研究論文

929. リーマン幾何学を用いた非圧縮性流れ のための境界適合座標法

越塚 誠一*, 岡 芳明*, 近藤 駿介**

(1989年 8月23日 受理)

*Boundary-Fitted Coordinate Method for Incompressible Flow
Using Riemann Geometry*

By Seiichi KOSHIZUKA,
Yoshiaki OKA and Shunsuke KONDO

Boundary-fitted coordinate (BFC) method is useful for a complex geometry compared with the usual finite difference method (FDM), in which only rectangular grid can be used. Though many BFC methods have been proposed for incompressible flow, which often appears in nuclear power plants, the researches have not yet been converged at present. An algorithm in marker-and-cell (MAC) method has been widely used in the usual FDM. In this study, therefore, we develop the MAC method to a BFC method. The governing equations are written by use of Riemann geometry, and new additional terms emerging in the equations are discussed. Contravariant physical components are employed as variables and compared with contravariant non-physical components. We investigate the influence of the boundary-fitted grids in contrast to the rectangular grids using a natural convection problem in a cavity possessing a slant wall and curved backward-facing step flow. Computational storage and time for the BFC method are also investigated.

KEYWORDS: *boundary-fitted coordinate method, incompressible flow, Riemann geometry, contravariant physical component, natural convection problem, cavity, backward-facing step*

I. 緒 言

熱流動数値解析は原子力プラントの設計や安全性評価にとって極めて重要な役割を担っている。しかしながら現状では、数値解析結果の信頼性が十分高いとはいえない。特に通常の差分法 (FDM) では、デカルト座標系や円筒座標系に合わせた格子を使わなければならない。したがって、複雑な形をした原子力プラントに使われている機器等を階段状の近似なしに離散化できることは極めてまれで、形状模擬性が著しく損なわれている。境界適合座標 (BFC) 法は、正方形の様な格子を自由に變形させて形状にあてはめた上で計算する方

法で、形状模擬性という点で通常の差分法よりも優れており、熱流動数値解析の精度向上につながると期待されている¹⁾。

Thompsonら²⁾に始まるBFC法では、現実の物理空間のほかに計算空間を導入する。物理空間内の複雑形状に合わせて格子を切り、計算空間内の正方形格子に対応させることにより、物理空間と計算空間の間の座標変換が決まる。さらに物理空間で成り立っている支配方程式を計算空間に変換し、正方形格子上で差分化し

* 東京大学工学部付属原子力工学研究施設 (Nucl. Eng. Res. Lab., Fac. of Eng., Univ. of Tokyo)

** 東京大学工学部原子力工学科 (Dept. of Nucl. Eng., Fac. of Eng., Univ. of Tokyo)

て計算を行うのである。複素平面を使ったポテンシャル流れの解析では、座標変換の関数を等角変換に限ることにより、物理空間の格子線がそのまま流線、あるいは等ポテンシャル線になる。BFC法では差分計算のために空間を離散化するという目的で格子を生成するので、等角変換に限る必要はない。Thompsonらのように楕円型方程式を立てて格子の粗密を制御しながら格子を切るのが一般的である。また物理空間と計算空間の対応は各格子点ごとに座標変換の微係数を数値的に求めるといって行うので、有限要素法のアイソパラメトリック要素の考え方と同じである。

航空工学の分野に代表されるような圧縮性流れの数値解析においては、Steger⁽³⁾によって陰的なアルゴリズムに適用されたBFC法がよく使われていて、この分野におけるBFC法は確立しているといつてよいであろう。一方、原子力プラントの熱流動解析に関係する非圧縮性流れにおいては、BFC法の適用例は多いが、その方法はアルゴリズムも含めて各研究でまちまちであり、模索状態である。なお、BFC法は流動解析以外にも中性子の拡散計算⁽⁴⁾、電磁場解析⁽⁵⁾など幅広い分野に適用されている。

さて、非圧縮性流れの解析において長方形格子を用いる通常の差分法では、SIMPLE法⁽⁶⁾やMAC法系⁽⁷⁾⁻⁽⁹⁾のアルゴリズムを用いるのが普通である。どちらの方法でもコントロールボリュームを考えて、流速の変数をスタガードに配置する。さらに $\text{div } U=0$ の条件を常に満たすように圧力のポアソン方程式を立てて計算する。これらは圧力や流速の計算上の振動をうまく抑えるという効果がある。しかしながら、圧縮性流れに用いられているBFC法では、変数はすべて同じ格子点上に配置(単純配置と呼ぶ)して流速の変数として物理空間のものを使っているため、上記の変数配置およびアルゴリズムを実現することはできない。したがって、単純配置で非圧縮性流れを計算する場合は、圧力や流速の振動を抑える新たな工夫を導入する必要がある。

Rhie-Chow⁽¹⁰⁾や越塚ら⁽¹¹⁾は、圧力のポアソン方程式の差分化を隣り合う値だけを使って作ることによって圧力の振動を防いでいる。Kashiwa⁽¹²⁾は、圧力の計算を2段階で行うことにより同様の効果を得ている。Kawaiら⁽¹³⁾もGSMAC法に対して同様の工夫が見られる。しかしこれらの方法では、差分化したポアソン方程式を解いた後で差分化した連続の式が満たされなくなる。また、流速については連続の式を満たしている状態でも振動の自由度が残っている。Hirtら⁽¹⁴⁾のArbitrary-Lagrangian-Eulerian(ALE)法では、流速を格

子点に圧力などのスカラーをセル中心に配置(ALE配置と呼ぶ)している。この場合、コントロールボリュームが考えられるのでスカラーの保存性を保つことができる。FEMにおいてもしばしば見られる配置であり、BFC法でこの配置を使うものもある⁽¹⁵⁾。しかし、ALE配置においても流速の振動モードが指摘されている⁽¹⁶⁾。

BFC法においても非圧縮性流れの解析のためには「スタガード配置」(流速は成分に分けてセル境界、圧力はセル中心)が振動を防ぐ上で最も望ましい。さらに原子力プラントの解析のように熱を伴う流れでは、スカラーの保存性を保つためにもコントロールボリュームを用いるスタガード配置は適している。スタガード配置を取るBFC法もすでに多くの提案があるが、これらは流速の変数として何を用いるかによりさらに分類することができる。まず、物理空間の流速成分を変数とするもの⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾がある。しかし、これでは各成分の方向が格子の方向と一致しないので、流速の成分を分けてセル境界に配置するには無理がある。

次に、流速ベクトルを計算空間の成分で表わしてスタガード配置にする方法がある。大宮司らは、計算空間の反変成分を用いて圧縮性流れの解析を単純配置で行っており⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾、非圧縮性流れに対してはスタガード配置で解析している⁽²¹⁾。反変成分で計算する方法は他にも研究例がある⁽²²⁾⁻⁽²⁵⁾。また、反変成分を格子幅で有次元化した物理成分を変数とする方法もある⁽²⁶⁾⁻⁽³⁰⁾。さらには、反変成分にヤコビアンをかけてフラックスとしてそれを変数とするものもある⁽³¹⁾。最近になって共変成分を変数とするもの⁽³²⁾、共変物理成分を変数とするものも提案されている⁽³³⁾。

