連載講座 原子炉物理

第2回 中性子の空間的振舞い(1)

平川直弘, 岩崎智彦

第Ⅱ章 中性子の空間的振舞い(1)

原子炉物理学の役割は、中性子を含む体系が与えられたとき、その中の任意の点で、ある時刻に、あるエネルギーを持って、ある方向に向って運動している中性子の密度を定めることである。この中性子密度から、単位時間にその点を通過する中性子数がわかり、それにマクロ断面積を掛けることによってその点での反応率が与えられる。たとえばそれが核分裂断面積であれば、熱計算に用いるべき熱出力が求められるし、 (n, α) 断面積であれば、原子炉材料の損傷に大きく影響するHeガスの生成量が求められる。当然、原子炉内の中性子数の生成と消滅のバランスから原子炉の臨界条件が求められる。

中性子密度はボルツマン(Boltzmann)の輸送方程式といわれるものに従う。ボルツマンの輸送方程式は1870年代にボルツマンが気体分子の速度の分布関数に対する正確な表現を得るために導入した基本方程式である。気体分子に対するボルツマン方程式は非線形の微積分方程式であるが、原子炉物理学が扱う範囲では中性子同士の衝突反応を考慮に入れる必要がなくなるため、方程式は線形となり扱いやすくなる。それでも、ボルツマン方程式は、時間(t)、空間(x, y, z)、エネルギー(E)または速さ(v)、中性子の運動方向(χ, θ)という7つの独立変数を持つ微積

分方程式なので、これをそのままの形で扱うことは解析的には不可能であり、数値解析を行う上でも困難である。

そこで、原子炉物理学では通常、これに拡散近似という近似を施して得られる方程式を取り扱う。拡散近似をして得られる方程式は、多くの場合、原子炉の中で生じている中性子の挙動を十分記述することができ、これから原子炉の中で中性子の果たす役割についての基本的な理解が得られる。

第Ⅱ章は、輸送方程式が中性子の数の保存を考えることにより容易に導出できること、および輸送方程式から拡散方程式を導く過程で施される近似について学ぶことにより拡散近似の限界を知ることを目的とする。そこで本章のはじめに輸送方程式を導入し、その後、拡散方程式に至る道筋を説明する。

1. 中性子密度と中性子束

まず、中性子密度 $n(\mathbf{r}, t)$ を次のように定義する。

$$n(\mathbf{r}, t)dV = \text{時刻 } t \text{ において、位置 } \mathbf{r} \text{ のまわりの} \\ \text{体積 } dV \text{ 内に存在する中性子数の} \\ \text{期待値} \quad (1)$$

ここで、期待値という言葉が用いられているのは、中性子輸送理論が統計理論であることに由来しており、実際の中性子数 $n(\mathbf{r}, t)$ は時間的に変動するが、原子炉物理学ではその平均値にのみ着目することを意味する。ついで、反応率密度 $R(\mathbf{r}, t)$ を次のように定義する(簡単に反応率ということも多い)。

$$R(\mathbf{r}, t)dV = \text{時刻 } t \text{ において、位置 } \mathbf{r} \text{ のまわりの} \\ \text{体積 } dV \text{ 内で起こる単位時間当りの} \\ \text{反応数(相互作用数)の期待値} \quad (2)$$

この反応率密度を定式化するため、原子炉内の中性子がすべて同じ速さ $v(\text{cm} \cdot \text{s}^{-1})$ を持っているとし、その場に断面積 $\sigma(\text{cm}^2)$ の原子核 $N(\text{個 cm}^{-3})$ を含む物質があるとする。すると、単位時間に、単位表面積を通過する中性子の個数は中性子密度と中性子の速さの積、すなわち $n(\mathbf{r}, t)v$ で与えられ、一方、物

平川直弘(Naohiro HIRAKAWA)

東北大学名誉教授。工博。
青森職業能力開発短期大学 校長。

岩崎智彦(Tomohiko IWASAKI)

東北大学大学院工学研究科量子エネルギー工学科助手。工博。
E-mail: tomohiko.iwasaki@qse.tohoku.ac.jp

質のマクロ断面積 Σ は σ と N の積で与えられるから、反応率密度 $R(r, t)dV$ は、

$$R(r, t)dV = \Sigma(r)vn(r, t)dV \quad (3)$$

と書くことができる。たとえば、軽水(H_2O)を考えその中の熱中性子密度が 10^7 (個 cm^{-3})であったとすると、熱中性子に対する H_2O のミクロ全断面積は103(b)なので、 $N = (1/18(g)) \times (0.6022 \times 10^{24}(\text{個})) \times (1.00(g \cdot cm^{-3})) = 0.0334 \times 10^{24}(\text{個} \cdot cm^{-3})$ 、そして $\Sigma = (0.0334 \times 10^{24}(\text{個} \cdot cm^{-3})) \times (103 \times 10^{-24}(b)) = 3.44(cm^{-1})$ であり、熱中性子の速さ v は $2.2 \times 10^5(cm \cdot s^{-1})$ であるので、反応率 $R = 7.57 \times 10^{12}(\text{個} \cdot cm^{-3})$ と求まる。

