研究論文

219. 異方散乱を行なう中性子の拡散過程

I. 年 齢 理 論

野 沢 豊 吉*

*The Diffusion Process of Neutrons Scattered Anisotropically**I. Age theory*

By Reikichi NOZAWA

The diffusion process of neutrons scattered anisotropically in the laboratory system is studied as a stochastic one by using Markov's method. A recurrence formula is derived for the characteristic function which should describe the population of neutrons around a source. The problem is reduced to that of obtaining the maximum eigenvalue and its associated eigenfunction of an integral equation with real symmetric kernel and is solved asymptotically for aged neutrons. It has been suggested that the conventional Fermi age

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \frac{v}{\xi} \frac{1}{1 - \bar{\mu}} \left(\frac{1}{\sum_s} \right)^2, \quad v: \text{ lethargy,}$$

should better be replaced by

$$\tau_n = \frac{1}{3} n \frac{1 + \bar{\mu}}{1 - \bar{\mu}} \left(\frac{1}{\sum_s} \right)^2, \quad n: \text{ nos. of collision,}$$

$\bar{\mu}$ being the average cosine of the scattering angle in the laboratory.

1. 問題とその位置

素過程の散乱が異方性をもつ場合につき、中性子の定常拡散現象を確率論的に記述しよう、というのがわれわれの目標である。媒質は非分裂性、一様、無限とする。媒質をつくる元素が軽いほど、散乱は実験室で前方へ偏る。点源からある方向($\hat{a}$)に向け発射された中性子は、源の近くではそのまわりの分布が球対称からずれるに違いない。しかし散乱回数を増して源から遠ざかるにつれ、やがて初めの方向 $\hat{a}$ を“忘れ”、源近くの点を中心とする球対称分布に漸近するであろう。

散乱回数とともに分布の非対称性がどのように失われてゆくかを知るには、輸送理論(たとえば P_1 近似、拡散近似)により中性子束を求めるだけでは充分でない。中性子の経験衝突回数ごとに中性子束を分解した物理量が必要である。

この物理量として、つぎのものを考える：点源(原点)から出発し地点 $\mathbf{a}$ で第1散乱を行なった中性子が、第 n 散乱直後 $\mathbf{a}_n$ だけ進んで地点 $\mathbf{r}$ の辺の体積 $d^3\mathbf{r}$ に存在する確率

$$W_n(\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n; \mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (1.1)$$

ただし $\mathbf{a}_h$ は第 h 散乱直後の中性子の自由路長。

(1.1)の W_n を自由路長 $a, a_1, \dots, a_n$ につき平均すると、源から $\hat{a} = \mathbf{a}/a$ の方向にとびだした中性子が第 n 散乱まで経験して $\mathbf{r}$ の辺の体積 $d^3\mathbf{r}$ に存在する確率

$$W_n(\hat{a}; \mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (1.2)$$

が得られる。この W_n の和が全中性子密度

$$N(\hat{a}; \mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(\hat{a}; \mathbf{r}) \quad (1.3)$$

であり、(1.2)の W_n と v_n (第 n 散乱直後の中性子速度)の積の和が全中性子束

$$\Phi(\hat{a}; \mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n W_n(\hat{a}; \mathbf{r}) \quad (1.4)$$

である。ただし、原点に定エネルギーの定常中性子源があつて、この源から $\hat{a}$ 方向に向け毎秒1個の中性子が発射されるとした。

* 東京工業大学 (Tokyo Institute of Technology)

われわれの問題は確率密度関数 (1.1) を決定すべき基本等式とその解を求めることである。この種の問題は確率論で“Random walk problem”とよばれる。すでに解かれているもの $1^\circ \sim 3^\circ$ とわれわれの問題 4° を対照すると、つぎのとおり：

1° 等方散乱の r, w, p .

(ただし、平均自由路長 $l_1, l_2, \dots, l_n$ は一定)

2° 実験室の向きに依存する異方散乱の r, w, p .

3° 直前の自由路に対し一定角の散乱をする異方散乱の r, w, p .

4° 直前の自由路に対し一定角分布の散乱をする異方散乱の r, w, p .

熱伝導や粒子のふつうの拡散は $1^\circ, 2^\circ$ により説明される。 2° の実例は磁場をかけられたプラズマ中の拡散。プラズマ中の荷電粒子の拡散係数はテンソルで、磁場に平行な向きは垂直な向きと成分を異にする。 3° の適用例はゴム状物質の弾性論。鎖状高分子中の第 h linkの向きは第 $h-1$ linkに対し一定の極角 θ (結合角または原子価角とよばれ、正四面体角 $109^\circ 28'$ に近い)を保ち、排除体積を無視すれば方位角 ϕ は任意、 ϕ を確率変数とする高分子の長さの二乗平均と平均偏差から、ゴム状物質のエントロピーが導かれる。

$1^\circ, 2^\circ$ と $3^\circ, 4^\circ$ の現象の違いは素過程の間の相関にある。前者では、続く2つの散乱の散乱角が互いに独立であるのに対し、後者では第 h 散乱直後の自由路 $\mathbf{a}_h$ の向きが、散乱直前の自由路 $\mathbf{a}_{h-1}$ の向きに依存する。もっとも、このものは自由路 $\mathbf{a}_{h-2}$ の向きとは直接の相関をもつことがないから、 3° も 4° も Markov 過程であることはまちがいない。

さて、粒子の多重衝突の理論においては、確率分布関数そのものを考える行き方よりも、その Fourier 変換(特性関数)を考察する Markov の方法の方が、数学的手段としてはるかに透明である。多重衝突は同種の素過程の重ね合わせであり、この重ね合わせの操作が、特性関数の世界における recurrence として記述されるからである。

