研究論文

967. 特性多項式解析法に基づく高次差分 LECUSO スキームの数値振動解析

酒井 勝弘*

(1991年4月3日受理)

*Numerical Oscillations Analysis on High-Order LECUSO Scheme
Based on Characteristic Polynomial Technique*

By Katsuhiro SAKAI

High-order difference schemes for thermohydraulic equations tend to show solutions suffering from numerical oscillations. Basic considerations on the occurrence and behaviors of numerical oscillations are presented, and two aspects of dynamic oscillations and static oscillations in the numerical oscillations are pointed out. A practically useful method for static numerical oscillations analysis based on a characteristic polynomial technique is proposed.

The LECUSO scheme, which determines the upwinding weight such that the difference scheme satisfies an analytical solution of the convection-diffusion equation, is extended so as it can be used in nonuniform mesh size grids. The effects of computational grids on static numerical oscillations are discussed with the characteristic polynomial analysis on the extended LECUSO scheme. It is found that the extended LECUSO scheme shows solutions free from numerical oscillations only in uniform mesh size grids. Limitations on the application of the static oscillations analysis based on the characteristic polynomial technique are discussed, and its applicability for transient problems, multidimensional problems and non-linear problems are examined through numerical experiments.

KEYWORDS : *thermohydraulic equations, numerical analyses, numerical oscillations, static numerical oscillations, numerical stability, numerical diffusion, high-order difference schemes, LECUSO scheme, QUICK scheme, convection-diffusion equation, characteristic polynomial, Burgers equation*

I. 緒 言

1. 高次差分法の必要性

近年、原子炉プラントの信頼性・経済性向上に関連して関心が高まっている炉容器内自然循環による炉心崩壊熱の除熱問題においては、急峻な温度勾配を有する熱成層化現象が発生し易く、また冷却材流れも原子炉内の複雑な流路構成に起因して多次元性を有する流動場となっている。こういった急峻な勾配

を有する多次元流動場を有限差分法で数値的に求める場合、解くべき熱流動方程式における対流項の非線形性と移動性のために困難な問題が発生する。すなわち、対流項の持つ移動性によって対流項に対する打ち切り誤差が流れ方向に移動、伝播し、特に計算格子が流れ方向と斜交する多次元流れの場合、流れと直交する方向にも誤差が伝播して、体系全体の解の

* 大阪大学工学部 原子力工学科 (Dept. of Nucl. Eng., Osaka Univ.)

精度を損ねてしまう。

この多次元流動場における数値拡散問題について、前川⁽¹⁾⁽²⁾は各種の数値実験を通して広範囲に検討を行い、高次差分法の必要性を指摘している。また近年、応力方程式モデルなど高度な乱流モデルを用いた乱流解析が行われつつあるが、モデルの効果が数値誤差によって覆い隠されることがないように数値計算精度も高める必要がある。さらには流動変動を直接扱う LES, DNS 解析の場合、分子粘性効果を正確に取り入れるために、2階微分型の数値拡散誤差は確実に消えるよう、少なくとも時間、空間に関し2次精度以上の高次差分法は必須である。

2. 高次差分法の数値振動と安定性

一方、上記の自然循環のような低速流れの場合でも、メッシュ Re 数または Pe 数の最大値は、通常の平均流解析の場合数10から数100程度に達するが、高次差分法は2程度以上のメッシュ Re 数または Pe 数で元の偏微分方程式の解にない非物理的な振動解(数値振動)を与える傾向がある。また、この傾向は急峻な分布を有する流れ場ほど顕著となり、数値解の信頼性は低下してしまう。また LES 解析等の場合、物理的な流動変動に数値振動が重畳してくる可能性がある。

数値解の収束性に関する Lax の同等定理⁽³⁾によれば、適切な線形偏微分方程式を適合性を有する有限差分式を用いて解くとき、差分解が安定であることが元の偏微分方程式の真の解に収束するための必要十分条件である。ここでの安定性とは Lax と Richtmyer⁽⁴⁾によって「差分解が有界であること」と定義されている。いま、初期値問題として適切な線形移動方程式に対し、適合性を有する差分式を用い時間に関して単段階法で差分化することを考えると、一般に次の差分方程式を得る。

$$\phi^{n+1} = A\phi^n + B \quad (1)$$

ここで、 ϕ ：差分点 i における離散値 ϕ_i を成分とする列ベクトル

A ：差分化に伴う係数行列

B ：境界条件やソース項等によって構成される列ベクトル

添字 n は非定常問題の場合は時刻ステップを、定常問題の場合は疑似時刻ステップまたは反復ステップを表す。ステップ n の差分解 ϕ^n をその差分方程式の真の解 ϕt^n (定常問題の場合真の解の ϕt はステップ n に無関係)とそれからの誤差 E^n に分解し

て考えると、

$$\underbrace{\phi^n}_{\text{差分解}} = \underbrace{\phi t^n}_{\text{差分方程式の真の解}} + \underbrace{E^n}_{\text{差分誤差}} \quad (2)$$

$$\phi t^{n+1} = A\phi t^n + B \quad (3)$$

(1)式-(3)式から次式を得る。

$$E^{n+1} = AE^n \quad (4)$$

すなわち、差分誤差 E_n の挙動は係数行列 A によって規定される。

安定性に関して、富山、高橋⁽⁵⁾は2つ(動的、静的)の側面があることを指摘している。すなわち、Lax と Richtmyer の意味での安定性を保証する必要十分条件は、行列 A を用いて次式で与えられる。

$$\|A\| \leq 1 \quad (\text{動的安定性条件}) \quad (5)$$

ここで、 $\| \cdot \|$ はノルムを表す。また定常問題の場合で、各ステップにおいて安定である必要はなく、最終的な、すなわち(1)式で $n \rightarrow \infty$ とした時、差分解の有界性が保証されれば良いとする場合、そのための必要十分条件は次式で与えられる⁽⁶⁾。

$$\rho(A) \leq 1 \quad (\text{静的安定性条件}) \quad (6)$$

ここで、 $\rho(A)$ は行列 A のスペクトル半径、すなわち行列 A の固有値の絶対値の最大値である。行列 A は一般に時間メッシュ Δt を含んでおり、上記の安定性条件は Δt に対する制約条件(クーラン数と拡散数に対する条件)の形で表現される。一般に

$$\rho(A) \leq \|A\| \quad (7)$$

のため、安定性を保証する上で(6)式は(5)式の必要条件に過ぎないこと、したがって定常解に帰着する問題が、あるクーラン数で安定に解けても、同じクーラン数で非定常流れを安定に解けるとはいえず、2つの安定性の相違に留意すべきことを富山、高橋⁽⁵⁾は指摘している。結局、Lax と Richtmyer の意味での安定性を保証する差分解の有界性条件は(2)式における差分誤差 E^n の成長に関して適用され、その安定性理論は適切な線形偏微分方程式に対して上記のように確立している。

一方、数値振動は広義の不安定現象ではあるが、差分解の有界性は維持されているので、Lax と Richtmyer の意味での不安定性に抵触することではなく、それとは異質の現象である。すなわち、Lax と Richtmyer の意味での不安定性は(2)式における差分誤差 E_n の挙動であるのに対し、数値振動は(2)式における差分方程式の真の解 ϕt^n 自身の挙動である。逆に Lax の同等定理から有界な数値振動が発生しても、Lax と Richtmyer の意味での安定性

が維持されていれば、元の偏微分方程式の真の解への収束性が保証されているので、このことから、適切性を有する線形偏微分方程式に対する差分分解の有界な数値振動は、差分メッシュ幅を小さくしていくと消滅することが予測される。

しかしながら、任意有限差分メッシュ幅での数値振動を防止する理論については、これまで Thoman と Szewczyk⁽⁷⁾ のオーバーシュートなしの条件や、Patankar⁽⁸⁾ の物理的に妥当な解を得るために差分スキームが従うべき4つのルールの中の正係数の条件のほか、系統的な取扱いはなされていない状態であった。Patankar の正係数の条件とは、差分式を $a_0\phi_0 = \sum a_i\phi_i$ (添字 0 と i はおのおの着目点および着目点周囲のメッシュ点を、 ϕ は被輸送量を表わす) と表わした場合、周囲点 ϕ_i の変動に対して着目点 ϕ_0 は同一方向に変動すべきとの物理的要請から、すべての係数 a_0, a_i は正でなければならないという条件である。