流速ベクトルを計算空間の成分で表わすことを考えるには、計算空間をリーマン空間と見なしてリーマン幾何学を使うと非常に見通しが良くなる。リーマン幾何学は一般相対性理論で盛んに使われる数学であり、流体力学に対してもその考え方はすでに導入されている⁽³⁴⁾⁽³⁵⁾が、BFC法との関係が研究されるようになったのは最近である。今までに紹介した研究のうち、リーマン幾何学を使って検討されているものもあるが不十分である。したがって本研究では、非圧縮性流れのためのBFC法として、反変物理成分を変数としてスタガード配置で計算する方法を提案すると同時に、これをリーマン幾何学の視点より検討する。

リーマン幾何学で使う諸量(計量テンソルやクリストッフェル記号)については単に数学の抽象として扱うだけでなく、初等幾何学的な性質との対応を考察す

る。その対応を踏まえた上で、計算空間の支配方程式に現れる追加項の物理的意味を明らかにする。さらに、流速の変数として反変物理成分が優れていることを示す。また、追加項の1つである遠心力項の風上化についての手法も紹介する。その後、キャビティ内自然対流や後段流れの計算例を示し、通常の長方形格子による差分計算との比較を行う。

II. リーマン幾何学

1. リーマン空間

リーマン空間は座標 ξ^i と $\xi^i + d\xi^i$ の距離 ds が、

$$ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j \quad (1)$$

で与えられる空間である⁽³⁶⁾。ここで、上下に現れる同じ添字は、3次元ならば1から3まで、2次元ならば1から2までの和を取るものとする。(1)式の g_{ij} は計量テンソルであり、デカルト座標系では単位行列になる。計量テンソルの行列式のルート($\sqrt{g}$)は座標変換のヤコビアンと等しく、以後 J と書くこととする。

ここで、物理空間は常にデカルト座標系で表わすとし、計算空間はリーマン計量が定義できるリーマン空間であると考ええる。しかしここで扱うリーマン空間は、物理空間から座標変換されたものであるからユークリッド空間であり、曲率テンソルの成分はすべてゼロになるという特殊な場合に限られる。

2. 反変ベクトルと共変ベクトル

ベクトルはリーマン空間において、反変ベクトルと共変ベクトルの2つの表示形がある。いま、座標変換として $\xi^i \rightarrow \xi'^i$ を考える。このとき、反変ベクトル U^i と共変ベクトル U_i はそれぞれ

$$U'^i = \frac{\partial \xi'^i}{\partial \xi^i} U^i \quad (2)$$

$$U'_i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi'^i} U_i \quad (3)$$

の座標変換の規則に従う。また、(2),(3)式は

$$U_i = g_{ij} U^j \quad (4)$$

の関係で結ばれている。なおデカルト座標系では反変ベクトルと共変ベクトルは同じになり、区別する必要がなくなる。

3. 絶対微分

絶対微分(共変微分) ∇_j を次のように定義する。

$$\text{スカラー: } \nabla_j \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \xi^j} \quad (5)$$

$$\text{反変ベクトル: } \nabla_j U^i = \frac{\partial U^i}{\partial \xi^j} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} U^k \quad (6)$$

$$\text{共変ベクトル: } \nabla_j U_i = \frac{\partial U_i}{\partial \xi^j} - \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} U_k \quad (7)$$

スカラーに対しては偏微分と全く同じ、ベクトルに関しては追加項がある。ここで $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$ はクリストッフェルの3添字記号で、計量テンソルで書けば、

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial \xi^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^l} \right) \quad (8)$$

である。リーマン空間では、偏微分だけでは(2),(3)式の座標変換規則には従わず、(5)~(7)式のように定義された絶対微分が(3)式の座標変換規則に従う共変ベクトルになる。クリストッフェル記号は2次元の場合に8種類出てくるが、 j と k の対称性により6種類に減る。

4. 絶対微分で書かれた非圧縮性流れの支配方程式

流速を反変成分で表わして非圧縮性流れの支配方程式を絶対微分によって書くと、

$$\text{連続の式: } \nabla_j U^j = 0 \quad (9)$$

Navier-Stokes方程式:

$$\frac{\partial U^i}{\partial t} = -U^j \nabla_j U^i - \frac{1}{\rho} g^{ij} \nabla_j P + \nabla_j [\nu (g^{jk} \nabla_k U^i + g^{ik} \nabla_k U^j)] \quad (10)$$

となる。(9),(10)式は、物理空間で成り立つ偏微分方程式中の偏微分を絶対微分で置き換えたものである。ただし、添字の上下を合わせるために、計量テンソルの逆行列 g^{ij} が圧力勾配項と拡散項に現れる。反変成分は計算空間の座標の方向の成分であるので、曲線格子においても成分を分けてスタガード配置にすることができる。

通常の偏微分で書かれた支配方程式は物理空間、すなわちデカルト座標系でしか成り立たない方程式である。そこで、円筒座標系や球座標系など座標系ごとに別々の支配方程式を書く必要がある。一方、絶対微分で記述した(9),(10)式は、一般座標系での支配方程式になっている。すなわち、ある座標系において計量テンソルを与えることによって、その座標系における支配方程式になるのである。あとは、計量テンソル、クリストッフェル記号の差分化を考えれば数値計算ができる。ThompsonらのBFC法では、物理空間の偏微分を計算空間の偏微分と関係づけて支配方程式の変換を行う。この方法でも得られる方程式は同じになるはずであるが、絶対微分による定式化の方が簡単で、得られた方程式に対する見通しも良くなる。

5. 支配方程式の物理成分化

本研究では、さらに支配方程式の物理成分化を行う。これは物理成分化の方が数値解析上有利だからである。まず、反変ベクトルに対する物理成分を次のように定義する^{(34),(35)}。

$$U^{(i)} = \sqrt{g_{ii}} U^i \quad (11)$$

ただし、ルート記号の中の計量については、添字の和をとる規則を保留する。元々の反変成分は、物理成分と区別する都合上、非物理成分と呼ぶことにする。

Demirdzicら⁽²⁸⁾は、計量テンソル成分、クリストッフェル記号、偏微分、絶対微分に対しても物理成分化を行っている。

$$g_{(ij)} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \quad (12)$$

$$\left(\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right) = \sqrt{\frac{g_{ii}}{g_{jj}g_{kk}}} \left(\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} - \delta_{ij}^k \frac{g_{jm}}{g_{jj}} \left\{ \begin{matrix} m \\ jk \end{matrix} \right\} \right) \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^{(j)}} = \frac{1}{\sqrt{g_{jj}}} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^j} \quad (14)$$

$$\nabla_{(j)} U^{(i)} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \xi^{(j)}} + \left(\begin{matrix} i \\ kj \end{matrix} \right) U^{(k)} \quad (15)$$