次に、この概念を中性子のエネルギーが変化する場合に対応できるように、中性子密度の定義を拡張する。すなわち、

$$n(r, E, t)dVdE$$

=時刻 t において、位置 r のまわりの体積 dV 内に存在してエネルギー E のまわりのエネルギー幅 dE 内にある中性子数の期待値

(4)

と定義する。「密度」という言葉が、空間のみならずエネルギーについても定義されていることに注意してほしい。これを用いると反応率密度は

$$R(r, E, t)dVdE = \Sigma(r, E)v(E)n(r, E, t)dVdE \quad (5)$$

と書ける。これらの表現に現れる中性子の速さと密度の積、 $vn(=v(E)n(r, E, t))$ は中性子束(neutron flux)と呼ばれ、原子炉物理学で最も広く用いられる。すなわち

$$\phi(r, E, t) = v(E)n(r, E, t) \quad (6)$$

単位は $\phi(\text{個} \cdot cm^{-2} \cdot s) = v(cm \cdot s^{-1})n(\text{個} \cdot cm^{-3})$ である。ただし、この中性子束*は、反応率を計算するために導入された数学的な量(速さ×密度)あるいは原子炉物理学特有の道具と考えるべきであって、この中性子束を用いることによって反応率が

$$R(r, E, t) = \Sigma(r, E)\phi(r, E, t) \quad (7)$$

のように計算できる。

再び先の例をとると、中性子束 $\phi = vn = 2.2 \times 10^5(cm \cdot s^{-1}) \times 10^7(\text{個} \cdot cm^{-3}) = 2.2 \times 10^{12}(\text{個} \cdot cm^{-2} \cdot s^{-1})$ 、そして反応率 $R = \Sigma\phi = 3.44(cm^{-1}) \times 2.2 \times 10^{12}(\text{個} \cdot cm^{-2} \cdot s^{-1}) = 7.57 \times 10^{12}(\text{個} \cdot cm^{-3})$ と計算できる。

* 中性子束は、中性子流と同じ次元の量であることなどから混同しやすいので注意すること。中性子流は物理的に明確な量であってベクトル量であるのに対し、中性子束はいわば便宜的な量であってスカラー量である。

2. 角中性子密度, 角中性子束, 角中性子流, 角反応率密度

(1) 角中性子密度, 角中性子束, 角中性子流, 角反応率密度の定義

前節で定義した中性子密度 $n(r, E, t)$ や中性子束 $\phi(r, E, t)$ を満たす正確な方程式は存在しない(拡散方程式など近似式は存在する)。正確な方程式を得るためには、これらの量をさらに一般化した量を定義しておく必要がある。

厳密な意味で、中性子密度を表すためには、位置 $r(x, y, z)$ 、エネルギー E (または $v = \sqrt{2E/m}$)、中性子の観測時刻 t という変数のほかに、中性子の運動方向 $\Omega = v/|v|$ を付け加える必要がある(テキストによっては、はじめから速度ベクトル v を用いて $\phi(r, v, t)$ としているものもある)。この Ω は単位ベクトル(すなわち $|\Omega| = 1$)であり、第II-1図のように、中性子の運動方向を表す空間における極座標 θ と χ をまとめて表すものである。

これを用いて、まず前節で定義した中性子密度 $n(r, E, t)$ を拡張して、角中性子密度(angular neutron density)を次のように定義する。

$$n(r, E, \Omega, t)dVdEd\Omega$$

=時刻 t に、位置 r のまわりの体積 dV 内に存在してエネルギー E のまわりのエネルギー幅 dE 内にあり、方向 Ω のまわりの角 $d\Omega$ に向かって運動している中性子数の期待値

(8)

第II-1図 中性子の位置と進行方向

これが最も一般的な中性子密度の定義であり、この角中性子密度に対して(厳密に)正確な方程式、すなわち中性子輸送方程式が導かれる。

その準備として、中性子束の場合と同様に角中性子密度に速さ $v(=|v|)$ を掛け、角中性子束(angular neutron flux) $\phi(r, E, \Omega, t)$ を次のように定義する。

$$\phi(r, E, \Omega, t) = v(E)n(r, E, \Omega, t) \quad (9)$$

さらに角中性子流(angular neutron current) $j(r, E, \Omega, t)$ というものを次のように定義する(角中性子流はベクトル量である)。

$$j(r, E, \Omega, t) = v(E)\Omega n(r, E, \Omega, t) \\ = \Omega \phi(r, E, \Omega, t) \quad (10)$$