対流と拡散項を含む時間依存の移動方程式を FTCS 法(時間に関して1次精度の前進差分, 空間に関して2次精度の中心差分)で差分化し, Thoman と Szewczyk のオーバーシュートなしの条件を適用すると, メッシュ $Re \leq 2$ が得られる。また定常の対流・拡散移動方程式を中心差分で差分化し, Patankar の正係数の条件を適用しても, 同様にメッシュ Re 数 ≤ 2 が得られる。前者の場合, 時間依存の方程式から出発したにもかかわらず, Lax と Richtmyer の安定性条件と異なり, 時間メッシュ Δt とは独立した条件となっており, 数値振動が Lax と Richtmyer の意味での安定性と別種の現象であることを裏づけている。また, Lax の同等定理から予想される通り, 空間メッシュ幅を小さくすると, 数値振動は消滅することも符合している。

その後, 最近著者による特性多項式解析による方法⁽⁹⁾, さらにごく最近, 富山, 高橋⁽⁵⁾ は境界条件の影響を含む一般的な理論を提案しており, ここに至って線形移動方程式に対する数値振動の発生条件を正確に捉えることができるようになった。以下において, “安定性”の用語は Lax と Richtmyer の意味で差分誤差の成長に関して用いることとし, 差分方程式の真の解自身の振動すなわち数値振動とは区別して用いる。

3. 数値振動を誘起しない高次差分法

対流項の数値的取扱いは, 上記のように解の精度と数値振動に直接影響を与えるため, これまで種々の差分式が提案されてきたが, 特に近年数値振動を誘起しない高次差分法の開発の努力がなされているのが特徴的である。例えば, Allen-Southwell スキーム⁽¹⁰⁾, Samarsky スキーム⁽¹¹⁾, また数値振動の発生する場所に限定して低次の差分式に切り替える FRAM 法⁽¹²⁾, FRAM の機能を備えた高次差分式 (QUICK⁽¹³⁾-FRAM, 修正 EXQUISITE⁽²⁾, Tensor Viscosity⁽¹⁴⁾-FRAM⁽¹⁵⁾等) も提案されている。これらの高次差分法における数値振動防止策の基本は, 低次差分の大きな数値粘性を利用して解の安定化を図るものである。

これに対して, 近年 LECUSSO (Local Exact Consistent Upwind Second Order Scheme)⁽¹⁶⁾ (4点近似) や, LSUDS (Leonard Super Upwind Scheme)⁽¹⁷⁾ (5点近似) の modern スキームが開発されているが, これら modern スキームの特徴は定数係数を有する対流・拡散方程式の解析解を満足するように差分式を構成している点にあり, 従来のように安定化を図るために低次差分式への人為的切替え操作は行わない。ただし両スキームとも等間隔格子の場合に導出されている。

4. 本研究の目的

以上のレビューを踏まえて, 本研究における目的を以下に示す。

- (1) 差分分解の数値振動について, その発生および振舞いの性質に関する基礎的な考察を行い, 非定常問題における動的数値振動と定常問題における静的数値振動の2つの側面について検討を行う。
- (2) 数値振動防止条件の評価に関する Thoman と Szewczyk および Patankar の方法は一般性に欠けており, また Patankar の方法は最隣接点を越えた差分点の情報を用いる高次差分式の場合, 実際とは矛盾する答えを与えてしまう⁽⁶⁾。動的数値振動に着目した富山, 高橋の方法は, 空間差分作用素からなる行列の固有値問題を解く必要があるが, 厳密な取扱である。ここでは特性多項式解析法を利用して, 静的数値振動防止条件評価法を提案する。

- (3) LECUSSO 差分法は、等間隔格子の場合に Günther によって提案されたが、実際の解析では不等間隔格子系が用いられることが多いので、LECUSSO 差分式を不等間隔格子系でできるように拡張する。
- (4) 実際の解析で多用される不等間隔格子系において、LECUSSO 差分法は数値振動を誘起しないスムーズ解を与えるかどうかは、工学的応用上関心が高いところであるが、これまで不明である。そこで不等間隔格子系に拡張された LECUSSO 差分式に対して、特性多項式解析法による静的数値振動解析を行い、計算格子系の違いが数値振動に与える影響について検討する。従来の数値振動解析および安定性解析は等間隔格子系で行われており、計算格子系の違いが数値振動および安定性に対する影響についてはこれまで議論されていない。
- (5) 特性多項式解析法による数値振動解析結果を確認するために、解析解を有する 1 次元非線形パーガース方程式、2 次元線形対流-拡散方程式を用いて数値実験を行い、同時に特性多項式解析法の非定常問題、非線形問題、多次元問題に対する適用性に関し、数値実験を通して検討する。

II. 数値振動現象の持つ 2 つの側面

1. 動的数値振動と静的数値振動

第 I 章の (2) 式において、数値振動は差分方程式 (1) の真の解 (ϕ^t) 自身の振動現象であることを述べた。したがって、その振動現象には、元の偏微分方程式が非定常問題または定常問題を疑似時間法や反復法で解く場合、 ϕ^t はステップ n とともに過渡的に振動 (動的数値振動) する場合と、無限ステップにおける定常解が空間的に振動 (静的数値振動) する場合との 2 つの側面がある。そしてさらに定常解の場合、反復過程における動的な数値振動はあっても最終解における静的数値振動が防止されていればよいとする立場がある。これは差分誤差 (E^n) の成長に関する安定性の問題の場合、富山、高橋⁽⁶⁾ が指摘した動的安定性と静的安定性の 2 つの側面があることと同様の事情である。これまで数値振動に関して、上記 2 つの側面があることを区別して議論されたことはないと思われる。

富山らは、適切性を有する次の線形移動方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (8)$$

を考え、動的数値振動防止条件について検討している。上式で t は時刻、 x は位置座標、 u は輸送速度、 ν は拡散パラメータ、 f は被輸送量である。(8) 式の解 f に対し

$$f(t, x) = \phi(t) \phi(x) \quad (9)$$

と、時間と空間に変数分離できる解について考えると、次式を得る。

$$\frac{d\phi}{dt} = -\omega\phi \quad (10)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{u}{\nu} \frac{d\phi}{dx} = -\frac{\omega\phi}{\nu} \quad (11)$$

ここで、 ω は変数分離定数であるが、これは (11) 式が ϕ に関する同次方程式であるので、この式を空間に関して離散化した行列方程式の固有値から決まる。 ω が決まると、 ϕ は (10) 式より

$$\phi(t) = \phi(0) \exp\{-\omega t\} \quad (12)$$

と求まるが、もし ω が複素数となると、(8) 式の数値解 $f(t, x)$ は時間的に振動解となってしまう。したがって、動的数値振動防止条件は、変数分離定数 ω が実数となる条件から決まることになる。

以上が富山、高橋の動的数値振動防止に着目した方法であるが、上記のように、 ω は行列の固有値方程式から決まり、これは扱う問題の境界条件や計算体型に依存して決まるので、個々の問題で固有値方程式を解く必要がある。そこで本研究では、反復計算の最終ステップにおける定常解の静的数値振動に着目する。差分誤差の成長に関する安定性問題の場合、安定性を保証する上で動的安定性条件 (5) 式は静的安定性条件 (6) 式を包含する必要十分条件を与えることを、富山らは証明している。

一方、数値振動問題においても、適切性を有する問題の場合、振動防止を保証する上で動的振動防止条件は、静的振動防止条件を包含する必要十分条件となっていることが予想される。すなわち、定常解に帰着する問題が、ある静的振動防止条件で数値振動のない解が得られたとしても、同じ条件で非定常問題を問題なく解けるとはいきれない可能性があり、2 つの数値振動特性の相違に留意すべきである。これについては、数値的な検討を含めて次章の第 2 節で言及する。

2. 2 次精度中心差分法の静的数値振動

次の 1 次元定常対流-拡散方程式を考える。

$$u \frac{d\phi}{dx} = \nu \frac{d^2\phi}{dx^2} \quad (13)$$

(13)式の対流項に対して1次精度の風上差分または2次精度の中心差分を、拡散項に対して2次精度の中心差分を用いて1次元等間隔メッシュ系で離散化すると、 u が正(空間メッシュ点番号*i*が増加する方向)の時、次の差分方程式を得る。

$$\phi_i = \alpha\phi_{i+1} + \beta\phi_{i-1} \quad (\alpha + \beta = 1) \quad (14)$$