これらの式を使うことにより、非圧縮性流れの基礎方

Navier-Stokes 方程式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial t} = & -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \left[U^{(1)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^1} - \frac{g_{12}}{g_{11}} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} U^{(1)} U^{(1)} + \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} U^{(1)} U^{(2)} \right] \\ & -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \left[U^{(2)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{g_{12}}{g_{11}} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} U^{(1)} U^{(2)} + \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} U^{(2)} U^{(2)} \right] \\ & -\frac{\sqrt{g_{11}}}{\rho} \left[\frac{g_{22}}{J^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial \xi^1} - \frac{g_{12}}{J^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial \xi^2} \right] \\ & + \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial (J \tau^{(11)})}{\partial \xi^1} - \frac{g_{12}}{g_{11}} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} \tau^{(11)} + \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} \tau^{(21)} \\ & + \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial (J \tau^{(12)})}{\partial \xi^2} - \frac{g_{12}}{g_{11}} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} \tau^{(12)} + \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} \tau^{(22)} \end{aligned} \quad (19)$$

$U^{(2)}$ に関するNavier-Stokes方程式は省略する。ここで、 $\tau^{(ij)}$ は応力テンソルの成分で、

$$\tau^{(ij)} = \sqrt{g_{ii}g_{jj}} [g^{ik} \nabla_k U^j + g^{jk} \nabla_k U^i] \quad (20)$$

により計算する。応力テンソル $\tau^{(ij)}$ は j 方向の面に働く i 方向の力であり、力についてだけ物理成分化されている。第II-5節に示した物理成分化した偏微分やクリストッフェル記号を使った方が方程式を美しく書ける。しかし、BFC法では差分は計算空間上で行うので、偏微分については非物理成分表示にした。同様な理由で、応力テンソルについても添字の1つは非物理成分のままにしてある。クリストッフェル記号についても、後に非物理成分に対しての差分式を与えるので、それを使った。

これにSMAC法を適用する。まず、曲線格子上で変数のスタガード配置を行う。圧力および他のスカラー(温度や乱流エネルギー)をセル中心、流速を成分で分

程式は

$$\text{連続の式:} \quad \nabla_{(j)} U^{(j)} = 0 \quad (16)$$

Navier-Stokes方程式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} = & -U^{(j)} \nabla_{(j)} U^{(i)} - \frac{1}{\rho} g^{(ij)} \nabla_{(j)} P \\ & + \nabla_{(j)} [\nu (g^{(jk)} \nabla_{(k)} U^{(i)} + g^{(ik)} \nabla_{(k)} U^{(j)})] \end{aligned} \quad (17)$$

となる。

Ⅲ. 支配方程式の差分計算法

1. SMAC法の適用

非圧縮性流れの基礎式は前節で示したが、ここでは詳細な議論をするために2次元の方程式を細かく書き下すことにする。

連続の式：

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{J}{\sqrt{g_{11}}} U^{(1)} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{J}{\sqrt{g_{22}}} U^{(2)} \right) = 0 \quad (18)$$

離してセル境界の辺上に配置する(Fig. 1)。

Fig. 1 Computational cell and staggered arrangement of variables

次に、アルゴリズムは時間進行の非定常計算を行う。各タイムステップにおいて、

- (1) (19)式を陽的に計算し、仮の流速成分を求める。

- (2) 仮の流速成分の発散を(18)式より求めて、圧力修正量のポアソン方程式を解く。
- (3) 圧力修正量より、新しい時間の圧力と流速を求める。
- (4) k - ϵ 方程式の計算をする。
- (5) 温度方程式の計算をする。
- (6) タイムステップを進め、(1)に戻る。

時間進行の繰返し計算に入る前に、計量テンソルやクリストッフェル記号はあらかじめ計算しておく。

(1)で対流項は非保存形で計算する。計算空間での偏微分は常に単位長さでの差分になる。圧力勾配項では ξ^1 の微分は普通に差分化し、 ξ^2 の微分はFig. 2に示す4点を使って差分化する。拡散項については2段階で計算する。まず、応力テンソル成分を計算し、次にそれを使って拡散項の計算をする。応力テンソル成分 $\tau^{(1)}$ $\tau^{(2)}$ はセル中心に、 $\tau^{(1)2}$ $\tau^{(2)1}$ は格子点上に配置する。拡散項の微分項は保存形にする。

Fig. 2 Differencing of pressure gradient terms

(2)において、仮の流速の発散はセル境界上のフラックスの和として求める。これは、(18)式の左辺の積分をとることによって得られる。圧力のポアソン方程式は、(19)式の圧力勾配項と(18)式を合わせて得られるが、どちらの式も差分化した後で合わせる。通常の差分法では、ポアソン方程式は5点差分になるが、BFC法の一般的形状の格子では斜め方向の4点を加えた9点差分になる。

乱流の場合は k - ϵ 方程式、温度計算をする場合は温度方程式を解く。これらの変数はすべてスカラーであり、方程式は保存性を満たすように差分化する。

2. 境界条件の設定

BFC法であってもスタガード配置をとるので、境界条件としては通常の差分法の方法を踏襲する。まず壁面でのnon-slipと対称境界でのfree-slip条件は、境界

面を横切る流速成分をゼロとおき、境界面に平行な成分は、外側に仮想セルを考えてそこでの流速として、non-slipの場合は反対の流速、free-slipの場合は同じ流速を与える。圧力勾配項のうち、Fig. 2の中で ξ^2 方向の項の計算に使う4点のうち、2点が境界の外側になってしまうので、これについては境界のセルの2点を代用して計算する。圧力のポアソン方程式については、流速に対する境界条件を圧力のポアソン方程式を作る際に考慮すればよい。

流入流出境界については流速または圧力を固定する。流速固定はセルの1辺の流速を固定する。境界に平行な成分はnon-slip条件を適用する。圧力固定の時は、流出境界側の1辺の流速を連続の式を満たすように代数的に決める。

3. リーマン幾何学諸量の差分計算法

(18)~(20)式で計算空間上の支配方程式が与えられたわけであるが、数値計算のためには、それらの中で使われている計量テンソル、ヤコビアン、クリストッフェル記号についての差分式を決める必要がある。本研究ではこれを2段階に分けて行う。Demirdzicらは内挿関数をセルに対して与え、その係数を決めることで微係数も決まるという方法をとる。これは有限要素法の方分野でいうところのアイソパラメトリック変換であるが、Koshizukaら⁽¹¹⁾もアイソパラメトリック変換を使ってBFC法による計算をしている。しかしこの手法では、セルの形状変化が滑らかでないと精度が著しく悪くなる。また、後に述べる追加項の保存性からも望ましくない。本研究では、以下に示す方法で計算する。