角中性子束と角中性子流の関係は、 Ω が単位ベクトルであること考えると(変数を除いて書く)、

$$|j| = |\Omega|\phi = \phi \quad (11)$$

である。すなわち角中性子束は角中性子流の大きさに他ならない。この中性子流を言葉で定義すると、

$$j(r, E, \Omega, t) dA dE d\Omega \\ = \text{時刻 } t \text{ に、エネルギー } E \text{ のまわりのエネルギー} \\ \text{幅 } dE \text{ 内にあり、方向 } \Omega \text{ のまわりの角 } d\Omega \text{ に向か} \\ \text{って運動している中性子が位置 } r \text{ にある面 } dA \\ \text{を通過する単位時間当りの中性子数の期待値} \quad (12)$$

となる。ここで、面要素 dA は、第 II-2 図のように定義された位置 r にある微小な面であり、ベクトル dA はこの面に垂直な単位ベクトル e_s を用いて $dA = e_s \cdot dA$ で定義される。

さらに、反応率 $R(r, E, t)$ も一般化して、角反応率密度あるいは角反応率(angular interaction rate) $f(r, E, \Omega, t)$ を以下のように定義しておく。

$$f(r, E, \Omega, t) = \Sigma(r, E)v(E)n(r, E, \Omega, t) \\ = \Sigma(r, E)\phi(r, E, \Omega, t) \quad (13)$$

第 II-2 図 微小面積 dA への中性子入射の説明

(2) スカラー中性子密度, 中性子束, 中性子流

ここでは、角中性子密度, 角中性子束, 角中性子流と、先に定義した中性子密度, 中性子束, 中性子流の関係を明確にしておく。基本的には、ここで定義した角度に依存する量を、全角度(4π)で角度積分すると前節で与えた量になる。

(a) 中性子密度

中性子密度の場合、角中性子密度を全角度(4π)で角度積分すると、前節の中性子密度 $n(r, E, t)$ が与えられる。

$$n(r, E, t) = \int_{4\pi} n(r, E, \Omega, t) d\Omega \quad (14)$$

この Ω に依存しない中性子密度を、スカラー中性子密度と呼ぶことがある。

原子炉について考えると、角中性子密度が等方的で角度に依存しないと仮定できる場合がある。この場合には、角中性子密度とスカラー中性子密度の関係は次のようになることがわかる。

$$n(r, E, \Omega, t) = \frac{1}{4\pi} n(r, E, t) \quad (15)$$

さらに、エネルギーに依存しない中性子密度も、エネルギーについて積分することにより定義できる。すなわち、

$$n(r, t) = \int_0^\infty n(r, E, t) dE = \int_0^\infty \int_{4\pi} n(r, E, \Omega, t) d\Omega dE \quad (16)$$

(b) 中性子束

同様にして中性子束についても

$$\phi(r, E, t) = \int_{4\pi} \phi(r, E, \Omega, t) d\Omega \quad (17)$$

である。中性子密度と同様、中性子束についても Ω に依存しない中性子束をスカラー中性子束と呼ぶことがある。また、エネルギー積分した中性子束も同様に以下のように書ける。

$$\phi(r, t) = \int_0^\infty \phi(r, E, t) dE = \int_0^\infty \int_{4\pi} \phi(r, E, \Omega, t) d\Omega dE \quad (18)$$

(c) 中性子流

ついで、中性子流について見てみる。角中性子流 $j(r, E, \Omega, t)$ に、上記と同様に、角度積分・エネルギー積分を施すことにより、中性子流 $J(r, E, t)$ および $J(r, t)$ を、

$$J(r, E, t) = \int_{4\pi} j(r, E, \Omega, t) d\Omega = \int_{4\pi} \Omega \phi(r, E, \Omega, t) d\Omega \\ J(r, t) = \int_0^\infty J(r, E, t) dE \quad (19)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) dE = \int_0^\infty \int_{4\pi} \mathbf{j}(\mathbf{r}, E, \Omega, t) d\Omega dE \quad (20)$$

のように書くことができる。上と同様に Ω に依存しない中性子流をスカラー中性子流と呼ぶことがある。ここで導入した中性子流 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$ ならびに $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ は物理学で広く用いられている「束」の概念に対応するものである。以下中性子流について理解を得るため若干説明を付す。

$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ は、ある位置 $\mathbf{r}$ における微小な面 dA を考えたとき、

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} = \text{単位時間に面 } dA \text{ を通過する正味の中性子数} \quad (21)$$

と理解できる。たとえば、 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ の x 方向の成分 J_x を考える。 θ_x を中性子の運動方向 Ω と x 軸の間の角度とすると、 J_x は上の定義式から(変数 E が入っても同様である)、

$$\begin{aligned} J_x(\mathbf{r}, t) &= \int_{4\pi} j_x(\mathbf{r}, \Omega, t) d\Omega = \int_{4\pi} \Omega_x \phi(\mathbf{r}, \Omega, t) d\Omega \\ &= \int_{4\pi} \cos\theta_x \phi(\mathbf{r}, \Omega, t) d\Omega \\ &= \int_{4\pi} n(\mathbf{r}, \Omega, t) v \cos\theta_x d\Omega \end{aligned} \quad (22)$$