ここで、

$$\alpha = \frac{1}{R_m + 2}, \quad \beta = \frac{R_m + 1}{R_m + 2} \quad (1 \text{ 次風上差分の場合})$$

$$\alpha = \frac{2 - R_m}{4}, \quad \beta = \frac{2 + R_m}{4} \quad (2 \text{ 次中心差分の場合})$$

$$R_m \equiv \frac{u\Delta x}{\nu} \quad (\text{メッシュ } Re \text{ 数})$$

(14)式は ϕ_i を両隣接点の ϕ を用いて1次内挿する式となっており、 α, β が共に正のとき、 ϕ_i は ϕ_{i-1} と ϕ_{i+1} の間に存在する(smooth solution)。ところがもし α, β のいずれか一方が負になると、 $\alpha + \beta = 1$ の関係を用いて(14)式を

$$\phi_i = \alpha(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) + \phi_{i-1} \quad (15a)$$

$$= -\beta(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) + \phi_{i+1} \quad (15b)$$

のように変形してみるとわかるように、勾配($\phi_{i+1} - \phi_{i-1}$)の正負に応じて両隣接点の ϕ の最大値より大きい(overshoot)値か、最小値より小さい(undershoot)値となる(第1図)。

元来、有限差分計算で ϕ_i をその両隣接点の値で推定する場合、 ϕ_i は隣接点の値の間にあることが前提条件である。もしその間を逸脱したオーバーシュア

第1図 差分解 $\phi_i = \alpha\phi_{i-1} + \beta\phi_{i+1}$ の振舞い

トまたはアンダーシュートが元の偏微分方程式(13)の真の解に近かったとしても、その場合は空間メッシュ幅をもっと小さく取って議論すべきであって、あくまでも差分計算が物理的に容認できるのは、“ ϕ_i は両隣接点の値の間にある”という既述の前提条件が満足されているときである。

以上の考察から、数値振動を防止するためには係数 α, β は共に正という条件が必要であることがわかる。これは取りも直さず Patanker の正係数の条件と等価である。この条件($\alpha, \beta \geq 0$)から、2次精度中心差分の場合、静的数値振動防止条件としてメッシュ $Re \leq 2$ を得る。

係数 α または β が負の場合、(15)式より勾配($\phi_{i+1} - \phi_{i-1}$)が大きければ大きいほど、オーバーシュートまたはアンダーシュートが大きくなることも理解される。

以上は、最近接点(ϕ_{i+1}, ϕ_{i-1})のみを用いる最も簡単な高次差分式を用いた差分解の静的数値振動の発生に関する考察であるが、次章では任意次数の高次差分式について取り扱う。

III. 特性多項式解析法に基づく 静的数値振動防止条件

1. 特性多項式解析法⁽⁹⁾

1次元領域を考え、着目点*i*の周囲*m*点の ϕ を用いる高次差分式を用いて(13)式を差分近似すると、一般に次の線形同次差分方程式を得る。

$$(n \leq i \leq n+m)$$

$$a_m\phi_{n+m} + a_{m-1}\phi_{n+m-1} + \cdots + a_i\phi_i + \cdots + a_1\phi_{n+1} + a_0\phi_n = 0 \quad (16)$$

ここで定数係数を考えると、上記同次方程式の特性方程式は次の*m*次の多項式で与えられる⁽¹⁸⁾。

$$a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (17)$$

この特性方程式の根を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ とすると、上記差分方程式の一般解は根が重根でない場合、次式で与えられる。

$$\phi_i = c_1\lambda_1^i + c_2\lambda_2^i + \cdots + c_m\lambda_m^i \quad (18a)$$

根が重根の場合、例えば λ_1 が1重根($\lambda_1 = \lambda_2$)の場合、一般解は次式となる。

$$\phi_i = (a \cdot i + b)\lambda_1^i + c_3\lambda_3^i + \cdots + c_m\lambda_m^i \quad (18b)$$

ところで既述のように、数値振動は差分方程式の真の解自身の振舞いであるので、正に(18)式が振動するかどうかを調べればよい。

まず、特性方程式の根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ がすべて非負であれば、(18)式で与えられる解の形からわかるようにスムーズ、すなわち数値振動のない解が得られる。逆に根が1つでも負になると解は振動し、その振動の波長は $2\Delta x$ となる。根が虚数の場合も振動解となる。以上の考察から、定常解に対する静的数値振動防止条件は、特性方程式(17)の根がすべて同時に実数かつ非負となる条件から得られることになる。

ところで差分式は、差分方程式(16)において ϕ が定数のとき、元の偏微分方程式(13)を満足するように構成されるので、係数 $a_m, a_{m-1}, \dots, a_0$ の間に、一般に次の関係式が存在する。

$$a_m + a_{m-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \quad (19)$$

したがって m 次の特性方程式(17)は、 $\lambda=1$ の特性根を持つことがわかる。それゆえ m が3以下となる2次精度以下の差分法の場合、次節に示すように、特性方程式の根を解析的に求めることができるので、静的数値振動防止に対する必要十分条件を容易に得ることが可能である。

しかし、 m が4以上となる一般の高次差分法の場合、その特性多項方程式の根が実数かつ非負となる条件を数値計算的に求めることはできても、一般的に使い易い形に表現することは困難である。その場合は多項式の根と係数との関係に着目する。すなわち、(17)式はその根を用いて次のように書ける。

$$a_m(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_m) = 0 \quad (20)$$

根と係数の関係から次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} a_m(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m) &= -a_{m-1} \\ a_m(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \dots + \lambda_{m-1}\lambda_m) &= a_{m-2} \\ &\dots\dots\dots \\ a_m\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_m &= (-1)^m a_0 \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $a_m > 0$ を仮定しても一般性を失うことはない。根がすべて非負のとき上式の左辺はすべて非負である。すなわち

$$\left. \begin{aligned} a_m > 0 \quad a_{m-1} \leq 0 \quad a_{m-2} \geq 0 \\ a_{m-3} \leq 0 \quad \dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(もし $a_m < 0$ の時、上記の不等号は逆となる)

しかしながら、逆に上記の不等式(22)が成立していても、必ずしも根のすべてが同時に非負となるとは限らない。すなわち(22)式は根が非負となるための必要条件ではあるが十分条件ではないことに留意する必要がある。またはその対偶を考えると、(22)

式のどれか1つでも満たされない場合、根のすべてが同時には正になるとは限らず、数値振動解となる。

本来われわれは根のすべてが同時に非負となる必要十分条件をほしいのであるが、 m が4以上となる高次差分法の場合は、これを簡便な形で求めることは困難であるので、振動防止の必要条件である(22)式を数値振動防止の目安として利用しようというわけである。特性多項式解析法の有効性と実用性については、次節で検討する。

2. 等間隔格子系における静的数値振動解析

1次元等間隔格子の場合、2次精度中心差分、QUICK 差分、LECUSO 差分の3種について、前節の特性解析法による静的数値振動解析を行う。(13)式の対流項を上記3種の差分法で、拡散項を2次精度の中心差分で離散化すると、(16)、(17)式で $m=3$, $n=i-2$ (ただし、2次中心差分の場合は $m=2$, $n=i-1$) と置いた差分方程式および次の特性方程式を得る。

$$A\lambda^3 - B\lambda^2 + C\lambda - D = 0 \quad (23)$$

上式で、 $A=a_3$, $B=-a_2$, $C=a_1$, $D=-a_0$ と対応する。その係数を纏めて第1表に示す。LECUSO 差分式の場合、その係数 A, B, C, D は、第V章の不等間隔格子系における(35)式で、等間隔格子(すなわち $r_1=r_2=1.0$)とした式で与えられ、それらの Rm (メッシュ Re 数)依存性を第2図に示す。