物理空間のデカルト座標を x^i とし、計算空間の座標を ξ^i として、ある1つのセル付近にある6つの格子点の物理空間での座標をFig. 1のように与える。まず第1段階として、座標変換の1階と2階の微係数を、各セル、各格子点に対して次の差分式によって与える。

セルに対しては、

$$\begin{cases} x_{\xi} = \frac{(x_4 + x_2) - (x_3 + x_1)}{2} \\ x_{\eta} = \frac{(x_4 + x_3) - (x_2 + x_1)}{2} \\ y_{\xi} = \frac{(y_4 + y_2) - (y_3 + y_1)}{2} \\ y_{\eta} = \frac{(y_4 + y_3) - (y_2 + y_1)}{2} \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} x_{\xi\eta} = x_4 + x_1 - x_3 - x_2 \\ y_{\xi\eta} = y_4 + y_1 - y_3 - y_2 \end{cases} \quad (22)$$

格子点 (x_4, y_4) に対しては、

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\xi} = \frac{x_5 - x_3}{2} \\ x_{\eta} = \frac{x_6 - x_2}{2} \\ y_{\xi} = \frac{y_5 - y_3}{2} \\ y_{\eta} = \frac{y_6 - y_2}{2} \end{array} \right. \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\xi\xi} = x_5 - 2x_4 + x_3 \\ x_{\eta\eta} = x_6 - 2x_4 + x_2 \\ y_{\xi\xi} = y_5 - 2y_4 + y_3 \\ y_{\eta\eta} = y_6 - 2y_4 + y_2 \end{array} \right. \quad (24)$$

とする。2階の微係数については、セルでは交差微分だけ、格子点ではそれら以外のものだけを計算する。この配置では、格子形状の性質がぼやけずに最も局所的に計算できる。1階の微係数については最適ではないが、クリストッフエル記号の計算には2階の微係数の方が重要と考えてそちらの配置を優先した。

第2段階では、計量テンソル、ヤコビアン、クリストッフエル記号を計算する。これらはすべて座標変換の1次と2次の微係数で表わすことができる。

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{11} = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \\ g_{22} = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \\ g_{12} = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} \end{array} \right. \quad (25)$$

$$J = x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi} \quad (26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right\} = \frac{1}{J} (y_{\eta}x_{\xi\xi} - x_{\eta}x_{\xi\xi}) \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right\} = \frac{1}{J} (y_{\eta}x_{\xi\eta} - x_{\eta}y_{\xi\eta}) \\ \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \right\} = \frac{1}{J} (y_{\eta}x_{\eta\eta} - x_{\eta}y_{\eta\eta}) \\ \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \right\} = \frac{1}{J} (x_{\xi}y_{\eta\eta} - y_{\xi}x_{\eta\eta}) \\ \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right\} = \frac{1}{J} (x_{\xi}y_{\xi\eta} - y_{\xi}x_{\xi\eta}) \\ \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right\} = \frac{1}{J} (x_{\xi}y_{\xi\xi} - y_{\xi}x_{\xi\xi}) \end{array} \right. \quad (27)$$

クリストッフエル記号のうち、計算に必要なものは4種類で、 $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right\}$ と $\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \right\}$ は支配方程式に出てこない。計量テンソル、ヤコビアン、クリストッフエル記号のうちの2種類 $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right\}$ と $\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right\}$ は、(21), (22)式の結果を使ってセルで計算する。残りの2種類のクリストッフエル記号 $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right\}$ と $\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right\}$ については、(23), (24)式を使って格子点で計算する。クリストッフエル記号をセルと格子点と2箇所に分けた理由は、クリストッフエル記号の中に出てくる2次の微係数をどちらで計算しているかによる。

クリストッフエル記号や計量テンソルは、セル境界

の辺上など、配置されたところ以外の値が必要になることもある。この時は最も近い2点あるいは4点の単純な平均化操作で値を求める。リーマン幾何学諸量については、できるだけ局所化させることが望ましいが、差分計算をする以上、ある程度平均化されてしまうことは避けられない。

IV. Navier-Stokes方程式への追加項

1. リーマン幾何学の諸量の初等幾何学的意味

リーマン幾何学では、計量テンソルであるとか、クリストッフエル記号であるとか、あまり馴染みのない諸量が頻繁に出てくる。それらは一般化された数学として美しいものであり、方程式の取扱いの上で大変便利なものである。しかし、従来の計算法との関連や現実の個々の問題への適用を考えるためには、抽象的なものとしておくだけでなく、初等幾何学的な意味との対応をつけるべきである。

まず、計量テンソルの対角成分は、物理成分の定義から、そのルートが格子幅に相当する。すなわち、

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = \sqrt{g_{11}} \\ \Delta y = \sqrt{g_{22}} \end{array} \right. \quad (28)$$

リーマン計量の定義より、非対角成分については、 ξ^1 方向と ξ^2 方向のなす角を α とすると、

$$g_{12} = \sqrt{g_{11}g_{22}} \cos \alpha \quad (29)$$

になる。ヤコビアンは計算空間の単位面積に対応する物理空間の面積になる。

$$J = \sqrt{g_{11}g_{22}} \sin \alpha \quad (30)$$

実際のところ、(21), (26)式によって得られるヤコビアンは、初等幾何学的に求めた四角形のセルの面積と同じである。これはセルに配置される物理量の保存性を保つには好都合である。

クリストッフエル記号 $\left\{ \begin{array}{l} i \\ j \end{array} \right\}$ は、 j 方向の単位ベクトルを k 方向に単位長さだけ平行移動した時に、 i 方向成分がどのくらい変化するかを表わしている。物理的クリストッフエル記号については、単位長さが物理空間のもので考えればよい。セルに配置されている2種類のクリストッフエル記号 $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right\}$ は、セルの台形状の歪み具合を表わしている。また、格子点に配置されている残り2つのクリストッフエル記号 $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right\}$ は、格子の曲率を表わすものである。まとめたものをFig. 3に示す。

2. Navier-Stokes方程式の追加項の物理的意味

Navier-Stokes方程式を絶対微分で書くことにより、デカルト座標系にはない幾つかの追加項が現れる。こ

Fig. 3 Meanings of quantities used in Riemann geometry

ここでは、(19)式の中の追加項についてその物理的意味を考察する。

まず対流項であるが、これには追加項が4つある。

(19)式の第2行目の $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 22 \end{smallmatrix} \right\} U^{(2)} U^{(2)}$ は格子の曲率と $U^{(2)} U^{(2)}$ に比例する項であるから、遠心力と考えられる (Fig. 4(a))。第1行目にある $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 12 \end{smallmatrix} \right\} U^{(1)} U^{(2)}$ は格子の台形上の歪みと $U^{(1)} U^{(2)}$ に比例する項であるから、いわゆるコリオリの力に相当する (Fig. 4(b))。残りの g_{12} を含む2つの項については、元が $U^{(2)}$ に働く遠心力とコリオリの力であり、格子が非直交である場合には、 $U^{(1)}$ にも分力として働くという効果を表わしている。