と計算できる(J_x はスカラー量)。この式に現れる $v \cos \theta_x$ は、第 II-3 図に示す通り、 yz 平面に単位底面を持ち、 v という長さの傾斜した円柱形の体積

第 II-3 図 x 軸に垂直な単位平面を通過する中性子の流れ

と考えられる。一方、この体系の中で v という速さを持ち、 Ω まわりの $d\Omega$ という方向に向って運動している中性子の数は角中性子密度 $n(\mathbf{r}, \Omega, t)$ で与えられるから、 $n(\mathbf{r}, \Omega, t) v \cos \theta_x$ は、 yz 平面に単位底面を持ち、 v という長さの傾斜した円柱形の体積中において v という速さを持ち、 Ω まわりの $d\Omega$ という方向に向って運動している中性子の数(単位時間当りの)を与える。これらの中性子が、まさに、 yz 面上の単位面積を通過する中性子であるから、上式内の被積分関数は yz 面上の単位面積を通過する中性子数(単位時間当りの)であり、そして、それを 4π 方向について積分して得られる $J_x(\mathbf{r}, t)$ は、単位時間に yz 面上の、すなわち x 軸に垂直な平面状の単位面積を通過する中性子の正味の数を与える。

これに関連して、原子炉物理学において、中性子流についてよく現れる用語 J_+ 、 J_- について触れておく。任意の平面に対して単位面積を単位時間に左から右に通過する中性子数を J_+ 、右から左に通過する中性子数を J_- と定義する(J_+ 、 J_- はスカラー量)。すなわち、

$$J_+(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \int_{2\pi^+} \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, \Omega, t) d\Omega dE \quad (23)$$

$$J_-(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \int_{2\pi^-} \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, \Omega, t) d\Omega dE \quad (24)$$

ここで、 $\mathbf{e}_s$ はその平面に垂直な単位ベクトル、 $2\pi^+$ あるいは $2\pi^-$ は、その面に垂直な成分を持つ方向についての角度積分をその正の方向($2\pi^+$)あるいは負の方向($2\pi^-$)についてそれぞれ行うことを示している。たとえば極座標を考えると、 J_+ は χ については 0 から 2π まで、 θ については 0 から $\pi/2$ まで行うことを意味し、 J_- は χ については 0 から 2π だが、 θ は $\pi/2$ から π まで積分することを意味する。この定義から、ある面を通過する正味の全中性子数は、

$$\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = (J_+(\mathbf{r}, t) - J_-(\mathbf{r}, t)) \quad (25)$$

と与えられる。

(d) 中性子束と中性子流の違い

なお、 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ と $\phi(\mathbf{r}, t)$ は明らかに違う量であることに注意してほしい。両方とも次元は $\text{個 cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ であるが、 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ は中性子がある面を通過する「正味」の数を与えるものであり、 $\phi(\mathbf{r}, t)$ は同じ面を通過するすべての中性子の数を与えるものである(両者とも単位時間、単位面積当り)。以下、2つの例を示しておく。

[例 1] ある面に対して垂直に中性子が左から右に $1,000$ (個 $\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) の割合で、右から左に

1,000(個 $\text{cm}^2\cdot\text{s}^{-1}$)の割合で通過していたとする。この時、中性子束は2,000(個 $\text{cm}^2\cdot\text{s}^{-1}$)となり、中性子流は0となる。両者は明らかに異なる。

[例2] 中性子が x 軸の負から正の方向に(yz 平面に垂直に正に向って)1,000(個 $\text{cm}^2\cdot\text{s}^{-1}$)の割合で、 y 軸の負から正の方向に(xz 平面に垂直に正に向って)1,000(個 $\text{cm}^2\cdot\text{s}^{-1}$)の割合で通過する状況を考える。この時、原点における中性子束は2,000(個 $\text{cm}^2\cdot\text{s}^{-1}$)となる。一方、中性子流は x 方向の中性子流と y 方向の中性子流のベクトルの和となるから $2\times 1,000\cos 45^\circ = 1,000\sqrt{2}$ (個 $\text{cm}^2\cdot\text{s}^{-1}$)個となる。中性子束と中性子流はやはり異なる。また、中性子流(ベクトル)は 45° 方向に値を取っているが、実際にはこの方向に向う中性子はない点にも注意すること。