係数間関係について、前節で指摘したように第1表より、いずれの差分法も(19)式に対応する

$$A - B + C - D = 0 \quad (24)$$

の関係が存在するので、(23)式の3次特性方程式は次のように因数分解できる。

$$(\lambda - 1)\{A\lambda^2 + (A - B)\lambda + D\} = 0 \quad (25)$$

したがって、他の2根は次式から決まる。

$$\lambda = \frac{B - A \pm \sqrt{\Sigma}}{2A} \quad (26)$$

ここで、 Σ は判別式で次式で定義される。

$$\Sigma \equiv (A - B)^2 - 4AD \quad (27)$$

結局、静的数値振動防止に対する必要十分条件は、(27)式で与えられる判別式 Σ が非負であり、かつ(26)式で与えられる根が2つとも非負である条件から決定される。

こうして得られた静的数値振動防止条件を、上記3つの差分法について第1表に示す。LECUSO 差分の場合、係数 A, B, C, D に含まれる ξ (ξ は第V

章の(32)式で与えられる)が Rm の複雑な関数であるが、第2図および極限值を与える(37), (39)式からわかる通り、すべての Rm 数に対して A, B, C, D

は非負である。さらに判別式および3つの特性根も全 Rm 数に対して非負となっていて、静的数値振動防止に対する制約条件は存在せず、興味深い差分法

第1表 特性多項式解析による静的数値振動防止条件

差分式	2次中心差分	QUICK	LECUSSO
差分係数			
A	$1 - Rm/2$	$1 - 3Rm/8$	$1 - (0.5 - \xi)Rm$
B	2	$2 + 3Rm/8$	$2 + 3\xi Rm$
C	$1 + Rm/2$	$1 + 7Rm/8$	$1 + (0.5 + 3\xi)Rm$
D	—	$Rm/8$	ξRm
判別式 Σ	$Rm^2/4$	$1 + Rm + 3Rm^2/4$	$1 + Rm + (1/4 + 4\xi)Rm^2$
特性根			
λ_1	1	1	1
λ_2	$\frac{2+Rm}{2-Rm}$	$\frac{1+3Rm/4+\sqrt{\Sigma}}{2(1-3Rm/8)}$	$\frac{1+0.5Rm+2\xi Rm+\sqrt{\Sigma}}{2[1-(0.5-\xi)Rm]}$
λ_3	—	$\frac{1+3Rm/4-\sqrt{\Sigma}}{2(1-3Rm/8)}$	$\frac{1+0.5Rm+2\xi Rm-\sqrt{\Sigma}}{2[1-(0.5-\xi)Rm]}$
振動防止条件			
必要十分条件	$Rm \leq 2$	$Rm \leq 8/3$	制約なし
必要条件	$Rm \leq 2$	$Rm \leq 8/3$	制約なし

第2図 差分係数 A, B, C, D の等間隔格子における Rm 依存性

である。

QUICK 差分の場合の静的数値振動防止条件は、第1表より $Rm \leq 8/3$ である。一方、富山、高橋⁽⁵⁾の動的数値振動防止に着目した解析によると、QUICK 差分の動的数値振動防止条件は内点のノード数と境界条件にも依存するが、 $Rm \leq (1.5 \sim 2.6)$ である。この2つの結果から、数値振動防止を保証する上で動的数値振動防止条件は、静的数値振動防止条件を包含する必要十分条件となっている。これが QUICK 以外の差分法にも適用可能な一般的な事実であるかどうかは、今後の数学的証明が必要とされる。しかしながらこの事実より、LECUSSO 差分の場合、非定常問題すなわち動的数値振動に対しても、全 Rm 数に対して制約条件は存在しないとは必ずしもいい切れない。これについては、さらに第VI章で数値実験を通して検討を加える。

次に、静的数値振動防止に対して必要条件を与える (22) 式の有効性を調べる。 $m=2$ の場合は、(22) 式は Patanker のルール 2 (正係数の条件) と等価となるが、第1表には (22) 式より得られる必要条件も示している。この場合 ($m \leq 3$)、特性根を求めて決定される必要十分条件と等価であり、この事実は極めて簡便法である (22) 式の有効性を示している。

以上の数値的検討より、特性多項式解析法の簡便さを勘案すると、本特性解析法は実用的な数値振動防止条件評価法といえる。

IV. 不等間隔格子系における LECUSSO 差分式の導出

(13) 式の輸送速度 u が正 (空間メッシュ点番号 i が増加する方向) のとき、その対流項を次式で近似する。

$$\frac{d\phi}{dx}|_i = \frac{C_1\phi_{i+1} + C_2\phi_i + C_3\phi_{i-1} + C_4\phi_{i-2}}{\Delta x_i} \quad (28)$$

ここで、計算格子は第3図の不等間隔メッシュ系を考え、 $x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$ 、 ϕ_i は座標 x_i における ϕ を表わす。近似式 (28) が $\phi=1$ 、 $\phi=x$ 、 $\phi=x^2$ を満足する条件から、次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 &= 0 \\ C_1\Delta x_i - C_3\Delta x_{i-1} - C_4(\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i-2}) &= \Delta x_i \\ C_1\Delta x_i^2 + C_3\Delta x_{i-1}^2 + C_4(\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i-2})^2 &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

これより任意パラメータ ξ を用いて (28) 式の未知係数は次式で求められる。

第3図 計算格子

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{\Delta x_{i-2}(\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i-2})}{\Delta x_i(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \xi \\ &\quad + \frac{\Delta x_{i-1}}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \\ C_2 &= \frac{\Delta x_{i-2}(\Delta x_i + \Delta x_{i-1} + \Delta x_{i-2})}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}} \xi \\ &\quad + \frac{(\Delta x_i - \Delta x_{i-1})}{\Delta x_{i-1}} \\ C_3 &= \frac{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i-2})(\Delta x_i + \Delta x_{i-1} + \Delta x_{i-2})}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \xi \\ &\quad - \frac{\Delta x_i^2}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \\ C_4 &= \xi \end{aligned} \quad (30)$$

(13) 式は定数係数のとき $a \cdot \exp[(xu/\nu)] + b$ の解析解を有しており、(13) 式の拡散項に2次精度の中心差分を、対流項に (28) 式を適用した差分方程式が上記の解析解を満足するように任意パラメータ ξ を決定すると、 ξ は次式で求まる。

$$\xi = \zeta / \eta \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \zeta &= r1(r1 \cdot Rm - 2) \exp[Rm(1+r1+r2)] \\ &\quad + (1+r1)(2+Rm(1-r1)) \\ &\quad \cdot \exp[Rm(r1+r2)] \\ &\quad - (Rm+2) \exp[Rm \cdot r2] \\ \eta &= Rm\{r1 \cdot r2(1+r2) \\ &\quad \cdot \exp[Rm(1+r1+r2)] - r1(1+r1)\} \\ &\quad - Rm\{r2(1+r1)(1+r1+r2) \\ &\quad \cdot \exp[Rm(1+r2)]\} \\ &\quad + Rm\{(r1+r2)(1+r1+r2) \\ &\quad \cdot \exp[Rm \cdot r2]\} \end{aligned}$$

ここで、 $r1 \equiv \Delta x_{i-1} / \Delta x_i$ 、 $r2 \equiv \Delta x_{i-2} / \Delta x_i$ 、 $Rm \equiv u_i \Delta x_i / \nu$ (メッシュ Re 数)

(13) 式の解析解の未知係数 a 、 b は境界条件から決定されるが、 a 、 b の値を指定しなくても、 ξ は任意の a 、 b に対して唯一に (31) 式で決定される。

以上により、未知係数 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 は等間隔格子系の場合と同様に、局所空間変数と局所メッシュ Re 数で表わされる。

等間隔格子の場合、(31) 式の分子、分母は共通因子 $(\exp[Rm] - 1)$ を含んでおり、これを除することに

より, 上式は

$$\xi = \frac{(Rm-2)e^{Rm} + Rm + 2}{2Rm(e^{Rm} - 2 + e^{-Rm})} \quad (32)$$

の Günther の式⁽¹⁶⁾に一致する。

(28), (30)式で表わされる差分スキームの打ち切り誤差 ($TE \equiv$ 差分方程式 - 偏微分方程式) は, 等間隔格子の場合, 次式で与えられる。

$$TE = \left(\frac{1}{6} - \xi \right) \Delta x^2 \frac{d^3 \phi}{dx^3} + 0.5 \xi \Delta x^3 \frac{d^4 \phi}{dx^4} + O(\Delta x^4)$$