Markov の方法については、少し古い Chandra-sekhar の総合報告⁽¹⁾があり、その第1章 §3 で一般論が、§4 の例(a), (b), (c)として 1° が、例(d)として 2° が紹介されている。 3° は初め Eyring⁽²⁾により、後に Moran⁽³⁾により取り扱われた。

2. 基本漸化式

第 h 散乱の中心を原点に、直前の自由路 $\mathbf{a}_{h-1}$ を z 軸、 $\mathbf{a}_{h-1}$ と与えられたベクトル $\mathbf{k}$ に平行な zx -面をとり、散乱直後の自由路 $\mathbf{a}_h$ の向きを極角 θ_h 、方位角

ϕ_h で表わす。 θ_h は実験室における散乱角である。また $\mathbf{k}$ と $\mathbf{a}_h$ のつくる角を ϕ_h とする。ただし、 $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}$ 、 $\phi_0 = \phi$ 。(第1図参照)

第 1 図

第 h 散乱直後の速度 v_h は厳密には散乱角 θ_h に依存し、したがって一般に第 h 散乱直後の中性子の全断面積 $\Sigma^{(h)}$ と散乱断面積 $\Sigma_s^{(h)}$ は散乱角 θ_h とともに変化するものである。しかし、われわれは、 $\Sigma^{(h)}$ および $\Sigma_s^{(h)}$ として、第 h 散乱におけるその平均値を採用し、散乱直後の巨視断面積が散乱角によらないとする。これは第1近似として許されるであろう。

この仮定の下で、第 h 散乱ののち第 $h+1$ 散乱がおこる素過程についての平均操作は、つぎの2つの演算子 $\mathbf{A}_h$ と $\mathbf{M}_h$ の積で表現される：

$$\mathbf{A}_h = \int_{-1}^1 d\mu_h \rho(\mu_h) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_h, \quad (2.1)$$

ここに $\mu_h = \cos \theta_h$ 、 $\rho(\mu)$ は μ (実験室系における散乱角余弦)の分布関数で

$$\int_{-1}^1 d\mu \rho(\mu) = 1; \quad (2.2)$$

$$\mathbf{M}_h = \int_0^\infty da_h \sigma_h(a_h), \quad (2.3)$$

ここに $\sigma_h(a) da$ は第 h 散乱直後の中性子が自由路 a を進んでのち da の間に第 $h+1$ 散乱をおこす確率で

$$\sigma_h(a) da = \Sigma_s^{(h)} \exp(-\Sigma^{(h)} a) da. \quad (2.4)$$

いま点源(原点)から出発した中性子が、 $\mathbf{a}$ で第1散乱を行ない第 n 散乱をへて、 $\mathbf{r}$ の辺の体積 $d^3\mathbf{r}$ のなかで第 $n+1$ 散乱を行なう確率を $P_n(\mathbf{a}; \mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$ とすれば、このものはデルタ関数 Δ ：

$$\Delta(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n; \mathbf{r}) = 1, \quad \sum_{h=0}^n \mathbf{a}_h - \mathbf{r} \text{ の } x, y, z \text{ 成分の絶対値が、それぞれ } 1/2 dx, 1/2$$

$dy, 1/2 dz$ をこえないとき;
 $= 0$, そのほかのとき;

に平均操作 $M \cdot A$ を施したもので表わされ

$$P_n(\mathbf{a}; \mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = M_1 A_1 \cdots M_n A_n \Delta(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n; \mathbf{r}). \quad (2.5)$$

Dirichlet の不連続因子

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sin ak}{k} e^{ibk} &= 1, \quad a > b > 0 \text{ のとき;} \\ &= \frac{1}{2}, \quad a = b > 0 \text{ のとき;} \\ &= 0, \quad b > a > 0 \text{ のとき;} \end{aligned}$$

を使って Δ を解析的に表わすと

$$\Delta = d^3 \mathbf{r} (2\pi)^{-3} \iiint d^3 \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot (\sum_{h=1}^n \mathbf{a}_h - \mathbf{r})).$$

これを (2.5) 式にいれ、積分の順序をかえると

$$\begin{cases} P_n(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = (2\pi)^{-3} \iiint d^3 \mathbf{k} \exp(-i\mathbf{k} \mathbf{r}) A_n(\mathbf{a}; \mathbf{k}), \\ A_n(\mathbf{a}; \mathbf{k}) \\ = \exp(i\mathbf{k} \mathbf{a}) M_1 \cdots M_n A_1 \cdots A_n \prod_{h=1}^n \exp(i\mathbf{k} \mathbf{a}_h). \end{cases} \quad (2.6)$$

P_n は確率密度関数, A_n は特性関数である。

とくに自由路長分布としてデルタ関数

$$\sigma_h(a) = \delta(a - a_h); \quad h=1, \cdots, n$$

をとったときの確率関数を $P_n(\mathbf{a}, a_1, \cdots, a_n; \mathbf{r})$ とかく。

$$\begin{cases} P_n(\mathbf{a}, a_1, \cdots, a_n; \mathbf{r}) \\ = (2\pi)^{-3} \iiint d^3 \mathbf{k} \exp(-i\mathbf{k} \mathbf{r}) A_n(\mathbf{a}, a_1, \cdots, a_n; \mathbf{k}), \\ A_n(\mathbf{a}, a_1, \cdots, a_n; \mathbf{k}) \\ = \exp(i\mathbf{k} \mathbf{a}) A_1 \cdots A_n \exp(i\mathbf{k} \sum_{h=1}^n \mathbf{a}_h), \end{cases} \quad (2.7)$$

明らかに $P_n(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ および $A_n(\mathbf{a}; \mathbf{k})$ は, (2.7) 式から自由路長についての平均操作 M によって導かれる:

$$\begin{cases} A_n(\mathbf{a}; \mathbf{k}) = M_1 \cdots M_n A_n(\mathbf{a}, a_1, \cdots, a_n; \mathbf{k}), \\ P_n(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = M_1 \cdots M_n P_n(\mathbf{a}, a_1, \cdots, a_n; \mathbf{r}). \end{cases} \quad (2.8)$$