3. 中性子輸送方程式の導出

本節では、前節で定義した角中性子密度あるいは角中性子束に対する、厳密に正しい方程式、中性子輸送方程式を導く。

まず、第II-4図のように、ある位置 r に存在する任意の体積 V の中で、あるエネルギー E を持ち、ある方向 Ω に向って運動している中性子数の増減を考える。ある体積 V 内にある E のまわりの dE というエネルギーを持ち、 Ω のまわりの $d\Omega$ という方向に向っている中性子の数は

$$\left(\int_V n(r, E, \Omega, t) dV\right) dE d\Omega \quad (26)$$

である。この中性子の単位時間あたりの変化率は

第II-4図 表面積 S を持つ体積 V の例

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V n(r, E, \Omega, t) dV \right) dE d\Omega \\ &= (\text{体積 } V \text{ 内で生成する中性子数}) \\ & \quad - (\text{体積 } V \text{ 内で消滅する中性子数}) \end{aligned} \quad (27)$$

で与えられる。体積 V が時間とともに変わらないとすれば

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V n(r, E, \Omega, t) dV \right) dE d\Omega \\ &= \left(\int_V \frac{\partial n(r, E, \Omega, t)}{\partial t} dV \right) dE d\Omega \end{aligned} \quad (28)$$

となる。

次に、中性子が V 内で生成したり、消滅したりする過程を考える。 V 内で生成する機構としては、

- ① V 内のあらゆる中性子源(核分裂源や外部中性子源等)からの中性子
- ② V の表面 S を通して V 内へ入ってくる中性子
- ③ それまで E' というエネルギーを持ち Ω' という方向へ運動していた中性子で、 V 内での散乱反応により E というエネルギーを持ち Ω という方向へ向うこととなった中性子

の3つがある。一方、中性子が V から失われる機構としては、

- ④ V の表面 S を通して漏れ出す中性子
- ⑤ V 内で反応した中性子(ここで、反応には、 V での吸収および中性子の原子核による散乱反応を含む。これは、散乱によってそれまで E というエネルギーを持ち、 Ω という方向に向いていた中性子が $E' (\neq E)$ 、 $\Omega' (\neq \Omega)$ となるという意味で中性子の損失になるからである)

の2つがある。(28)式と以上の項から

(V 内における単位時間あたりの中性子数の変化)

$$\begin{aligned} &= \left(\int_V \frac{\partial n(r, E, \Omega, t)}{\partial t} dV \right) dE d\Omega \\ &= (\text{①} + \text{②} + \text{③}) - (\text{④} + \text{⑤}) \\ &= (\text{①} + \text{③} - \text{⑤}) - (\text{④} - \text{②}) \end{aligned} \quad (29)$$

となる。以下、上記の5項について定式化する。

(1) 中性子源項①

$s(r, E, \Omega, t)$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} & s(r, E, \Omega, t) dV dE d\Omega \\ &= \text{位置 } r \text{ まわりの } dV \text{ という体積の中であって、} \\ & \quad E \text{ のまわりの } dE \text{ というエネルギーを持ち、} \\ & \quad \Omega \text{ のまわりの } d\Omega \text{ という方向に向っている} \\ & \quad \text{中性子の単位時間当りの発生数} \end{aligned} \quad (30)$$

これを用いて中性子源項①は

$$\text{①} = \left(\int_V s(r, E, \Omega, t) dV \right) dE d\Omega \quad (31)$$

で与えられる。

(2) 反応損失項⑤

中性子が位置 r で単位時間に起こす反応数は、(13)式の角反応率 $f(r, E, \Omega, t)$ で与えられるから、(13)式において全断面積を考えて、全反応数を

$$f_i(r, E, \Omega, t) = \Sigma_i(r, E) v(E) n(r, E, \Omega, t) \quad (32)$$

と書くと、 V 内での単位時間の反応の数、すなわち反応損失項⑤は

$$\textcircled{5} = \left(\int_V \Sigma_i(r, E) v(E) n(r, E, \Omega, t) dV \right) dE d\Omega \quad (33)$$

となる。

(3) 散乱流入項③

この項は、中性子のエネルギー、運動する方向の変化に関する項である。この項では、 E' のまわりの dE' というエネルギーを持ち、 Ω' のまわりの $d\Omega'$ という方向に向って運動していた中性子が、散乱反応を起こすことによりエネルギー・方向を変えて、着目している E のまわりの dE というエネルギーを持って Ω のまわりの $d\Omega$ という方向へ向って運動する中性子となる現象を取り扱う。このような中性子の単位時間当りの数は

$$\left(\int_V \Sigma_s(r, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) v'(E') n(r, E', \Omega', t) dV \right) dE' d\Omega' \quad (34)$$

である。したがって、すべての E', Ω' からの寄与を考えて、体積 V 内に単位時間当り発生する中性子数、すなわち③は、

$$\textcircled{3} = \left(\int_V \int_{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_s(r, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) v'(E') \times n(r, E', \Omega', t) dE' d\Omega' dV \right) dE d\Omega \quad (35)$$