打ち切り誤差の最低次のオーダーで定義される差分式の精度は, 差分式の係数が定数である QUICK スキーム ($\xi = 1/8$) の場合, 2 次精度であるのに対し, LECUSSO スキームの場合, ξ がメッシュ Re 数の関数で $1/12 \leq \xi \leq 1/2$ であるため, 一般には 2 次から 3 次精度となる。

V. 不等間隔格子系における LECUSSO 差分の数値振動解析

1. 静的数値振動解析

第 III 章で提案された特性多項式解析法を用いて, 不等間隔格子系で使用できるよう拡張された LECUSSO 差分法の静的数値振動解析を行う。

(13) 式の対流項に対して (28) ~ (31) 式を, 拡散項に対して 2 次精度の中心差分を用いると, u が正のとき (13) 式は次の (33) 式で差分近似され, またその特性方程式は (34) 式で与えられる。

$$A\phi_{i+1} - B\phi_i + C\phi_{i-1} - D\phi_{i-2} = 0 \quad (33)$$

$$A\lambda^3 - B\lambda^2 + C\lambda - D = 0 \quad (34)$$

ここで,

$$A = [2 - Rm \cdot r1 + r2(r1 + r2)A] / (1 + r1)$$

$$B = [2 + Rm(1 - r1) + r2(1 + r1 + r2)A] / r1$$

$$C = [2 + Rm + (r1 + r2)(1 + r1 + r2)A] / [r1(1 + r1)]$$

$$D = A \quad (35)$$

ただし, $r1 = \Delta x_{i-1} / \Delta x_i$, $r2 = \Delta x_{i-2} / \Delta x_i$,

$$A = Rm\xi$$

特性多項式解析法では, 係数 A, B, C, D は定数を考えており, その場合に (33) 式の一般解は (18) 式の形で与えられる。すなわち, ここでの解析では, 例えば $r1 = \text{定数}$, $r2 = (r1)^2$ となるような特殊な不等間隔格子系を考えている。

(34) 式の特性根の性質を調べるわけであるが, 第 III 章の等間隔格子の場合と異なり, 係数 A, B, C, D は格子の不等間隔度を表すパラメータ $r1, r2$ を含んでいるため複雑である。そこで数値振動防止に関しては, 必要条件を与える (22) 式に着目する。すなわち, 数値振動防止を保証するためには, 少なくとも (22) 式は満足されていなければならないわけで, その対偶を考えると係数 A, B, C, D の 1 つでも負になると, 特性根は同時には正にはならず数値振動を有する解となる。そこで, まず A, B, C, D が同時に正となる条件を調べてみる。

A, B, C, D は複雑な関数であるので, まず $r1, r2$ の種々の組合せに対してそれらの Rm 依存性を数値計算によって調べる。その結果の 2 例を第 4 図に示す。この数値計算により, A, B, C, D は Rm に関して単調な関数であることが予想される。そこで次に Rm が 0 および ∞ に漸近する極限值を考える。 Rm が 0 に漸近するとき, de L'Hospital の定理を用いて, A の分子, 分母の 3 階微分をとることによって次の極限值を得る。

$$\lim_{Rm \rightarrow 0} A = -2(1 - r1) / \{r2(r1 + r2) \cdot (1 + r1 + r2)\} \quad (36)$$

これより次式を得る。

$$\begin{aligned} \lim_{Rm \rightarrow 0} A &= \{2 - 2(1 - r1) / (1 + r1 + r2)\} / (1 + r1) \\ \lim_{Rm \rightarrow 0} B &= \{2 - 2(1 - r1) / (r1 + r2)\} / r1 \\ \lim_{Rm \rightarrow 0} C &= \{2 - 2(1 - r1) / r2\} / r1(1 + r1) \\ \lim_{Rm \rightarrow 0} D &= -2(1 - r1) / \{r2(r1 + r2) \cdot (1 + r1 + r2)\} \end{aligned} \quad (37)$$

数値振動を防止するための必要条件 ($A \geq 0, B > 0, C \geq 0, D \geq 0$) から次の不等式を得る。

$$r1 = \Delta x_{i-1} / \Delta x_i \geq 1 \quad (38)$$

Rm が ∞ に漸近するとき次の極限值を得る。

$$\begin{aligned} \lim_{Rm \rightarrow \infty} A &= 0 \\ \lim_{Rm \rightarrow \infty} B &= \infty \\ \lim_{Rm \rightarrow \infty} C &= \infty \\ \lim_{Rm \rightarrow \infty} D &= \infty \end{aligned} \quad (39)$$

(39) 式は数値振動防止の条件を満たしている。

次に輸送速度 u が負のとき, 同様の方法により次

(a) $r_1=2, r_2=4$ (b) $r_1=0.5, r_2=0.25$ 第4図 差分係数 A, B, C, D の不等間隔格子における Rm 依存性

の不等式を得る。

$$\Delta x_i / \Delta x_{i-1} \geq 1 \quad (40)$$

上記2つの不等式(38), (40)より, 正負いずれの輸送速度に対しても数値振動を発生しない解を与える必要条件として次式を得る。

$$\Delta x_{i-1} = \Delta x_i \quad (41)$$

結局, 等間隔格子の場合は, 第Ⅲ章で証明したように, すべてのメッシュ Re 数に対して静的数値振動を誘起しないが, 不等間隔格子の場合一般には数値振動を有する解を与える可能性がある。

2. 特性多項式解析法の適用限界

以上により、線形、定常問題に対する LECUSSO 差分法の静的数値振動解析が実施され、少なくとも等間隔格子系においては静的数値振動を発生しないことが証明された。しかしながら、特性多項式に基づく数値振動解析法は、定数係数を有する 1 次元定常線形方程式を対象としているので、実用に際しては時間項を含む非定常問題に関する動的数値振動に対する適用性、さらに実際にわれわれが扱う熱流動問題は多次元かつ係数が定数でない非線形方程式であり、多次元問題および非線形系に対する適用性の問題が残る。これらは LECUSSO 差分法の工学的応用に関連して関心の高い問題である。

第 IV 章において、数値振動に関する数値的検討から QUICK 差分法の場合、静的数値振動防止条件は動的防止条件を包含しておらず、数値振動を防止する上で必要十分条件となっていない。この動的数値振動問題については、その解析手法は富山、高橋によって確立されているので、これを LECUSSO 差分法に適用することで、LECUSSO 差分法の数値振動特性に与える非定常効果を知ることができる。

多次元問題に関しては、定常多次元差分方程式の真の解に対し、各次元方向に変数分離解を仮定すると、各次元に対する差分方程式は 1 次元の場合と異なり、一般には変数分離定数を含む形になる。変数分離定数がゼロとなる特殊な解について考えると、各次元方向に対し独立に特性解析法を適用することと等価となり、本研究の結果が適用できることになるが、極めて限定された差分解析に基づいているため、振動防止条件として信頼性が低下する。そのため時間依存 2 次元問題の場合に、富山、高橋の方法を適用して固有値問題を解き、数値振動に対する多次元性効果および同時に動的数値振動の効果を見ておくことが望まれる。

非線形系への適用性については、これまで理論的には確立されておらず、今後の研究が待たれる。しかしながら、上に指摘した非定常効果(動的数値振動問題)や多次元効果についても、数値実験により数値的に検討することが有効な手段として考えられる。

そこで次章では、解析解を有する 1 次元非線形バーガス方程式および 2 次元線形対流・拡散方程式の数値解を求め、特性解析法の有効性、非定常問題、非線形問題および 2 次元問題への適用性に関し、数

値実験を通して検討を加える。

VI. 数 値 実 験

1. 1 次元非線形バーガス方程式

(1) 差分方程式

最初の数値実験として

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (42)$$

のバーガス方程式を考える。初期条件は次式で与えられる。

$$v(x, 0) = \begin{cases} v_0 & (x \leq 0) \\ 0 & (x > 0) \end{cases} \quad (43)$$

すなわち、ウェーブフロントの中心は初期に原点 $x=0$ にあり、その後(42)式に従い x 方向に輸送速度 v で輸送される。その解析解は次式で与えられる。

$$v(x, t) = \frac{V_0}{1 + \exp\left[\frac{V_0}{2\nu}\left(x - \frac{V_0 t}{2}\right)\right] \cdot \frac{[1 - \operatorname{erf}(-x/2\sqrt{\nu t})]}{[1 - \operatorname{erf}((x - V_0 t)/2\sqrt{\nu t})]}} \quad (44)$$