圧力勾配項には g_{12} を含む項が1つあるだけである。これは $U^{(2)}$ に働く圧力勾配項の非直交時の分力である。

拡散項の追加項4つについても、(19)式の第5行目にある $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 22 \end{smallmatrix} \right\} \tau^{(2)2}$ は、格子の曲率と垂直応力に比例する項であり、Fig. 4(c)に示すように、リングを締め付ける力に相当する。また、第4行目の $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 12 \end{smallmatrix} \right\} \tau^{(2)1}$ は、台形上の歪みと剪断応力に比例する力で、Fig. 4(d)にあるように、台形の2つの斜辺に働く剪断力が完全に打ち消し合わないことによる力である。 g_{12} を含む項は対流項の場合と同様で、 $U^{(2)}$ に働くそれらの力の分力である。

追加項のうち、 g_{12} を含むものはすべて他の流速成

Fig. 4(a)~(d) Physical meanings of additional terms in Navier-Stokes equation written with absolute differentiations; (a) Centrifugal force, (b) Coriolis force, (c) Force derived from normal stress, (d) Force derived from shear stress

分に働く g_{12} を含まない項の分力である。純粋な追加項は全部で4つしかない。

3. 数値的安定性から見た物理成分と

非物理成分との違い

本研究では流速の反変物理成分を変数として採用したが、非物理成分、すなわち反変ベクトルの成分そのものを変数としてもスタガード配置にすることは可能であり、そのような計算例も多い^{(21)~(25)}。第II-4, -5節で、物理成分および非物理成分を変数としたときの支配方程式をそれぞれ示した。数学的にはどちらの式も同じであるが、差分化して数値計算をする時には異なってくる。

対流項のみを取り出して考察する。反変物理成分を変数とした時は(19)式に示されている。非物理成分を変数とした時は

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^1}{\partial t} = & - \left[U^1 \frac{\partial U^1}{\partial \xi^1} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} U^1 U^1 + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} U^1 U^2 \right] \\ & - \left[U^2 \frac{\partial U^1}{\partial \xi^2} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} U^1 U^2 + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} U^2 U^2 \right] \end{aligned} \quad (30)$$

となる。(19)式と比べて追加項 $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\}$ と $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\}$ が異なっている。前者に関しては、 U^1 の時間変化に対して $U^1 U^1$ が影響する。したがって、 U^1 の符号にかかわらず一定の符号を持った項になる。 U^1 の符号とこの追加項の符号が一致したときは、 U^1 の微小変化に対して正のフィードバックがかかり、これがもし対流項や拡散項の負のフィードバックより大きくなると、 U^1 は爆発的に発散するはずである。

物理成分を使った場合には、この項は $-\frac{g_{12}}{g_{11}} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\}$ を係数に持ち、 U^2 に対する遠心力項の分力である。一方、非物理成分を使った場合はクリストッフェル記号 $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\}$ で決まる。この記号の初等幾何学的意味は、 ξ^1 方向の格子幅の変化である。非物理成分はその定義から格子幅で無次元化した量であると考えられるので、格子幅が変化することによって値が変わる。したがって、微分項は格子幅が変化したことの影響を受けるようになり、その効果を打ち消すように追加項が現れるわけである。

いま、長方形格子を考えて、格子変化により非物理成分の対流項が不安定になる条件を理論的に求めてみよう。ある流速成分 U^1 が2つのセルの間に配置されていてこれを U_0 とし、左側を U_- 、右側を U_+ とする。また、左側のセルの格子幅を Δ_- 、右側を Δ_+ とする。(30)式の第1行目の微分項と追加項の第1項の差分式は

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = -U_0(U_0 - U_-) + \frac{2(\Delta_+ - \Delta_-)}{\Delta_+ + \Delta_-} (U_0)^2 \quad (32)$$

となる。ただし、差分スキームは風上差分を採用している。この時、 $U_0 U_0$ の係数が正になる条件は

$$\Delta_+ < \frac{1}{3} \Delta_- \quad (33)$$

となる。

実際に数値的爆発が起こるかどうかは計算領域全体が関係してくるので、1つの例題を計算して試してみることにする。その例題は、発達する2次元平行平板間流れで、格子形状をFig.5に示す。

Fig. 5 Nonuniform grid for developing wall shear flow

ある位置から急に格子幅が Δ_- から Δ_+ に短くなるとする。格子幅の変化の割合 Δ_+/Δ_- をいろいろ変えて、収束までに要した時間を進める反復計算の回数を比較すると、Fig.6のようになる。(33)式の理論的に導かれた条件付近から、急に回数が増加しているのがわか

Fig. 6 Time marching iteration number required for convergence when non-physical components are used on Fig.5 grid

る。なお、どの計算でも同じ差分計算法(SMAC法, 風上差分, SLOR法等)を用いた。

また、格子の変化率が0.2の時、物理成分を使用したもの、非物理成分を利用したものの流速ベクトル図を、それぞれFig.7(a),(b)に示す。物理成分の場合は、左側から一様な分布で流入した流れがだんだんと放物線分布に発達していく様子がわかる。しかし、非物理成分の場合は、格子幅が変わるところから流出境界にかけて、非現実的な流れのモードが極めて大きくなっているのがわかる。

Fig. 7 (a),(b) Flow velocity vectors calculated by (a) physical components, (b) nonphysical components

このように非物理成分を基本変数とする場合には、格子幅が急に3倍以上の変化をするときに数値的爆発を起こす。差分スキームが風上差分でなく高次のスキームであれば、不安定性発生の条件はさらに厳しくなる。仮に安定条件を満たしていたとしても、格子幅の変化があれば流れが影響を受ける。物理成分を使ってもこの追加項が大きくなることはあるが、極めて格子が歪んだ場合に限られる。したがって、数値的安定性の視点からは物理成分を使った方が良いことがわかる。

4. 追加項の保存性

差分計算の枠組みの中で保存性を有するということは、ある物理量についてセルの面積を乗じてから、すべてのセルについて加えたものが一定であるということを目指す。対流項や拡散項はこの意味で保存性を持たせることができる。ここで議論するのはリーマン幾何学の導入により発生した追加項の保存性についてである。

対流項の追加項は遠心力とコリオリ力である。いずれも(19)式では体力力のように扱われていて、従来の

意味での保存性の議論の上に乗らない。そこで追加項については、その元となる幾何量の保存性で議論することにする。

例として、 $U^{(2)}$ に働く遠心力 $\left\{\frac{2}{11}\right\} U^{(1)} U^{(1)}$ を考える。クリストッフェル記号 $\left\{\frac{2}{11}\right\}$ は、 x^1 と ξ^1 のなす角度を θ_x とすると、

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial \xi^1} = \frac{J}{g_{11}} \left\{\frac{2}{11}\right\} \quad (34)$$