となる。この③項を散乱流入項 (inscattering の項) という。また、 $\Sigma_s(r, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega)$ を 2 重微分散乱断面積 (double differential scattering cross section) という。

(4) 空間的流入項②と流出(漏れ)項④

この 2 つの項は、中性子の空間的な運動による項である。この 2 つの項、すなわち体積 V へ流入する中性子数②と流出する(漏れる)中性子数④は、両者の差(④-②)が体積 V の表面 S を通る正味の中性子の数で与えられることに着目して定式化できる。

エネルギー E を持ち、 Ω の方向に向っている中性子が表面 S の面要素 dS を単位時間当りに通過する数は、(10)式で定義された角中性子流そのものであり、

$$j(r, E, \Omega, t) dS = v(E) \Omega n(r, E, \Omega, t) dS \quad (36)$$

で与えられる。これを全表面領域 S について積分すると、体積 V からその表面 S を通って単位時間当り漏れる正味の中性子数、すなわち(④-②)は

$$(\textcircled{4} - \textcircled{2}) = \int_S v(E) \Omega n(r, E, \Omega, t) dS \quad (37)$$

となる。ガウスの定理

$$\int_S A(r) dS = \int_V \nabla A(r) dV \quad (38)$$

を用いて面積積分を体積分に書きかえると、

$$\begin{aligned} \int_S v(E) \Omega n(r, E, \Omega, t) dS \\ = \int_V \nabla v(E) \Omega n(r, E, \Omega, t) dV \end{aligned} \quad (39)$$

となる*。さらに、 Ω が空間に依存しないので、

$$\nabla(v\Omega) = v\Omega \cdot \nabla \quad (40)$$

となり、これを用いて(39)式を書き換えると、正味の中性子流、すなわち(④-②)は

$$(\textcircled{4} - \textcircled{2}) = \left(\int_V v(E) \Omega \cdot \nabla n(r, E, \Omega, t) dV \right) dE d\Omega \quad (41)$$

となる。

(5) 中性子輸送方程式

以上、定式化された各項を、(29)式、すなわち

$$\left(\int_V \left(\frac{\partial n(r, E, \Omega, t)}{\partial t} - (\textcircled{1} + \textcircled{3} - \textcircled{5}) + (\textcircled{4} - \textcircled{2}) \right) dV \right) \times dE d\Omega = 0 \quad (42)$$

に代入すると

$$\begin{aligned} \left(\int_V \left(\frac{\partial n}{\partial t} - \left(s + \int_{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_s v' n dE' d\Omega' - \Sigma_i v n \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (v\Omega \cdot \nabla n) \right) dV \right) dE d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

となる。ここで、簡単のため、変数の表記を削除した。さらに、上式において、体積 V は任意に選んでよいから、積分がどのような V に対してもゼロであるためには、被積分関数がゼロでなくてはならない。すなわち

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v\Omega \cdot \nabla n + \Sigma_i v n = \int_{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_s v' n dE' d\Omega' + s \quad (44)$$

この方程式が中性子輸送方程式であり、 r すなわち (x, y, z) 、 E, Ω すなわち (θ, χ) および t の 7 つの独立変数を持つ未知の従属変数 $n(r, E, \Omega, t)$ に対する線形方程式であり、また角度とエネルギーについての積分と、空間と時間についての微分を含む微積分方程式である。

中性子密度で書かれた方程式を角中性子束 $\Phi(r, E, \Omega, t)$ を用いて書き換えると

* ∇ は、 $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ で与えられる微分演算子で、ベクトルを与える。

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla \phi + \Sigma_t \phi = \int_{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_s \phi dE' d\Omega' + s \quad (45)$$

なお、中性子源が核分裂中性子源のみであれば(これはある程度以上、原子炉出力が高ければそうであるが)、 $\chi(E)$ を核分裂で発生する中性子のエネルギー分布、 $\nu(E)$ を核分裂1個当りの発生中性子数として、 s は、

$$s = s_f(r, E, \Omega, t)$$

$$= \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_{4\pi} \int_0^\infty \nu(E') \Sigma_f(E') \phi(r, E', \Omega', t) dE' d\Omega' \quad (46)$$

与えられる。ただし、ここで、核分裂中性子はすべて等方的に放出されるものとし、また核分裂中性子がすべて核分裂と同時に放出される(遅発中性子の存在を無視する)とした。

(6) 初期条件ならびに境界条件

中性子輸送方程式は通常、有限な体系に対して、その中のすべての場所での断面積が位置とエネルギーの関数として与えられたときに、中性子密度を求めるのに用いられる。中性子輸送方程式の中に微分項があり、この方程式は一般に無限個の解を持つので、物理的に妥当な解を求めるには初期条件と境界条件が必要である。