また明らかに § 1 の W_n は P_n とつぎの関係にある:

$$\sum_s^{(n)} W_n(\mathbf{a}, \mathbf{r}) = P_n(\mathbf{a}, \mathbf{r}), \quad (2.9)$$

$$W_n(\mathbf{a}, a_1, \cdots, a_n; \mathbf{r}) \equiv P_n(\mathbf{a}, a_1, \cdots, a_n; \mathbf{r}). \quad (2.10)$$

$W_n(\mathbf{a}, \mathbf{r})$ は (1.3), (1.4) 式により中性子密度, 中性子束に対応するのに対し, $P_n(\mathbf{a}, \mathbf{r})$ は衝突密度に相当する。

いか, 特性関数 A_n を実数化した母関数 q_n :

$$\begin{aligned} q_n(\mathbf{a}, a_1, \cdots, a_n; \mathbf{k}) &= A_n(\mathbf{a}, a_1, \cdots, a_n; -i\mathbf{k}) \\ &= \exp(ka \cos \phi) A_1 \cdots A_n \exp(k \sum_{h=1}^n a_h \cos \phi_h) \end{aligned} \quad (2.11)$$

の従う漸化公式を求める。 q_n を導入する理由は実対称核をもつ積分方程式の解法を使う予定があるからである (§ 4)。“母関数” という名称は, 確率分布 $P_n(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ に関する, 源からの距離 $\mathbf{r}$ の n 階の能率テンソルが $q_n(\mathbf{a}; \mathbf{k})$ の $\mathbf{k}$ に関する n 階の微分係数として導かれることに由来する。たとえば中性子の Fermi 年齢を τ とすると, 6τ は源からの平均二乗行路にひとしく,

$$\begin{aligned} 6\tau &= \iiint d^3 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^2 P_n(\mathbf{a}; \mathbf{r}), \\ &= \text{div}_{\mathbf{k}} \cdot \text{grad}_{\mathbf{k}} q_n(\mathbf{a}; \mathbf{k})|_{\mathbf{k}=0} \end{aligned} \quad (2.12)$$

(2.12) 式は q_n の定義 (2.11), (2.7) 式から明らかである。またおなじ定義から, 母関数 q_n がつぎの漸化公式に従うことを導くことができる:

$$\begin{cases} q_n(\mathbf{a}; a_1, \cdots, a_n; \mathbf{k}) \\ = e^{k\mathbf{a}} A_1 q_{n-1}(\mathbf{a}_1, a_2, \cdots, a_n; \mathbf{k}), \quad (2.13) \\ q_0(\mathbf{a}; \mathbf{k}) = e^{k\mathbf{a}}, \end{cases}$$

この (2.13) 式が, われわれの基本等式である。

帰納的に調べると, 漸化公式 (2.13) の解はつぎの形をもつ:

$$\begin{aligned} q_n(\mathbf{a}, a_1, \cdots, a_n; \mathbf{k}) \\ = e^{k\mathbf{a}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) b_l f_l(a_1, \cdots, a_n) P_l(\cos \phi), \end{aligned} \quad (2.14)$$

ただし, ϕ は $\mathbf{k}$ と $\mathbf{a}$ の間の角, b_l は散乱角分布関数 $P(\mu)$ の Legendre 展開の係数で

$$b_l = \int_{-1}^1 d\mu P_l(\mu) \rho(\mu), \quad b_0=1, \quad b_l = \overline{\mu}. \quad (2.15)$$

事実 (2.14) 式を (2.13) 式にいれれば f_l のみたす漸化公式がえられる。

$$\begin{aligned} f_l(a_1, a_2, \cdots, a_n) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=|l-m|}^{l+m} c_{lmn} (2n+1) i_n(ka_1) \right) \\ &\times (2m+1) b_m f_m(a_2, \cdots, a_n), \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$f_l(a_1) = i_l(ka_1).$$

ここに

$$c_{lmn} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu P_l(\mu) P_m(\mu) P_n(\mu), \quad (2.17)$$

また i_n は変形球 Bessel 関数で

$$i_n(z) = (-i)^n j_n(iz) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} I_{n+\frac{1}{2}}(z),$$

$$= z^n \left(\frac{d}{z dz} \right)^n \frac{\sinh z}{z}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2z} \left[e^z \sum_{j=0}^n \frac{(-)^j (n+j)!}{j! (n-j)! (2z)^j} \right. \\ &\quad \left. + (-)^{n+1} e^{-z} \sum_{j=0}^n \frac{(n+j)!}{j! (n-j)! (2z)^j} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

うえの (2.14), (2.16) 式を導くには, つぎの 2 公式を

つかった：

$$e^{i\mu} = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) i_i(z) P_i(\mu), \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} A_1 P_1(\cos \phi_1) &= \int_{-1}^1 d\mu_1 \rho(\mu_1) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 P_1(\cos \phi_1), \\ &= b_1 P_1(\cos \phi). \end{aligned} \quad (2.20)$$

とくに等方散乱 ($b_1=b_2=\dots=0$) のときは, (2.16), (2.14) 式より

$$g_n(\mathbf{a}, a_1, \dots, a_n; \mathbf{k}) = e^{i\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}} \prod_{h=1}^n i_0(ka_h). \quad (2.21)$$

(2.11), (2.18) 式により

$$A_n(\mathbf{a}, a_1, \dots, a_n; \mathbf{k}) = e^{i\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}} \prod_{h=1}^n j_0(ka_h). \quad (2.22)$$