の関係がある⁽²⁸⁾。角度 θ_x の積分値を β とすると、

$$\beta = \int \frac{\partial \theta_x}{\partial \xi^1} d\xi^1 \quad (35)$$

であるから、ある ξ^1 方向の格子線に沿った各格子点における $\frac{J}{g_{11}} \left\{\frac{2}{11}\right\}$ の和は、いかなる格子を切ったとしても一定値 β になるはずである。

実際に、Fig. 8の格子における保存される幾何量について見てみる。 ξ^1 方向の格子線に下から1~9の番号をつける。どの格子線も最初と最後の向きは等しいので、 β はゼロである。

Fig. 8 Distorted grid for straight and uniform flow

Fig. 9に種々の幾何量の和が各格子線について示されている。保存幾何量である $\frac{J}{g_{11}} \left\{\frac{2}{11}\right\}$ は、どの格子線でもほとんどゼロになっている。他の追加項についても同様な考察により保存幾何量を求めることができる。

5. 遠心力項の風上化

リーマン幾何学による追加項の効果を見るために、一様になるべき流れを歪んだ格子で計算してみる。Fig. 8の格子において、上面と下面をfree-slipにして一様な流速で流入させる。4つのケースについて計算を行い、結果の流速ベクトルをFig.10(a)~(d)に示す。

4種類の違いを以下に説明しながら計算結果を考察する。(a)はポテンシャル流れである。圧力勾配項の追加項しか入っていない。流速分布はほぼ一様なものになっている。(b)は対流項,拡散項の微分項のみを入れ,追加項については除いたものである。この場合は格子

に沿った流れになってしまう傾向が見られ,正解から大きく外れてしまう。(c)は追加項を全部入れたものである。流入境界付近と流出境界付近の格子が急に曲がるところで流れが歪んでいるのがわかる。(d)はこの(c)における流れの歪みを改善するために遠心力項の風上

Fig. 9 Conservative geometrical quantity on each line of Fig. 8 grid;

$$AS = \sum \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\}, \quad CAS = \sum \left\{ \frac{J}{g_{11}} \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\}, \quad S = \sum \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\}, \quad CS = \sum \left\{ \frac{J}{g_{11}} \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\}$$

Fig. 10(a)~(d) Flow velocity vectors; (a) Potential flow, (b) No additional terms in convection and diffusion, (c) With all additional terms, (d) With upwinding of centrifugal force

化を行なっている。結果は、流れの歪みは取れて滑らかになっている。

(c)では迫力項がすべて組み込まれているのに、流入境界と流出境界付近の流れの歪みが大きい。これは遠心力項の計算に原因がある。この計算ではクリストッフェル記号 $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 11 \end{smallmatrix} \right\}$ による $U^{(2)}$ に働く遠心力項が効いている。ここで、この遠心力項を計算する際に、 $U^{(2)}$ と $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 11 \end{smallmatrix} \right\}$ の配置されている位置の違いが問題になる。すなわち、 $U^{(2)}$ はセル境界の辺上に配置されているのに、 $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 11 \end{smallmatrix} \right\}$ は格子点に配置されている。第Ⅲ-3節の説明にあるように、この場合は両隣の格子点の $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 11 \end{smallmatrix} \right\}$ を平均して辺上の値としている。したがって、ある格子点だけに曲率が出てくるような格子の場合に、その格子点1つ手前と1つ先の $U^{(2)}$ に対して遠心力が働くことになる(Fig.11)。そのため、流れは曲がり角の手前から遠心力を感じるので、角を迂回するように流れる。

Fig. 11 Centrifugal force at sharply bended grid

これを防ぐために、遠心力項の風上化を考案した。辺における遠心力を計算する際に、風上側の格子点のクリストッフェル記号を使うのである。そうすると、角を過ぎてから遠心力を感じるようになり、流れが迂回しなくなる。ただし、前節で議論した追加項の保存性を保つために、格子点での保存幾何量に対して風上化を行うものとする。

V. 通常の差分法とBFC法との違い

1. 形状模擬性

通常の差分法では、格子形状が長方形に限られるので、壁面形状が斜面や曲面の場合には長方形格子の階段で近似せざるを得ない。BFC法ではそういった面に沿って格子を切れるので、壁に沿った滑らかな格子にすることができるし、壁近傍に格子を集中することも容易である。また、流れに沿うように格子が切れるので、数値拡散を小さくすることも可能である。通常の差分法の枠組みの中でもVOF法⁽⁸⁷⁾や宮田らの方法⁽⁸⁸⁾

では、長方形格子の中に境界を設定できる工夫があり、階段近似よりは良いと思われるが、BFC法に比べれば劣るであろう。本章では2つの計算例を示し、BFC法の形状模擬性について検討する。

はじめに、斜面を有するキャビティ内の自然対流問題について示す(Fig.12)。この問題は、タンク型FBRの事故時における炉心の自然対流による熱除去に関して、簡単なモデル化したものである。除熱量を精度良く計算するためには、複雑な形状をしたプレナムをどのような格子で切るかが重要である。

Fig. 12 Natural convection problem in cavity possessing slant wall

格子の影響を比較するため、Fig. 12の形状に対して長方形格子で近似したもの(Fig. 13(a))と境界適合格子で近似したもの(Fig. 13(b))の2種類を用意した。

(a)

(b)

Fig. 13 Grids for natural convection problem; (a) Rectangular, (b) Boundary-fitted

温度はセル中心に配置し、輸送方程式を

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla_j (U^j T) + \nabla_j \left[\frac{\nu}{Pr} g^{jk} \nabla_k T \right] \quad (36)$$

とした。対流項、拡散項共に保存形にしてある。浮力は Boussinesq 近似を使う。プラントル数 Pr を 0.71 とし、加熱部と冷却部では望むレイリー数 Ra

$$Ra = \frac{g\beta(T_h - T_c)l^3}{\nu^2} Pr \quad (37)$$

になるように、温度一定の境界条件を与えている。 Ra は 10^7 まで 6 通りについて計算した。また、流速に対する境界条件について、non-slip と free-slip の 2 通りをそれぞれ計算した。

計算結果より、全熱伝達量の比較を Table 1 に示す。ここで $Ra=0$ で長方形格子での計算を 1.0 とおき、基準とする。 $Ra=0$ は熱伝導のみで流動が全くない状況であるが、長方形格子と境界適合格子とで 5.2% の差がある。 Ra が増えると熱伝達量は増えるが、格子による熱伝達量の違いも拡大する。表の一番右の B/R は、“長方形格子の熱伝達量/境界適合格子の熱伝達量”である。non-slip, free-slip どちらの場合でも Ra が 10^5 の時に最も大きくなる。

Table 1 Heat transfer ratio; 1.0 for $Ra=0$ and rectangular grid

	Rectangular	BFC	B/R
Non-slip			
$Ra=0$	1.000	1.052	1.052
10^3	1.004	1.061	1.057
10^4	1.092	1.195	1.094
10^5	2.282	2.582	1.131
10^6	5.755	6.440	1.119
10^7	9.502	10.16	1.070
Free-slip			
$Ra=10^3$	1.014	1.087	1.072
10^4	1.369	1.649	1.205
10^5	3.616	4.601	1.272
10^6	7.114	8.539	1.200
10^7	10.13	11.32	1.117