初期条件としては通常すべての位置、エネルギーおよび方向に対して時刻0における角中性子密度 n_0 あるいは角中性子束 ϕ_0 を指定する。すなわち

$$n(r, E, \Omega, 0) = n_0(r, E, \Omega) \text{ あるいは}$$

$$\phi(r, E, \Omega, 0) = \phi_0(r, E, \Omega)$$

$$(\text{すべての } r, E, \Omega \text{ に対して}) \quad (47)$$

一方、境界条件は問題に応じて適当なものが選ばれる。例えば体系が、第II-5図に示すように、表面として凸面を持ち、その外が無限に広い真空である場合には、体系から漏れ出した中性子が再び体系に戻ってくることはないのだからこのような場合の境界条件は、

第II-5図 凹表面と凸表面の例

$$n(r, E, \Omega, t) = 0 \quad \text{あるいは}$$

$$\phi(r, E, \Omega, t) = 0 \quad (\text{面 } S \text{ 上のすべての点 } r \text{ に対して, } \Omega \cdot e_s < 0 \text{ の場合}) \quad (48)$$

である。

4. 拡散方程式

原子炉計算では、多くの場合、必要となるのは(7)式の核反応率

$$R(r, E, t) = \Sigma(E) \phi(r, E, t) \quad (7)$$

であり、これを求めるには角中性子束を角度について積分した(スカラー)中性子束((17)式)

$$\phi(r, E, t) = \int_{4\pi} \phi(r, E, \Omega, t) d\Omega \quad (17)$$

があればよい。本節では、近似を導入して、このスカラー中性子束が従う方程式を導出するとともに、近似の導入に起因する方程式の限界を明らかにする。

(1) 中性子連続の式

まず、輸送方程式(45)を角度について積分すると(変数は r, E, Ω, t),

$$\begin{aligned} & \int_{4\pi} \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \int_{4\pi} \Omega \cdot \nabla \phi d\Omega + \int_{4\pi} \Sigma_t \phi d\Omega \\ &= \int_{4\pi} \int_{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_s \phi dE' d\Omega' d\Omega + \int_{4\pi} s d\Omega \end{aligned} \quad (49)$$

となる。各項のうち、①、③を整理すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \int_{4\pi} \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega = \frac{1}{v} \int_{4\pi} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega \\ &= \frac{1}{v} \frac{\partial \phi(r, E, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (50)$$

$$\textcircled{3} = \int_{4\pi} \Sigma_t \phi d\Omega = \Sigma_t \int_{4\pi} \phi d\Omega = \Sigma_t \phi(r, E, t) \quad (51)$$

⑤については、積分した中性子源を以下のように定義する。

$$\textcircled{5} = \int_{4\pi} s d\Omega \equiv s(r, E, t) \quad (52)$$

ついで、④を整理する。原子炉内での中性子の挙動を扱う場合には、無秩序に種々の方向を向いている中性子が原子核と散乱反応すると考えられることから、2重微分散乱断面積 $\Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega)$ は Ω' あるいは Ω 自身の方向に依存せず、両者(Ω' と Ω)の間の散乱角 θ のみに依存すると考えてよい。したがって、 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\chi$ および Ω' と Ω の内積 $\Omega' \cdot \Omega = \mu_0 = \cos \theta$ から、 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\chi = -d(\cos \theta) d\chi = -d\mu_0 d\chi$ であることを用いると

$$\begin{aligned}
& \int_{4\pi} \Sigma_s(r, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \Sigma_s(r, E' \rightarrow E, \mu_0) d\mu_0 d\chi \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\chi \right) \left(\int_{-1}^1 \Sigma_s(r, E' \rightarrow E, \mu_0) d\mu_0 \right) \\
&= 2\pi \int_{-1}^1 \Sigma_s(r, E' \rightarrow E, \mu_0) d\mu_0 \equiv \Sigma_s(r, E' \rightarrow E) \quad (53)
\end{aligned}$$

となる。したがって④は

$$\begin{aligned}
④ &= \int_{4\pi} \int_{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_s(r, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(r, E', \Omega', t) \\
&\quad \times dE' d\Omega' d\Omega \\
&= \int_0^\infty \int_{4\pi} \left(\int_{4\pi} \Sigma_s(r, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega \right) \\
&\quad \times \phi(r, E', \Omega', t) d\Omega' dE' \\
&= \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(r, E' \rightarrow E) \phi(r, E', \Omega', t) d\Omega' dE' \\
&= \int_0^\infty \Sigma_s(r, E' \rightarrow E) \left(\int_{4\pi} \phi(r, E', \Omega', t) d\Omega' \right) dE' \\
&= \int_0^\infty \Sigma_s(r, E' \rightarrow E) \phi(r, E', t) dE' \quad (54)
\end{aligned}$$

となる。最後に、②は、(10)式で定義した角中性子束と角中性子流の関係を用いて

$$\begin{aligned}
② &= \int_{4\pi} \Omega \cdot \nabla \phi d\Omega = \nabla \cdot \int_{4\pi} \Omega \phi d\Omega \\
&= \nabla \cdot \int_{4\pi} \mathbf{j} d\Omega = \nabla \cdot \mathbf{J}(r, E, t) \quad (55)
\end{aligned}$$