$e^{i\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}$ は $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{a})$ の Fourier 変換であり, この因子は, convolution を考えれば, 点源を原点から $\mathbf{a}$ 点に移す平行移動に過ぎないことがわかる。そこでこの因子を $1(\mathbf{a} \rightarrow 0)$ ならしめれば, 原点から等方的に発射される中性子の分布の特性関数としてつぎのものがえられる：

$$A_n(0, a_1, \dots, a_n; \mathbf{k}) = \prod_{h=1}^n j_0(ka_h). \quad (2.23)$$

右辺は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{k}$ の向きに依存せず, したがって分布は点源のまわりに球対称である。

いま媒質の吸収なし ($\Sigma_a=0$) とし, 第 h 散乱直後の平均自由路長を l_h として, 自由路長 a_h についての平均操作：

$$\bar{M}_h = \frac{1}{l_h} \int_0^{\infty} da_h \exp\left(-\frac{a_h}{l_h}\right); \quad h=1, \dots, n \quad (2.24)$$

を (2.23) 式に施したものを $A_n(0, l_1, \dots, l_n; \mathbf{k})$ とかけば

$$A_n(0, l_1, \dots, l_n; \mathbf{k}) = \prod_{h=1}^n \frac{\tan^{-1}(kl_h)}{kl_h}. \quad (2.25)$$

したがって, 原点のまわりの分布密度 $P_n(\mathbf{r})$ は, 固定自由路 a_h のとき：

$$\begin{aligned} P_n(a_1, \dots, a_n; \mathbf{r}) \\ = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^{\infty} dk \cdot k \sin(rk) \prod_{h=1}^n \frac{\sin(a_h k)}{a_h k}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

平均自由路 l_h のとき：

$$\begin{aligned} P_n(l_1, \dots, l_n; \mathbf{r}) \\ = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^{\infty} dk \cdot k \sin(rk) \prod_{h=1}^n \frac{\tan^{-1}(kl_h)}{l_h k}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

とくに散乱回数 n が大きいとき, (2.26), (2.27) 式の積分には, k の変域のうち 0 に近い部分のみが寄与する。 $k^2 \ll 1$ のとき

$$j_0(ak) = \frac{\sin ak}{ak} \simeq 1 - \frac{a^2 k^2}{6} \simeq \exp\left(-\frac{a^2 k^2}{6}\right),$$

$$\frac{\tan^{-1}(lk)}{lk} \simeq 1 - \frac{l^2 k^2}{3} \simeq \exp\left(-\frac{l^2 k^2}{3}\right),$$

であるから, 散乱回数 n が大きいときの分布の漸近形は

$$P_n(\mathbf{r}) \simeq \left(\frac{1}{4\pi\tau}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{r^2}{4\tau}\right), \quad (2.28)$$

$$\tau = \begin{cases} \frac{1}{6} \sum_{h=1}^n a_h^2, & \text{固定自由路のとき,} \\ \frac{1}{3} \sum_{h=1}^n l_h^2, & \text{平均自由路のとき,} \end{cases} \quad (2.28_1)$$

当然のことながら, (2.28₁) は Chandrasekhar の総合報告⁽¹⁾, 第 1 章 § 4 の例(b)の結果と一致し, (2.28₂) は Fermi の減速理論⁽⁴⁾の結果と一致する。なお (2.25), (2.28) 式を導くには, つぎの 2 公式をつかった：

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \int_0^{\infty} da e^{-a/l} j_0(ka) &= \frac{\tan^{-1}(kl)}{kl}, \\ 1 > (\text{Re}l) |\text{Im}k| > 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^{\infty} dk \cdot k \sin(rk) \exp(-ak^2) \\ = \left(\frac{1}{4\pi a}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{r^2}{4a}\right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

3. 散乱積分等式

(2.14) 式から知られるように, $|\mathbf{a}|, a_1, \dots, a_n, \mathbf{k}$ を固定パラメータとみると, 母関数 g_n は $\cos \phi = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}) / (ak)$ のみの関数である。以下簡単のため自由路長 $a, a_1, \dots, a_n$ がすべて等しい場合を考える。この場合の母関数 g_n を $\mathbf{a}$ または $w = a \cos \phi$ の関数とみて, $g_n(\mathbf{a})$ または $g_n(w)$ とかくと, 漸化公式 (2.13) 式は, つぎのようになる：

$$\begin{aligned} g_n(\mathbf{a}) &= e^{i\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}} \int_0^{\pi} d(\cos \theta) \rho(\cos \theta) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi g_{n-1}(\mathbf{a}'), \\ \mathbf{a}' &= \mathbf{b} \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{c} \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{a} \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.1)$$

ただし, 3 ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は長さが等しく右手系をつくり, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{k} = 0$ とする (第 2 図参照)。したがって

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(\mathbf{b} \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{c} \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{a} \cos \theta) \\ = k(\sqrt{a^2 - w^2} \sin \theta \cos \varphi + w \cos \theta) \end{aligned}$$

であるから, $g_n(\mathbf{a})$ を w ($\mathbf{a}$ の $\mathbf{k}$ 方向の成分) の関数として表現する漸化公式は, つぎの形をとる：

$$\begin{aligned} g_n(w) &= e^{kw} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d(\cos \theta) \rho(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &g_{n-1}(\sqrt{a^2 - w^2} \sin \theta \cos \varphi + w \cos \theta), \end{aligned} \quad (3.2)$$

(3.2) の解法は Fredholm 型積分等式の固有値問題に帰着せしめることができる。それにはまず (3.2) 式をつぎの 1°, 2°, 3° の操作により, (3.3) 式の形に変

$$a' = b \sin \theta \cos \varphi + c \sin \theta \sin \varphi + a \cos \theta$$

第 2 図

換する：

$$g_n(w) = \frac{1}{\pi a} e^{kw} \int_{-a}^a dv g_{n-1}(v) \int_0^\pi d\phi \rho(\mu), \quad (3.3)$$

