しさを示唆している。滑り条件へ進むことも滑りなし条件へ退くことも、どちらも容易なことではないというのが実情である。

Ⅴ. おわりに

前章で述べられたモデルは2方程式乱流モデルと総称されているが、さらに、他の代表的なモデルにも触れる。

乱流粘性表現に関連したモデルの欠点に関しては前章で述べた。もしこの表現を捨てるのであれば、第Ⅶ章の構成法に従い、(29)式の R_{ij} に関する方程式をモデル化しなければならない。これがいわゆる応力モデルであり、このとき(29)式の右辺第2項の p' を含む再配分項のモデル化の適否が、応力モデルが成功するか否かを決定する。前章で述べたように、非圧縮性流体近似では圧力は遠方からの影響も強く受けるので、これを1点の物理量で表わすことは種々の難しさを含んでいる。応力モデルが k - ε 型のモデルより多くの優れた性質を持ちながら、決定的なモデルとなり得ない理

由はまさにここにある(応力モデルの詳細は文献(5)~(7)を参照)。

乱流モデルの紹介として触れなくてはならないモデルは、ラージ・エディ・シミュレーションにおける格子粘性モデルである。このモデルは、上述の k - ε および応力モデルとは異なり、エネルギー散逸に関連したスケールの切落としはアンサンブル平均や時間平均ではなく、数値計算上の格子領域等に基づくフィルタリングである。その結果、モデル化のスケールが小さくなり、精度の高いモデル化が期待される反面、数値計算は常に3次元非定常計算となり、かなり大規模なものとなる。ラージ・エディ・シミュレーションの詳細および最近の発展に関しては、文献(18)~(20)を参照されたい。

— 参考文献 —

- (1) YOSHIZAWA, A.: *Phys. Fluids*, A 2, 838 (1990).
- (2) BATCHELOR, G.K.: "*The Theory of Homogeneous Turbulence*", (1953), Cambridge Univ. (吉岡書店より異友正による翻訳もある).
- (3) KIM, J., MOIN, P., MOSER, R.D.: *J. Fluid Mech.*, 177, 133 (1987).
- (4) SPALART, R.R.: *ibid.*, 187, 61 (1987).
- (5) LUMLEY, J.L.: *Adv. Appl. Mech.*, 18, 123 (1978).
- (6) BRADSHAW, P., CEBECI, T., WHITELAW, J.H.: "*Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow*", (1981), Academic Press.
- (7) LAUNDER, B.E., REECE, G.J., RODI, W.: *J. Fluid Mech.*, 68, 537 (1975).
- (8) YOSHIZAWA, A.: *Phys. Fluids*, 27, 1399 (1984).
- (9) *idem*: *ibid.*, 30, 628 (1987).
- (10) *idem*: *J. Fluid Mech.*, 195, 541 (1988).
- (11) SPEZIALE, C.G.: *ibid.*, 178, 459 (1987).
- (12) 西島勝一: 機論, B 55, 999 (1989).
- (13) 村上周三, 加藤信介, 近藤靖史: 生産研究, 42, 5 (1990).
- (14) PARTEL, V.C.: *AIAA J.*, 23, 1308 (1985).
- (15) NAGANO, Y., KIM, C.: *J. Heat Transfer*, 110, 583 (1988).
- (16) MYONG, H.K., KASAGI, N.: *JSME Int. J. Ser. I*, 32, 613 (1989).
- (17) TAKEMITSU, N.: *J. Fluids Eng.*, 112, 192 (1990).
- (18) ROGALLO, R.S., MOIN, P.: *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 16, 59 (1984).
- (19) PIOMELLI, U., MOIN, P., FERZIGER, J.H.: *Phys. Fluids*, 31, 1884 (1988).
- (20) 森西洋平, 小林敏雄: 生産研究, 42, 47 (1990).