ここで、 erf は誤差関数を表す。この解はメッシュ Re 数が増加すると急峻な勾配を持つようになるが、第 II 章-2 節で議論した通り、数値振動は数値解の勾配に比例して増大するので、この数値実験は数値振動が発生するかどうかを見る上で好都合である。

(42)式の時間項をクランク・ニコルソン法で、対流項を(28)式で(2次精度の差分法は一般に(28)式で表わされる)、拡散項を2次精度の中心差分で離散化すると、(42)式に対する差分式として次式を得る。

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} + \alpha v_i^{n+1} (CV)^{n+1} + \beta v_i^n (CV)^n = \alpha (DV)^{n+1} + \beta (DV)^n \quad (45)$$

ここで、

$$(CV)^n = \frac{C_1^* v_{i+1}^n + C_2^* v_i^n + C_3^* v_{i-1}^n + C_4^* v_{i-2}^n}{\Delta x_i}$$

$$(DV)^n = \frac{v_{i+1}^n}{s_1} - \frac{v_i^n}{s_2} + \frac{v_{i-1}^n}{s_3}$$

$$s_1 = \Delta x_i (\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) / 2$$

$$s_2 = \Delta x_i \Delta x_{i-1} / 2$$

$$s_3 = \Delta x_{i-1} (\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) / 2$$

$$\alpha : \text{Implicitness parameter } (\alpha + \beta = 1)$$

$$\alpha = 0.5 \text{ (クランク・ニコルソンスキーム)}$$

(45)式で対流項における係数 C_1, C_2, C_3, C_4 は、

LECUSO 差分の場合、輸送速度 v の関数であるので時間ステップ n の関数となる。

(2) 数値的安定性条件

数値解を求めるに当たっては、前章までに議論してきた数値振動問題のほかに、(2)式における差分誤差 E^n の成長に起因する数値的安定性の問題があり、差分誤差が成長して数値解が不安定にならないようクーラン数ないしは拡散数を適当に設定する必要がある。この数値的安定性の問題について、これまでは差分係数が定数の場合にのみ行われており、LECUSO 差分のように、差分係数がメッシュ Re 数 (Rm) の関数となる場合についてはこれまで実施されることがなかった。差分係数が Rm の関数となる場合に、差分誤差の蓄積に対する差分解の安定性能力が、果たして従来の場合に比べてより低下するか、向上するか、工学的応用上関心の持たれる問題であるが、これに関して、ごく最近、著者により LECUSO 差分法の線形数値安定性解析が実施された⁽¹⁹⁾。

その結果によると、時間に関して完全陽解法 ($\alpha=0$) の場合、空間に関して 2 次精度が中心差分を使用する FTCS 法と比較して、 Rm が 3 程度以下では LECUSO 差分の安定性能がより低下するが、 Rm が 3 以上では回復し、高 Rm 数においてはむしろ安定性能がより向上する傾向を示している。またクラנק・ニコルソン法 ($\alpha=0.5$) や完全陰解法 ($\alpha=1$) の場合は、差分係数が定数の場合と同様に LECUSO 差分法も、差分誤差の成長に関して無条件安定であることが確認されている。

したがって、ここで使用するクラנק・ニコルソンスキームは、線形方程式の場合、(2)式における差分誤差 E^n の成長に関して、時間ステップ Δt の大小にかかわらず無条件安定な数値解を与える (ただし、クーラン数が 1 を越える Δt の場合、Lax と Richtmyer の意味で安定であるが、有界なオーバーシュートが起る可能性がある) が、時間に関する離散化誤差は Δt に依存する。そこで等間隔格子の場合に、空間格子を固定し、クーラン数 $C = V_0 \Delta t / \Delta x$ をパラメータとして、数値解の収束に関するサーベイ計算を行い、 $C=0.1$ を設定した。すなわち、 $C=0.1$ になるよう Δt を設定しておくと、時間に関する離散化誤差はほぼ無視でき (丸め誤差と同程度)、また同時に非線形であるバーガス方程式の数値的安定性も確保されている。

(3) 収束条件

クラーク・ニコルソンスキームは時間に関し陰解法であるので、各時刻ステップで反復収束計算が必要であるが、この収束計算に伴って導入される数値誤差も、特に数値実験においてはできる限り小さく (実際には丸め誤差によって制約を受け、それ以下にするのは意味がない) することが望ましい。そのためここでは、収束判定条件について数値解の収束に関するサーベイ計算を行い、各時刻ステップ n において次式が満足されるまで反復計算を行なった。

$$\left| \frac{v_{(l+1)}^n - v_{(l)}^n}{v_{(l+1)}^n} \right| < 10^{-8} \quad (46)$$

ここで、 l は反復ステップ回数を表す。(46) 式の収束条件を満たすために要する反復ステップ数 (l の最大値) は計算に用いた全時刻にわたって 4~7 程度であった。

以上の条件に基づいて計算を行い、時刻 $500\Delta t$ において解析解と数値解との比較を行う。

(4) 等間隔格子における数値解と解析解との比較

等間隔格子の場合に、代表的な高次差分法として、QUICK 差分、3 次精度河村差分⁽²⁰⁾、LECUSO 差分、LSUDS 差分の 4 種を用い、その非保存形表示に基づく数値解と解析解との比較を、 $Rm=2, 10, 50$ の場合についてそれぞれ第 5~7 図に示す。 $Rm=2$ の場合、どの差分法も数値振動を生じないスムーズでかつ良好な解を与えている。 $Rm=10$ と 50 では、QUICK と 3 次精度河村差分の場合、数値振動が発生している。一方、LECUSO および LSUDS 差分は $Rm=50$ においてもスムーズな解を与えている。LSUDS 差分は 5 点近似式であるため最も良好な解を与えている。

特性解析法による静的数値振動解析の結果、LECUSO 差分法は、1 次元等間隔格子形に対しては静的数値振動を発生しないことはすでに証明した通りであるが、以上の数値実験より、1 次元等間隔格子の場合、非定常 (動的数値振動) 問題、非線形問題に対しても、数値振動を発生しないことが示された。ところで数値振動は、定常問題であれ非定常問題であれ差分方程式の真の解の振舞いであるので、非定常問題の場合、その真の解は時間項の差分法にも依存することが考えられる。そこで implicitness parameter α を $\alpha=1.0$ (完全陰解法)、 $\alpha=0.0$ (完全陽解法) の場合についても数値解を求めた結果、精度の点では違いが現れたが ($\alpha=0.5$ が最も良い精度を与えた)、いずれのケースも数値振動は発生しなかった。

(A) QUICK 差分

(B) 3次精度河村差分

(C) LECUSSO 差分

(D) LSUDS 差分

第5図 バーガー方程式に対する等間隔格子での数値解(○)と解析解(×)の比較($Rm=2$)

(A) QUICK 差分

(B) 3次精度河村差分

X/ΔX

(D) LSUDS 差分

第6図 パーガース方程式に対する等間隔格子での数値解(○)と解析解(×)の比較 ($Rm=10$)

なお、以上の数値解でウェーブフロントの伝播が解析解より遅れる傾向が見られるが、その原因として(42)式は非線形方程式でその対流項における輸送速度 v が定数ではなく、時間、空間と共に変化することが考えられる。すなわち、数値解の v が一たん解析解より小さくなると、ウェーブフロントの輸送が遅れることになる。逆に差分解の数値振動のためにオーバーシュートが発生すると、一時的であれウェーブフロントの輸送が促進され、数値解の伝播が解析解より早まることになる。ちなみに輸送速度を定数とした線形バーガース方程式について計算してみた結果、ウェーブフロントの位置は、差分法によらず解析解と一致した

(5) 不等間隔格子における数値解と

解析解との比較

不等間隔格子として、次に示す2ケースを考える。

- (i) $r1 = \Delta x_{i-1} / \Delta x_i = 1/0.95$ の等比数列で表わされる格子系、すなわち
- $$\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3 : \Delta x_4 : \dots$$
- $$= 1.72 \Delta x : 1.64 \Delta x : 1.55 \Delta x : 1.48 \Delta x : \dots$$