ただし，

$$\mu = a^{-2} [vw - \cos \phi \sqrt{(a^2 - v^2)(a^2 - w^2)}]. \quad (3.4)$$

変換操作つぎのとおり：

1° 積分変数 φ から v への変換：

$$v = \sqrt{a^2 - w^2} \sin \theta \cos \varphi + w \cos \theta;$$

2° dv と $d\mu$ の積分順序の交換：

3° 積分変数 μ から ϕ への変換；ただし ϕ は (3.4) 式により μ と関係する。

(3.3) 式の積分核は polar kernel で

4° 母関数 $g_n(w)$ から $f_n(w)$ への変換：

$$\left. \begin{aligned} f_n(w) &= \exp\left(-\frac{kw}{2}\right) g_n(w), \\ f_0(w) &= \exp\left(\frac{kw}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

により対称化される。さらにつぎの操作：

5° 変数 w, v から ζ, η への変換：

$$w = a\zeta, \quad v = a\eta \quad (3.6)$$

を行なうと，(3.3) 式は，つぎの形の漸化公式に帰着せしめられる：

$$f_n(a\zeta) = \int_{-1}^1 d\eta f_{n-1}(a\eta) K\left(\frac{ka}{2}; \eta, \zeta\right) \quad (3.7)$$

ここに $K(c; \eta, \zeta)$ は， $c = ka/2$ をパラメータとする対称核で

$$\begin{aligned} K(c; \eta, \zeta) &= \exp(c\eta + c\zeta) \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\phi \rho(\mu), \\ &= \exp(c\eta + c\zeta) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} b_l P_l(\eta) P_l(\zeta) \end{aligned} \quad (3.8)$$

ただし， b_l は (2.15) 式。

さて (3.8) 式の $K(c; \eta, \zeta)$ は積分核として実対称，non-singular であるから，対称核に関する Hilbert-Schmidt の理論が適用される。いま第 2 種 Fredholm 型積分等式

$$\lambda \varphi(\zeta) = \int_{-1}^1 d\eta \varphi(\eta) K(c; \eta, \zeta) \quad (3.9)$$

を考え，これを散乱積分等式と名づける。この固有値を $\lambda_i(c)$ ，規格固有関数を $\varphi_i(c, \zeta)$ とすると

$$K(c; \eta, \zeta) = \sum_i \lambda_i(c) \varphi_i(c, \eta) \varphi_i(c, \zeta).$$

この等号は，右辺が絶対収束し， η か ζ について一樣収束しさえすれば成立する⁽⁵⁾。これらの固有値，固有関数が求められれば，(3.7) 式の解はつぎの形に求められる：

$$\begin{aligned} f_n(a\zeta) &= \sum_i \left(\lambda_i\left(\frac{ka}{2}\right) \right)^n \varphi_i\left(\frac{ka}{2}, \zeta\right) \\ &\times \int_{-1}^1 d\eta \varphi_i\left(\frac{ka}{2}, \eta\right) \exp\left(\frac{ka\eta}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

ところで積分核 $K(ka/2; \eta, \zeta)$ が実対称であるから，固有値 $\lambda_i(ka/2)$ はすべて実数，そのうちに絶対値最大の固有値 $\lambda_0(ka/2)$ が存在することは Schmidt の理論が保証する⁽⁵⁾。一方 $K(ka/2; \eta, \zeta)$ は $-1 \leq \eta, \zeta \leq +1$ の範囲の η, ζ のすべての値に対して正である。そこで正行列に関する Frobenius の定理⁽⁶⁾の類推を借りれば，絶対値最大の固有値 $\lambda_0(ka/2)$ は正で，単根，したがってこれに属する固有関数 $\varphi_0(ka/2, \zeta)$ は縮重をもたぬと考えて差支えない。以上により，つぎの近似が漸近的に成立する： $n \rightarrow \infty$ につれて

$$\begin{aligned} f_n(a\zeta) &= (\lambda_0(ka/2))^n \varphi_0(ka/2, \zeta) \\ &\int_{-1}^1 d\eta \varphi_0(ka/2, \eta) \exp(ka\eta/2). \end{aligned} \quad (3.11)$$

このようにして，問題は (3.8) を積分核とする第 2 種 Fredholm 積分等式の固有値と規格固有関数を求める問題に帰着した。

4. 散乱積分等式の解法

はじめに一般的解法として散乱積分等式 (3.9) 式の代数化を述べ，後に散乱回数 n が大きいときの漸近解を求める摂動計算の技巧に触れる。

散乱角分布関数 $\rho(\mu)$ の Legendre 展開を最初の $N+1$ 項で打ち切り， $b_{N+1} = b_{N+2} = \dots = 0$ とする。(3.8) 式の和の上限 ∞ を N におきかえると，(3.9) 式の固有関数 φ はつぎの形をもつ：

$$\varphi(\zeta) = e^{c\zeta} \sum_{m=0}^N a_m \left(\frac{2m+1}{2} \right)^{1/2} b_m^{1/2} P_m(\zeta). \quad (4.1)$$

事実 (4.1) 式を仮定すると (3.9) 式はつぎの代数等式

に等価となる：

$$(B - \lambda \mathbf{1})a = 0; \quad \mathbf{1}: \text{単位行列} \quad (4.2)$$

ここに B は

$$(B)_{lm} = [(2l+1)(2m+1)b_l b_m]^{1/2} \\ \times \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu P_l(\mu) P_m(\mu) e^{2c\mu} \quad (4.3)$$

を (l, m) 要素にもつ $N+1$ 次元の対称行列, a は未定係数 $a_0, a_1, \dots, a_N$ を要素とする列行列である。(4.3)式の積分を行なった結果は, (2.17) 式の c_{lmn} によりあらわされ