最も計算結果に差が現れた $Ra=10^5$, free-slip の時の流速ベクトル図を Fig. 14 (a), (b) に、等温線図を Fig. 15 (a), (b) にそれぞれ示す。まず流速ベクトル図を比べてみると、長方形格子を使った場合には階段で近似した辺りの流れが乱されているのがわかる。一方、境界適合格子を使った場合では、スムーズな流れになっている。等温線図を比べてみると、長方形格子では前述の乱れた流れによって斜面での温度勾配が緩やかになっているが、境界適合格子では右側面で冷やされた液

flow velocity — 0.0013 m/s

(a)

flow velocity — 0.0014 m/s

(b)

Fig. 14(a), (b) Flow velocity vectors, $Ra=10^5$ free-slip; (a) Rectangular grid, (b) Boundary-fitted grid

体が斜面に沿って薄い層をなして下降してくるのがわかる。また、キャビティー内の温度について、境界適合格子の方が全体的に高い。この斜面の境界条件の設定の違いによって、流れの様子が異なってきて、熱伝達量に差が出てくるものと思われる。

(a)

(b)

Fig. 15 Isothermal lines, 20 equal divisions between hot and cold temperatures of walls, $Ra=10^5$ free-slip; (a) Rectangular grid, (b) Boundary-fitted grid

次に、後段流路の計算を行なった。Fig. 16 に示すように、後段のところで流れが剝離し、下流で再付着する。ここでは、急拡大部の角のところを滑らかにした

Fig. 16 Flow over backward-facing step

ものについて形状模擬性を見る。計算した形状は、急拡大の角度が90°で切り立った角のもの、45°で同じく角張ったもの(45°角)と滑らかな曲面のもの(45°曲)の計3種類である。それに対して、90°のものは長方形格子だけ、残りの2種類の流路には長方形格子と境界適合格子の2つを用意した(Fig.17)。

Fig. 17 Grids for back-step flow;

- (a) Rectangular for 90° sharp edge
- (b) Rectangular for 45° sharp edge
- (c) Boundary-fitted for 45° sharp edge
- (d) Rectangular for 45° curved edge
- (e) Boundary-fitted for 45° curved edge

流入境界には一様な流速分布を与え、流出境界は急拡大部下流約20H(Hは後段高さ)のところに圧力固定境界条件を与えた。層流で壁境界を non-slip としたときの再付着点距離を Fig. 18 に示す。どの流路, どの格子を用いた場合でも, 再付着点距離は1Hの間に分布していて, 格子による差はほとんどない。

次に, k - ϵ モデルによる乱流解析を行なった。モデルは Launder-Spalding の標準的なもの⁽³⁹⁾を絶対微分の方程式に直して導入した。ここに示すと,

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\nabla_j(U^j k) + \nabla_j \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) g^{jl} \nabla_l k \right] + S - \epsilon \quad (38)$$

Fig. 18 Reattachment length of laminar flow

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -\nabla_j(U^j \epsilon) + \nabla_j \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) g^{jl} \nabla_l \epsilon \right] + C_1 \frac{\epsilon}{k} S - C_2 \frac{\epsilon^2}{k} \quad (39)$$

ここで, S は乱流エネルギーの生成項で,

$$S = \nu_t (\nabla_j U^j) g_{il} (g^{im} \nabla_m U^l + g^{lm} \nabla_m U^l) \quad (40)$$

である。壁境界条件は対数則の壁関数を使用した。結果は, Fig.19に示されているように, 格子による差が生じた。同じ流路に対して, 境界適合格子を使った方は45°角も45°曲も2~3H再付着点が短くなった。長方形格子を使った場合には, 45°角も45°曲も階段状に壁面を近似しているため, そもそも大きな差が生じるとは考えられない。境界適合格子を使った場合には, 逆に形状が角であっても格子の大きさのレベルでは曲線になっていると考えた方がよく, 再付着点距離が短くなったと思われる。

従来より実験も計算もよく行われている90°角の流路では, 本計算では5.5~5.6Hだが, Eaton-Johnston のレビュー⁽⁴⁰⁾によれば, 実験では7.5H程度である。これはおよそ2Hの過小評価であるが, 通常の k - ϵ モデルを使う場合にはそうなることがすでに指摘されている⁽⁴¹⁾。

Fig. 19 Reattachment length of turbulent flow calculated by $k-\epsilon$ model

2. 計算容量と計算時間

通常の差分法と比べた時に、BFC法による計算の精度の向上の代償として、容量や計算時間がどの程度増加するかを検討しておくことは重要である。

まず容量であるが、これは境界適合格子を使うことで確実に増加する。すなわち、セル形状が長方形格子に限られる場合に比べて、セル形状の自由度が増加する分必要な容量は増えるわけである。Fig.20(a),(b)に、2次元の場合と3次元の場合で、セル数の配列が必要な変数や定数の数がどのくらい増加するかを示した。図中の‘variables’は古い時刻と新しい時刻の流速と圧力の変数、‘stresses’は応力テンソル成分で、どちらも通常の差分法と同じ容量でよい。‘Laplacean’は圧力ポアソン方程式の係数で、BFC法では斜め方向の要素が加わり増加する。さらに、格子点の座標、計量テンソル、ヤコビアンなどの‘metrics’、クリストッフェル記号の‘symbols’は、BFC法にのみ必要である。これらを合わせると、BFC法では2次元の時は約2倍、3次元の時は約3倍容量が増加することがわかる。

計算時間については、前節で示した後段流路のケー

Fig. 20 Computation storage of arrays needed for BFC code and conventional FDM code

スについて Table 2 にまとめる。通常の差分法のコードの代わりに、本研究で使用しているBFCコードで不必要な部分はすべてコメント文にして用いた。長方形格子の計算例からは、BFCコードでは追加項が多いにもかかわらず、計算時間の増加は17%であった。これは圧力のポアソン方程式の解法として、ここではSLOR法を使用しているためである。圧力のポアソン方程式は通常の差分法では5点差分、BFC法では9点差分になるが、SLOR法ではこの違いが計算時間にあまり影響を与えない。したがってSLOR法を使う限りどの問題であっても、計算時間の増加は本節で取り上げた例とはほぼ同様な結果になるであろう。

Table 2 Computation time by BFC code and conventional FDM code for back-step flow

	Rectangular grid		Boundary-fitted grid
	FDM	BFC	BFC
Computation time	17.4	20.3	18.6
Time iteration	1,770	1,770	1,853
Mesh size	738	738	800

BFC法を使うと、計算容量も計算時間も共に増加するが、これはあくまで同じ数のセルがある場合について比較したものである。通常の長方形格子では、部分的に細かい格子を切ろうとした時に、必要のない所まで細かく切らなければならない場合が多い。