この場合、メッシュ幅の最大値は等間隔格子の Δx の1.72倍であり、 Rm の最大値も等間隔格子の場合の1.72倍となる。

- (ii) メッシュ幅比が1:0.8を次のように繰り返す格子系、

$$\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3 : \Delta x_4 : \dots$$

$$= \Delta x : 0.8 \Delta x : \Delta x : 0.8 \Delta x : \dots$$

(i)の格子系は、前章におけるLECUSO差分に対する静的数値振動解析結果より、輸送速度が正のとき静的数値振動防止条件(38)式を満たすケースであり、(ii)の格子系は前章の数値振動解析の対象外であり、もちろん(38)式を満たさないケースである。

上記2ケースの計算格子系に対し、LECUSO差分の非保存形表示を用いた数値解と解析解との比較を、 $Rm=10, 50$ (等間隔格子のメッシュ幅 Δx に基づく Rm で、その最大値はおおよそ1.72倍となる)について第8図(a),(b)に示す。ケース(i)の計算格子系では、静的数値振動解析結果と同様、非定常、非線形の場合も数値振動を発生していない。ケース(ii)では、 $Rm=10$ でわずかながら数値振動が見られ、 $Rm=50$ に増加すると明瞭な数値振動を発生している。しかしながら、QUICK差分や第3次精度河村差分

の場合、等間隔格子形においても、 $Rm=10$ においてすでに数値振動が発生しており、LECUSO差分は差分係数が定数である従来の高次差分法に比べて数値振動をより発生しにくい差分法といえる。

ケース(i)では、計算初期において等間隔格子系に比べ空間メッシュ幅が大きいため数値拡散誤差がより大きく、そのため等間隔格子系に比べて精度が悪くなっている。一方、ケース(ii)では、逆に空間メッシュ幅がより小さくなっているため、解析解に対しより近い解を与えている。

2. 2次元定常線形対流-拡散方程式

(1) 計算条件

次の数値実験は、第9図に示す2次元計算体系において、次式に従う定常状態のHeated Cavity Flow問題である。

$$\frac{\partial(\rho u T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v T)}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial(\Gamma \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(\Gamma \frac{\partial T}{\partial y})}{\partial y} \quad (47)$$

ここで、 Γ は熱伝導パラメータ

速度場は

$$u(x, y) = \frac{u_0 \pi}{2} \sinh\left(\frac{\pi x}{h}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{h}\right)$$

$$v(x, y) = \frac{v_0 \pi}{2} \cosh\left(\frac{\pi x}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) \quad (48)$$

で与えられており、第9図(相対値)に示されている。これらは計算格子に対して傾いた方向の速度ベクトルを有する2次元速度場を表わしており、数値拡散をチェックするうえでも好都合である。このように(47)式の係数は、定数ではなく速度場を介して空間的に変化する。

境界条件は以下の通りである(第9図)。

- ① y 軸のプラス側境界で断熱
- ② その他の境界で加熱、その加熱温度は解析解⁽²¹⁾から与えられる。

(2) 2次元LECUSO差分式

2次元体型でのLECUSO差分式を導出するため、(47)式で係数 ρ, u, v, Γ が定数の時の解析解を考える。(47)式の解 $T(x, y)$ に対し、

$$T(x, y) = f(x)g(y) \quad (49)$$

と変数分離解を仮定すると、次式を得る。

$$u \frac{df}{dx} - \gamma \frac{d^2 f}{dx^2} - \epsilon f = 0 \quad (50a)$$

(a) ケース(i)

(b) ケース(ii)

第8図(a), (b) バーガース方程式に対する不等間隔格子での数値解(○)と解析解(×)の比較

$$v \frac{dg}{dy} - \gamma \frac{d^2 g}{dy^2} + \varepsilon g = 0 \quad (50b)$$

ここで、 $\gamma = \Gamma/\rho$ 、 ε は変数分離定数

(50) 式は ε を含む指数型の解析解を有するが、 ε は一般には境界条件に依存して決まる。そこで $\varepsilon = 0$ の特殊な場合を考えると、その解析解は限定されているが、(47) 式を満たす解であり、第 IV 章で扱った 1 次元の場合と同じ関数形となる。それを x, y 各方向に独立に適用することにより、第 IV 章での議論と同様に境界条件を意識することなく 2 次元の LECUSSO 差分式を得ることができる。LECUSSO 差分式を構成する上で、(47) 式の解析解を正確に求めることが本来の目的ではなく、対流項と拡散項を含む (47) 式の特徴をできる限り内蔵した関数形を用いて、差分式を構成することが本来の目的である。

以上の考えに基づいて (47) 式を非保存系表示で離散化すると、輸送速度 u, v が共に正の時次式を得る。

$$\begin{aligned} & (\rho u)_{i,j} \frac{C_1 T_{i+1,j} + C_2 T_{i,j} + C_3 T_{i-1,j} + C_4 T_{i-2,j}}{\Delta x_i} + (\rho v)_{i,j} \frac{D_1 T_{i,j+1} + D_2 T_{i,j} + D_3 T_{i,j-1} + D_4 T_{i,j-2}}{\Delta y_j} \\ & = \Gamma \left(\frac{T_{i+1,j}}{s_1} - \frac{T_{i,j}}{s_2} + \frac{T_{i-1,j}}{s_3} \right) + \Gamma \left(\frac{T_{i,j+1}}{t_1} - \frac{T_{i,j}}{t_2} + \frac{T_{i,j-1}}{t_3} \right) \end{aligned} \quad (51)$$

ここで、

$$\begin{aligned} s_1 &= \Delta x_i (\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) / 2 \\ s_2 &= \Delta x_i \Delta x_{i-1} / 2 \\ s_3 &= \Delta x_{i-1} (\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) / 2 \\ t_1 &= \Delta y_j (\Delta y_j + \Delta y_{j-1}) / 2 \\ t_2 &= \Delta y_j \Delta y_{j-1} / 2 \\ t_3 &= \Delta y_{j-1} (\Delta y_j + \Delta y_{j-1}) / 2 \end{aligned}$$

D_1, D_2, D_3, D_4 は (30), (31) 式で与えられる C_1, C_2, C_3, C_4 で位置座標 x を y に、輸送速度 u を v に置き換えた式で与えられる。

(51) 式の差分方程式を、疑似時間を用いて完全陰解法に基づく時間進行法により解く。完全陰解法であるので、最初の数値実験における数値的安定性条件で説明した通り、(2) 式の差分誤差 E^n の成長を抑えるための疑似時間ステップ幅 Δt に関するクーラン条件は存在せず、任意時間ステップ幅を用いることができる。また最初の数値実験に用いた時間依存のバーガース方程式と異なり、最終的な定常解だけをほしいのであるから、時間に関する離散化誤差も解の精度に関係してくることはなく、したがってクーラン数、すなわち疑似時間ステップ幅を必ずしも小さくする必要はない。クーラン数に対し 0.1 と

第 9 図 2 次元線形対流・拡散方程式に対する計算体系と流速ベクトル(相対値)

1.0 の 2 ケースに関する数値計算の経験によれば、むしろ大きいクーラン数の方が解の収束に要する反復回数を低減でき、効率的である。

(3) 解析解との比較

最大流速値に基づく $Pe = 200$ (メッシュ Pe 数の最大値 = 10) と $Pe = 1,000$ (メッシュ Pe 数の最大値 = 50) のときの等温線について計算結果と解析解との比較を第 10 図(a), (b) に示す。また第 11 図(a), (b) は $y = 0.475$ において x 方向に沿っての温度変化を示す。

QUICK 差分は右側上部の最大 Pe 数領域で数値振動が見られる。これは、明らかに特性方程式の根が負となる最短波長 $2\Delta x$ および $2\Delta y$ の数値振動である。一方、LECUSSO 差分は計算の全領域でスムーズな解を示している。この結果、特性方程式に基づく 1 次元等間隔格子形における静的数値振動解析結果は、2 次元等間隔格子系においても適用性がある。解がスムーズである計算の主要な領域においては、高 Pe 数における境界近傍の温度境界層部分を除いて、LECUSSO, QUICK いずれも解析解に近い良好な解を与えている。