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu P_l(\mu) P_m(\mu) e^{2c\mu} \\ = \sum_{n=|l-m|}^{l+m} (2n+1) c_{lmn} i_n(2c) \quad (4.4)$$

導出の詳細は, (A.3), c_{lmn} の数値 (A.4)~(A.6) とともに, 付録に示す。

散乱角分布 $\rho(\mu)$ を P_1 近似にとどめ $N=1$ とするとき (4.2) 式は

$$\begin{pmatrix} i_0 - \lambda & \sqrt{3} b_1 i_1 \\ \sqrt{3} b_1 i_1 & b_1(i_0 + 2i_2) - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = 0$$

ただし, $i_n = i_n(2c)$ 。これを解けば

$$2\lambda = i_0 + b_1(i_0 + 2i_2) \pm [i_0^2 - 2b_1(i_0^2 + 2i_0i_2 - 6i_1^2) + b_1^2(i_0 + 2i_2)^2]^{1/2}$$

$b_1 = \bar{\mu} \ll 1$ として b_1 の 1 次の近似にとどめれば

$$\begin{cases} \lambda_0 \cong i_0 + 3b_1 i_1^2 / i_0, \\ \varphi_0(\xi) \cong e^{\xi} \left[1 + 3b_1 \frac{i_1}{i_0} \xi \right] (2i_0)^{-1/2} \left(1 - 3b_1 \frac{i_1^2}{i_0^2} \right) \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \cong b_1(i_0 + 2i_2 - 3i_1^2 / i_0), \\ \varphi_1(\xi) \cong e^{\xi} \xi (i_1 - i_0 \xi) \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} i_0^{-1} (i_0 + 2i_2 - 3i_1^2 / i_0)^{-1/2} \end{cases} \quad (4.6)$$

これらを (3.10), (3.5) 式にいれれば

$$g_n(w) \cong e^{kw_0^n} \left[1 + 3(n-1) b_1 \frac{i_1^2}{i_0^2} \right] (1 + 3b_1 i_1 \xi), \\ n \geq 1 \quad (4.7)$$

ただし, $i_i = i_i(ka)$ 。

$b_1 = 0$ のとき (4.7) は (2.21) 式と一致する。ただし $a_1 = \dots = a_n = a$ 。(4.7) 式の k を ik でおきかえると

$$A_n(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \dots, \mathbf{a}; \mathbf{k}) \cong e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}} [j_0(ka)]^n \\ \times \left[1 - 3(n-1) b_1 \frac{j_1^2(ka)}{j_0^2(ka)} \right] [1 + 3ib_1 j_1(ka) \xi]$$

$n \gg 1$ のとき, $k^2 \ll 1$ の変域に注目すると

$$A_n(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \dots, \mathbf{a}; \mathbf{k}) \cong \exp \left(-\frac{n\bar{a}^2 k^2}{6} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{c} \right) \quad (4.8)$$

$$\text{ここに, } \bar{a}^2 = a^2(1 + 2\bar{\mu}), \quad \mathbf{c} = \mathbf{a} + \bar{\mu}\mathbf{a} \quad (4.9)$$

したがって,

$$P_n(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \dots, \mathbf{a}; \mathbf{r}) \cong \left(\frac{1}{4\pi\tau} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{1}{4\tau} (\mathbf{r} - \mathbf{c})^2 \right] \quad (4.10)$$

$$\text{ここに, } \tau = \frac{1}{6} n \bar{a}^2. \quad (4.11)$$

(4.10) 式は $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \bar{\mu}\mathbf{a}$ を中心とする球対称分布を表わす。分布の中心のずれ $\mathbf{a} + \bar{\mu}\mathbf{a}$ のうち, $\mathbf{a}$ は第 1 散乱を $\mathbf{a}$ 点に固定したため生じたものであるが, $\bar{\mu}\mathbf{a}$ は前方散乱の効果である。また (4.9), (4.11) 式は Fermi 年齢 τ が異方散乱のため $1 + 2\bar{\mu}$ 倍に伸びることを意味する。

つぎに, パラメータ $c = ka/2$ が小さい場合につき, 散乱積分等式 (3.9) の規格固有関数 $\varphi_0(c, \xi)$ の近似形を求める摂動計算と, それを使って大きな n に対する $f_n(a\xi)$ の漸近形を算出する技巧を述べる。(3.8) 式の積分核 $K(c, \eta, \xi)$ に対し, c を 0 とした $K(0, \eta, \xi)$ を摂動前の核と考えると, $K(0, \eta, \xi)$ は固有値として b_l , 規格固有関数として $((2l+1)/2)^{1/2} P_l(\xi)$ をもつから, 積分等式 (3.9) の固有値, 規格固有関数はつぎのように c の級数に展開される：

$$\begin{cases} \lambda_l(c) = b_l + cb_u + c^2 b_{uu} + \dots, \\ \varphi_l(c, \xi) = \left(\frac{2l+1}{2} \right)^{1/2} [P_l(\xi) + c\phi_1(\xi) + c^2\phi_2(\xi) + \dots] \end{cases} \quad (4.12)$$

(4.12) 式を (3.9) 式にいれ, c^1 の大きさの項を取り出すことにより

$$\begin{cases} b_u = 0, \\ \phi_1(\xi) = \frac{l}{2l+1} \frac{b_l + b_{l-1}}{b_l - b_{l-1}} P_{l-1}(\xi) \\ + \frac{l+1}{2l+1} \frac{b_l + b_{l+1}}{b_l - b_{l+1}} P_{l+1}(\xi) \end{cases} \quad (4.13)$$