一方、境界適合格子では、壁面に沿った部分だけを細かくできるので、同じ精度を出すために必要なセルの数を低減することができる。本研究における自然対

流の計算例でも, Fig. 13(a), (b)を見比べてみれば, 境界適合格子の方がセルの総数は少なくなっている。

なお, 本研究で示した計算に使った格子は, 他の入力データも含めてパーソナルコンピュータ上で対話式に作成するツール⁽⁴²⁾を開発し, それを利用して作成した。

VI. 結 論

本研究ではリーマン幾何学を使い, 非圧縮性流れのためのスタガード配置によるBFC法について研究を行い, 次のことを明らかにした。

- (1) 絶対微分による2次元Navier-Stokes方程式に現れる追加項のうち, 4つは遠心力などの物理的意味を持ち, 残りは格子が非直交の時に生じる分力である。
- (2) 追加項の数値的安定性より, 流速の変数として非物理成分を使うよりも, 物理成分を使う方がよい。
- (3) 追加項の保存性は, それを決める幾何量に対して定義できる。
- (4) 急に格子の向きが変わるところで流れが迂回するという問題点は, 幾何量の風上化を行うことで避けられる。
- (5) 本研究で提案するリーマン幾何学諸量の差分計算法は, 格子形状をできる限り局所的に反映できるものであり, 追加項の保存性も有する。

さらに, 通常の長方形格子による差分計算と本手法による計算を比較検討し, 次のことがわかった。

- (1) 形状近似の影響について: FBR上部プレナム内自然対流を単純化した計算例では, 熱伝達量が境界適合格子を用いた方が大きくなる。 k - ϵ モデルを使った後段流路の乱流計算において, 急拡大部の形状を滑らかに切った境界適合格子では再付着点距離が短くなる。
- (2) 計算機容量は従来の2~3倍になる。
- (3) 計算時間については10~20%程度増加する。

— 参 考 文 献 —

- (1) 三木一克, 高木敏行, 内川貞夫: 原子力誌, 27(6), 497~506 (1985).
- (2) THOMPSON, J.F., THAMES, F.C., MASTIN, C.W.: *J. Comput. Phys.*, **24**, 274~302 (1977).
- (3) STEGER, J.L.: *AIAA J.*, **16**, 679~686 (1978).
- (4) UCHIKAWA, S.: *Nucl. Sci. Eng.*, **85**, 36~44 (1983).
- (5) MIKI, K., TAKAGI, T.: *J. Comput. Phys.*, **67**, 263~278 (1986).
- (6) PATANKAR, S.V. (水谷幸夫, 香月正司訳): “コンピュータによる熱移動と流れの数値解析”, (1985), 森北出版.
- (7) HARLOW, F.H., WELCH, J.E.: *Phys. Fluids*, **8**, 2182~2189 (1965).
- (8) AMSDEN, A.A., HARLOW, F.H.: *LA-4370*, (1970).
- (9) HIRT, C.W., NICHOLS, B.D., ROMERO, N.C.: *LA-5852*, (1975).
- (10) RHIE, C.W., CHOW, W.L.: *AIAA J.*, **21**, 1525~1532 (1983).
- (11) KOSHIZUKA, S., OKA, Y., KONDO, S., TOGO, Y.: *J. Comput. Phys.*, **72**, 444~468 (1988).
- (12) KASHIWA, B.A.: *LA-10854-MS*, (1986).
- (13) KAWAI, H., SAWADA, T., TANAHASHI, T.: *Proc. Int. Conf. Comput. Eng. Sci.*, 52 iv (1988).
- (14) HIRT, C.W., AMSDEN, A.A., COOK, J.L.: *J. Comput. Phys.*, **14**, 227~253 (1974).
- (15) 梅垣菊男: 機論B, **54**, 2399~2407 (1988).
- (16) AMSDEN, A.A., RAMSHAW, J.D., CLOUTMAN, L.D., O'ROURKE, P.J.: *LA-10534-MS*, (1985).
- (17) LAPWORTH, B.L.: *Int. J. Num. Methods Fluids*, **8**, 387~404 (1988).
- (18) SHYY, W.: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **53**, 47~65 (1985).
- (19) 大宮司久明, 山本 悟: 機論B, **52**, 248~254 (1986).
- (20) 大宮司久明, 山本 悟, 本橋康夫: 同上 **53**, 393~399 (1987).
- (21) 大宮司久明, 申 炳 録, 井小萩利明: 第2回数値流体力学シンポジウム, 15~22 (1988).
- (22) BABA, N., MIYATA, H.: *J. Comput. Phys.*, **69**, 362~396 (1987).
- (23) MIYATA, H., SATO, T., BABA, N.: *ibid.*, **72**, 393~421 (1987).
- (24) YANG, H.Q., YANG, K.T., LLOYD, J.R.: *Ref. 13*, 55 iii.
- (25) WATANABE, Y., OSHIMA, Y.: *Proc. ISCFD*, 659~664 (1989).
- (26) POPE, S.B.: *J. Comput. Phys.*, **26**, 197~217 (1978).
- (27) RASTOGI, A.K.: *J. Fluids Eng.*, **106**, 262~269 (1984).
- (28) DEMIRDZIC, I., GOSMAN, A.D., ISSA, R.I., PERIC, M.: *Comput. Fluids*, **15**, 251~273 (1987).
- (29) 越塚誠一, 岡 芳明, 近藤駿介: 文献20, 583~586.
- (30) 越塚誠一, 岡 芳明(矢川元基編): “計算力学I”, 71~82 (1989), 養賢堂.
- (31) ROSENFELD, M., KWAK, D., VINOKUR, M.: *AIAA Paper* 88-0718, (1988).
- (32) DAVIDSON, L., HEDBERG, P.: *Int. J. Num. Methods Fluids*, **9**, 531~540 (1989).
- (33) KARKI, K.C., PATANKAR, S.V.: *AIAA J.*, **27**, 1167~1174 (1989).
- (34) ERINGEN, A.C.: “*Nonlinear Theory of Continuous Media*”, (1962), McGraw-Hill.
- (35) 玉井信行: “土木工学体系7, 連続体の力学(II)”, (1979), 彰国社.
- (36) 矢野健太郎: “リーマン幾何学入門”, (1971), 森北出版.
- (37) HIRT, C.W., NICHOLS, B.D.: *J. Comput. Phys.*, **39**, 201~225 (1981).
- (38) 李 永 吉, 宮田秀明: 文献20, 247~250.
- (39) LAUNDER, B.E., SPALDING, D.B.: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **3**, 269~289 (1974).
- (40) EATON, J.K., JOHNSTON, J.P.: *AIAA J.*, **19**, 1093~1100 (1981).
- (41) 小林敏雄, 森西洋平, 呉 健 済, 佐田幸一: 文献20, 371~374.
- (42) KOSHIZUKA, S., OKA, Y., TOGO, Y.: *Ref. 13*, 7 i.