第 10 図(a),(b) 2次元線形対流・拡散方程式に対する等温線図

VII. 結 言

炉心内自然循環時の熱成層現象等、急峻な被輸送量勾配をもつ多次元流動場を有限差分法で数値的に解く場合、対流項の差分式は数値解の精度と数値振動および安定性に重要な影響を与える。近年、多次元流動場に対する詳細解析のニーズに伴い、高次差分法が使用されているが、高次差分法は2程度以上のメッシュ Re , また Pe 数で数値振動を起す可能性があるため、数値振動を誘起しない高次差分法の開発が注目される。特に最近提案された高次差分 LECUSSO は、対流・拡散方程式の解析解を満足するように差分式を構成している点に特徴を有している。

本研究では、高次差分法を用いた差分解の数値振動発生について基礎的な考察を行い、特性多項式を利用した数値振動解析法を提案し、さらに LECUSSO 差分を実解析に使用できるよう不等間格子系へ拡張し、特性多項式解析法による数値振動解析お

よび数値実験を通して、計算格子系の違いが数値振動に与える影響と特性多項式解析法の適用限界について検討した。

本研究をまとめると以下の通りとなる。

- (1) 差分解の数値振動は差分方程式の真の解の振舞いであり、その振舞いの性質の違いから数値振動には、非定常解における動的数値振動と定常解における静的数値振動の2つの側面がある。数値振動を防止する上で、一般的には静的数値振動防止条件は動的数値振動防止条件を包含する必要十分条件となっていない可能性があり、したがって数値振動防止条件を評価する際に、数値振動現象における上記2つの側面の違いに留意し、防止条件の適用範囲を認識しておく必要がある。
- (2) 特性方程式解析法に基づいて、定数係数を有する1次元定常線形方程式に対する静的数値振動防止条件評価法を提案した。この方法を用いて、2次を含むそれ以下の精度の差分法の場合、

(A) QUICK 差分

(B) LECUSSO 差分

(a) $Pe=200$

(A) QUICK 差分

(B) LECUSSO 差分

(b) $Pe=1,000$ 第 11 図(a), (b) $y=0.475$ における x 方向温度分布

特性根を解析的に得ることが可能であるので、静的数値振動防止に対する必要十分条件を容易に得ることができる。特性根を解析的に得ることが困難な 3 次以上の高精度差分法の場合、根と係数の関係を利用して静的数値振動防止に対する必要条件を容易に得ることができる。

- (3) 1 次元等間隔格子の場合、中心差分、QUICK 差分、LECUSSO 差分の 3 種について、(2)で提案した特性多項式解析法を用いて静的数値振動

防止に対する必要十分条件を評価した。QUICK 差分の振動防止条件はメッシュ Re 数 (Rm) $\leq 8/3$ となるが、LECUSSO 差分はすべての Rm 数に対して静的数値振動を発生しない。また、富山、高橋の動的数値振動解析結果との比較から、QUICK 差分法の静的数値振動防止条件は数値振動を防止する上で動的数値振動防止条件を包含する必要十分条件とはなっていない。

- (4) 高次差分 LECUSSO を実解析に使用できる

よう不等間隔格子系へ拡張した。

- (5) 不等間隔格子系に拡張された LECUSSO 差分に対し、特性多項式解析法による静的数値振動解析を行い、計算格子系の違いが数値振動特性に与える影響について検討した。その結果、LECUSSO 差分は等間隔格子系に対しては、すべてのメッシュ Re 数に対し数値振動をもたらしすことはないが、不等間隔格子系においては数値振動解を与える可能性がある。
- (6) 特性多項式に基づく 1 次元静的数値振動解析法の非定常問題、非線形問題への適用性に関して、数値実験的に検討するため、1 次元非線形バーガス方程式に対する数値解を求め、解析解との比較を行なった。LECUSSO 差分は、不等間隔格子系においては数値振動解を与えたが、等間隔格子系においては、実験に用いたすべての Rm 数(2~50)に対してスムーズな解を与えた。この結果、1 次元非線形バーガス方程式を LECUSSO 差分で離散化するとき、その静的数値振動防止条件は動的防止条件と同値と考えられる。
- (7) 特性多項式に基づく 1 次元静的数値振動解析法の多次元問題に対する適用性を数値実験的に検討するため、2 次元線形対流-拡散方程式に対し等間隔格子を用いて数値解と解析解との比較を行なった。QUICK 差分は最大メッシュ Pe 数=10 においてすでに最短波長の数値振動を生じているのに対し、LECUSSO 差分は実験に用いた Rm 数(10~50)に対してスムーズな解を与えている。この結果、LECUSSO 差分法に対して特性多項式に基づく 1 次元等間隔格子系における静的数値振動解析結果は、2 次元等間隔格子系においても適用性がある。
- (8) 特性多項式に基づく静的数値振動解析と、富山、高橋の動的数値振動解析結果との比較から、QUICK 差分法の場合、静的数値振動防止条件と動的数値振動防止条件とは同値ではないことがわかったが、数値的には実用に際して支障を来すほどの差異はない。また数値実験を通して、LECUSSO 差分法の場合、1 次元バーガス方程式に関して両者は同値となっており、等間隔格子の場合、2 次元問題への適用性もあることがわかった。ここでは限られた数値実験であり、特性多項式解析法の実問題(すなわち非定

常、非線形、多次元問題)への適用性に関して、理論、数値実験両面からの検討がさらに望まれるが、特性多項式解析法の簡便さを合わせ考えると、ここで提案された静的数値振動解析法は実用的な数値振動防止条件評価法といえる。

本研究の一部は、著者がドイツのカールスルーエ原子力研究所に在外研究員として滞在していた際に実施して得たものである。U. Müller 教授、K. Rehme 教授、H. Hoffmann、D. Weinberg、C. Günther、M. Bottoni、H. Borgwaldt、W. Baumann 各博士に深謝する。

特性多項式に基づく静的数値振動解析法の必要性に関する教訓的な質問を、査読者より受け、特に十分性についての議論を加えることができた。ここに深謝する。

— 参考文献 —

- (1) 前川 勇：原子力誌，28[5]，444 (1986)。
- (2) 前川 勇：同上 29[9]，823 (1987)。
- (3) LAX, P.D.: *Comm. Pure Appl. Math.*, **11**, 175 (1958)。
- (4) LAX, P.D., RICHTMYER, R.D.: *ibid.*, **11**, 175 (1958)。
- (5) 富山明男，高橋亮一：原子力誌，32[10]，53 (1990)。
- (6) VARGA, R.S.: "*Matrix Iterative Analysis*", (1962), Printice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- (7) THOMAN, D.C., SZEWCZYK, A.A.: *Tech. Rep.*, 66-14, Univ. of Notre Dame, (1966)。
- (8) PATANKER, S.V.: "*Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*", (1980) Hemisphere.
- (9) 酒井勝弘：第 22 回乱流シンポジウム講演論文集，D-3，93 (1990)。
- (10) ALLEN, D.N. de, SOUTHWELL, R.V.: *J. Mech. Appl. Math.*, **8**, 129 (1955)。
- (11) SAMARSKY, A.A.: "*Theory of Difference Method*", (1984), Leipzig.
- (12) CHAPMAN, M.: *J. Comput. Phys.*, **44**, 84~103 (1981)。
- (13) LEONARD, B.P.: *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, **19**, 59 (1979)。
- (14) DUKOWICZ, J.K., RAMSHAW, J.D.: *J. Comp. Phys.*, **32** (1979)。
- (15) 酒井勝弘，関谷 全：第 19 回乱流シンポジウム講演論文集，2 (1987)。
- (16) GÜNTHER, C.I.: *Proc. of 1987 Int. Conf. on Computational Techniques and Applications at Sydney, Australia, CTAC-87*, 249 (1987)。
- (17) BARRETT, K.: "*Numerical Modelling in Diffusion Convection*", (1982), Pentach Press, London, Plymouth.
- (18) 山本哲朗："数値解析入門"，(1976)，サイエンス社。
- (19) 酒井勝弘：原子力誌，投稿中。
- (20) KAWAMURA, T., KUWAHARA, K.: *AIAA-84-0340*, (1984)。
- (21) BEIER, R.A., RIS, J. de, BAUM, H.R.: *Numer. Heat Transfer*, **6**, 283 (1983)。