ただし, $l \neq m$ のとき $b_l \neq b_m$ とした。さらに c^2 の大きさの項を取り出すことにより

$$\begin{cases} b_{uu} = 2b_l \left[\frac{l^2}{(2l-1)(2l+1)} \frac{b_l + b_{l-1}}{b_l - b_{l-1}} \right. \\ \left. + \frac{(l+1)^2}{(2l+1)(2l+3)} \frac{b_l + b_{l+1}}{b_l - b_{l+1}} \right] \\ \phi_2(\xi) = \frac{(l-1)l}{2(2l-1)(2l+1)} \\ \times \frac{b_l^2 + 3b_l(b_{l-1} + b_{l-2}) + b_{l-1}b_{l-2}}{(b_l - b_{l-1})(b_l - b_{l-2})} P_{l-2}(\xi) \\ + \frac{(l+1)(l+2)}{2(2l+1)(2l+3)} \\ \times \frac{b_l^2 + 3b_l(b_{l+1} + b_{l+2}) + b_{l+1}b_{l+2}}{(b_l - b_{l+1})(b_l - b_{l+2})} P_{l+2}(\xi) \end{cases} \quad (4.14)$$

とくに最大の固有値と固有関数は(4.12)~(4.14)式において $l=0$ として求められる:

$$\begin{cases} \lambda_0(c) = 1 + c^2 \frac{2}{3} \frac{1+b_1}{1-b_1} + \dots \\ \varphi_0(\xi) = 2^{-1/2} \left[1 + c \frac{1+b_1}{1-b_1} P_1(\xi) \right. \\ \quad \left. + c^2 \frac{1}{3} \frac{1+3(b_1+b_2)+b_1b_2}{(1-b_1)(1-b_2)} P_2(\xi) + \dots \right] \end{cases} \quad (4.15)$$

したがって, (3.11)式の a を一たん $a/\sqrt{n}$, $n \gg 1$, で置きかえると

$$\begin{aligned} f_n(n^{-1/2}a\xi) &\cong \left(1 + \frac{k^2 a^2}{6n} \frac{1+b_1}{1-b_1} \right)^n \left[1 + \frac{k^2 a^2}{24n} \frac{3+b_1}{1-b_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{ka}{2\sqrt{n}} \frac{1+b_1}{1-b_1} P_1(\xi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k^2 a^2}{12n} \frac{1+3(b_1+b_2)+b_1b_2}{(1-b_1)(1-b_2)} P_2(\xi) \right], \\ &\cong \exp \left(\frac{k^2 a^2}{6} \frac{1+b_1}{1-b_1} + \frac{ka}{2\sqrt{n}} \frac{1+b_1}{1-b_1} \xi \right). \end{aligned}$$

したがって, (3.5)式より

$$g_n(n^{-1/2}a\xi) \cong \exp \left(\frac{k^2 a^2}{6} \frac{1+b_1}{1-b_1} + \frac{ka}{\sqrt{n}} \frac{1}{1-b_1} \xi \right).$$

a を $n^{1/2}a$ におきもどすと

$$g_n(a\xi) \cong \exp \left(\frac{n\bar{a}^2 k^2}{6} + kc \right), \quad (4.16)$$

$$\text{ただし, } \bar{a}^2 = a^2 \frac{1+\bar{\mu}}{1-\bar{\mu}}, \quad c = \frac{1}{1-\bar{\mu}} a. \quad (4.17)$$

(4.16)式の k を ik で置きかえると, (4.8), (4.10), (4.11)式と全く同じ漸近分布がえられる。(4.9)の $\bar{a}^2$ と c は(4.17)式のそれらから, $\bar{\mu}^2$ 以上の項を小さいとして省略すれば得られる。(4.9)式より(4.17)式の方が正確である。その理由は(4.9)式は散乱積分等式(3.9)を解くに近似 $b_1 = \bar{\mu} \ll 1$ を使っているのに対し, (4.17)式は散乱回数 n が大きいという前提のみから導かれるからである。

5. 中性子の Fermi 年齢

異方散乱を行なう中性子の Fermi 年齢は(4.17)と(4.11)式から

$$\tau_n = \frac{1}{6} n a^2 \frac{1+\bar{\mu}}{1-\bar{\mu}}, \quad (5.1)$$

ただし, n は散乱回数。(2.28)式から推論すれば

$$\tau_n = \frac{1}{6} \frac{1+\bar{\mu}}{1-\bar{\mu}} \sum_{k=1}^n a_k^2. \quad (5.2)$$

これら固定自由路の場合に対し, 平均自由路のあたえられた場合には, (2.28₁)と(2.28₂)式を参照して

$$\tau_n = \frac{1}{3} \frac{1+\bar{\mu}}{1-\bar{\mu}} \sum_{k=1}^n l_k^2. \quad (5.3)$$

とくに散乱の平均自由路長がすべてひとしく $l_1 = \dots = l_n = l$ のときは

$$\tau_n = \frac{1}{3} \frac{1+\bar{\mu}}{1-\bar{\mu}} n l^2. \quad (5.4)$$

さて Fermi の減速理論は等方散乱を仮定して導かれ, lethargy を u , 散乱1回当りの lethargy の増加を ξ とすれば

$$\tau_u = \frac{1}{3} \frac{u}{\xi} \frac{l^2}{1-\bar{\mu}}. \quad (5.5)$$

最近 Keane & Pollard⁽⁷⁾ は異方散乱による減速過程を論じて, 散乱1回当りの lethargy ξ_A が, 等方散乱と考えたときの ξ より小さく, 重い核 ($\bar{\mu} = 2/3 A \ll 1$) の場合には

$$\xi_A \cong \xi (1 - \bar{\mu}) \quad (5.6)$$

であることを再導出した。彼らの取扱いは重心系における異方散乱であるが, 重い核では重心系は実験室系に近いと考えてよい。そこで(5.6)式の ξ_A を(5.5)式の ξ に代入し, $u/\xi = n$ とすれば

$$\tau_n = \frac{1}{3} \frac{1}{(1-\bar{\mu})^2} n l^2. \quad (5.7)$$

これは, $\bar{\mu}^2$ を無視すればわれわれの結果(5.4)式と一致する。しかし, (5.4)式は前節終わりに注意したように $\bar{\mu} \ll 1$ を前提としていないから, 軽い核でも使える。したがって, (5.7)式より(5.4)式の方が正確であるといつてよい。実験室系における異方散乱が大きく効くのは軽い核の場合で, このとき(5.4)式と(5.7)式の違いは決して無視できない:

A	¹ H	² D	⁴ He
$\frac{1+\bar{\mu}}{1-\bar{\mu}}$	5.00	2.00	1.40
$\frac{1}{(1-\bar{\mu})^2}$	9.00	2.25	1.44

ただし, これは§2の初めにことわったように, 散乱直後の巨視断面積として, 散乱角によるその平均値を採用した第1近似の話である。¹Hのように軽い核の場合は, 散乱角による中性子の速度変化が大きく, これを考えに入れた第2近似の効果をも取り入れる必要がある。

6. むすび

われわれは異方散乱を行なう中性子の拡散過程について, 確率母関数 g_n の従う基本等式として漸化公式(2.13), (3.3)式を求めた。そして, その解法が実対称核(3.8)をもつ Fredholm 型第2種積分等式(3.9)

の最大の固有値とその固有関数を求める問題に帰着することを知った。散乱回数 n の増すにつれ、中性子は初めの方向を忘れ、その確率分布 $W_n(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ は次第に中心のずれた Gauss 型分布 (4.10), (4.17) に近づき、中性子の Fermi 年齢は (5.4) 式で与えられるようになる。この“中心のずれた球対称性”は軽い元素を含む減速材に関する炉物理測定技術と測定結果の解釈につき興味深い問題である。

終わりに文献(7)の存在を教示された日本原子力研究所原子炉物理第1研究室の諸兄に感謝するものである。

(1962年 4月11日 受理)

参 考 文 献

- (1) S. CHANDRASEKHAR : 'Stochastic Problems in Physics and Astronomy', *Rev. Mod. Phys.*, **15**, 1~89 (1943).
- (2) H. EYRING : 'The Resultant Electric Moment of Complex Molecules', *Phys. Rev.*, **39**, 746 (1932).
- (3) P. A. D. MORAN : 'The statistical distribution of the length of a rubber molecule', *Proc. Cambr. P.S.*, **44**, 342~344 (1948).
- (4) E. FERMI : "Nuclear Physics", (1950), Univ. Chicago.
- (5) e. g., G. HAMEL : "Integralgleichungen", (1949), Springer, Berlin.
- (6) M. FRÉCHET : "Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités", II, (1938), Gauthier-Villars, Paris.
- (7) A. KEANE, J. P. POLLARD : 'Slowing Down with Anisotropic Scattering', *Nucl. Sci. Eng.*, **12**, 313 (1962).
- (8) E. W. HOBSON : "Spherical and Ellipsoidal Harmonics", (1931), Cambridge.

【付 録】

$$f_{lm}(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu P_l(\mu) P_m(\mu) e^{i\mu t} \quad (\text{A. 1})$$

の Laplace 変換を $q_{lm}(p)$ とすると

$$q_{lm}(p) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu P_l(\mu) P_m(\mu) \frac{1}{p - \mu}$$

ただし、 p の実数部 $\text{Re}(p) > 1$ 。Heine の展開定理：

$$\frac{1}{p - \mu} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\mu) Q_n(p) \quad (\text{A. 2})$$

により、

$$q_{lm}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) c_{lmn} Q_n(p).$$

ところで、第2種 Legendre 関数 $Q_n(p)$ の Laplace 逆変換は変形球 Bessel 関数 $i_n(t)$ であるから

$$f_{lm}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) c_{lmn} i_n(t) \quad (\text{A. 3})$$

ここに c_{lmn} は (2.17) 式、その値はたとえば Hobson⁽⁸⁾ に導出されている：

$$\begin{aligned} c_{lmn} = & \frac{1}{l+m+n+1} \frac{(l+m+n)!!}{(l+m+n-1)!!} \\ & \times \frac{(l+m-n-1)!!}{(l+m-n)!!} \frac{(l+n-m-1)!!}{(l+n-m)!!} \\ & \times \frac{(m+n-l-1)!!}{(m+n-l)!!}, \end{aligned} \quad (\text{A. 4})$$

ただし、この式は $l+m+n$ が偶数、 $l+m \geq n$, $m+n \geq l$, $n+l \geq m$ のときに限り成立し、そのほかのときは

$$c_{lmn} = 0. \quad (\text{A. 5})$$

$l, m, n \leq 2$ の範囲内で、0 とならぬ c_{lmn} を表示すると

$$\begin{cases} c_{000} = 1, \\ c_{011} = \frac{1}{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} c_{121} = c_{112}, \\ c_{123} = \frac{3}{35}, \end{cases} \quad \begin{cases} c_{110} = c_{011}, \\ c_{112} = \frac{2}{15}, \\ c_{022} = \frac{1}{5}, \end{cases} \quad \begin{cases} c_{220} = c_{022}, \\ c_{222} = \frac{2}{35}, \\ c_{224} = \frac{2}{35}. \end{cases} \quad (\text{A. 6})$$

したがって、 $f_{lm}(t)$, $i_n(t)$ を f_{lm} , i_n とかくと

$$\begin{cases} f_{00} = i_0, \\ f_{01} = i_1, \\ f_{11} = \frac{1}{3}(i_0 + 2i_2), \end{cases} \quad \begin{cases} f_{02} = i_2, \\ f_{12} = \frac{1}{5}(2i_1 + 3i_3), \\ f_{22} = \frac{1}{35}(7i_0 + 10i_2 + 9i_4). \end{cases} \quad (\text{A. 7})$$