これらをまとめると(変数は r, E, t)

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} + \Sigma_t \phi = \int_0^\infty \Sigma_s \phi dE' + s \quad (56)$$

となる。この式を中性子連続の式という。この式はスカラー中性子束を変数とする方程式となっているが、この式の導出において従属変数 Ω を除く過程でもう1つの未知関数 $\mathbf{J}$ を導入した(してしまった)。そのため、この式は正確な式であるものの、 ϕ と $\mathbf{J}$ という2つの未知関数を含んだものとなった。 ϕ と $\mathbf{J}$ は別の関数であり、両者を簡単に結び付けることはできないので、スカラー中性子束のみの正確な方程式を得ることはできない。しかし、原子炉物理学では、以下に述べるいくつかの近似(拡散近似と呼ぶ)を導入して、スカラー中性子束のみを変数とする方程式を得ている。

(2) 単速中性子輸送方程式

近似を導入する前に、式の出扱いを容易にする目的で輸送方程式からエネルギー依存性を除く。エネルギー依存性を除くための一般的に行われる方法

* 実際の原子炉計算では、エネルギー区間を区切ってそれぞれの区間で積分して得られる多群輸送方程式が数値計算に用いられている。

は、エネルギーについて積分することである*。しかし、ここでは「散乱によりエネルギーが変化しない」という近似(単速近似と呼ぶ)を導入して、すなわち

$$\Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega = \Sigma_s(E', \Omega' \rightarrow \Omega) \delta(E' - E) \quad (57)$$

と置くことによりエネルギー変数を除く。ただし、 $\delta(E' - E)$ は、任意の変数に対して

$$\int dx' f(x') \delta(x' - x) = f(x) \quad (58)$$

で定義される δ 関数である。この近似を用いると、中性子のエネルギー E は変化せず、常に一定のエネルギーとなる。これを用いると、輸送方程式(45)から変数 E が除かれて

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{v} \frac{\partial \phi(r, \Omega, t)}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla \phi(r, \Omega, t) + \Sigma_t(r) \phi(r, \Omega, t) \\
&= \int_{4\pi} \Sigma_s(r, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(r, \Omega', t) d\Omega' + s(r, \Omega, t) \quad (59)
\end{aligned}$$

となる(変数は (r, Ω, t))。この式では断面積をすべて同一のエネルギー(速さ)で計算できるので、単速中性子輸送方程式という。

(59)式を前節と同様の手順で、角度について積分して

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{v} \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}(r, t) + \Sigma_t(r) \phi(r, t) \\
&= \int_{4\pi} \Sigma_s(r) \phi(r, t) d\Omega + s(r, t) \quad (60)
\end{aligned}$$

が得られる(変数は (r, t))。この式は単速の中性子連続の式と呼ばれる。

(3) フィックの法則と中性子拡散方程式

中性子連続の式(60)式からスカラー中性子束のみを変数とする方程式を得るため、「中性子流が中性子束の勾配に比例する」と仮定する。すなわち、

$$\mathbf{J}(r, t) = -D(r) \nabla \phi(r, t) \quad (61)$$

このように流れが濃度(密度)の勾配に比例するという関係は物理学の他の分野でもしばしば現れる関係で、フィック(Fick)の法則と呼ばれる。原子炉物理学では、その比例定数 $D(r)$ を中性子拡散係数と呼び、次式で与えられることとなる(次節)。

$$D(r) = \frac{1}{3\Sigma_{tr}(r)} = \frac{1}{3(\Sigma_t(r) - \mu_0 \Sigma_s(r))} \quad (62)$$

中性子流と中性子束の近似式、すなわちフィックの法則とその比例定数である拡散係数は、中性子輸送方程式に3つの近似を施すことにより導出することができる。次節にその詳細を述べる。

この中性子束と中性子流の関係を中性子の連続の式(60)に代入すると、

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial t} - \nabla D(r) \nabla \phi(r, t) + \Sigma_t \phi(r, t) - \Sigma_s(r) \phi(r, t) + s(r, t) \quad (63)$$

となる。この方程式が単速理論の中性子拡散方程式と呼ばれる中性子束のみを変数とする方程式である。この方程式を解くことにより中性子束が与えられ、原子炉の基本的な量・性質を把握することができる。

(4) フィックの法則の導出

ここでは、フィックの法則の導出とそのために導入した近似について解説する。

(a) 単速輸送方程式の変形

単速の輸送方程式(59)式からスタートする。はじめに、(59)式を角度について積分して、

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial t} + \nabla J(r, t) + \Sigma_t(r) \phi(r, t) = \Sigma_s(r) \phi(r, t) + s(r, t) \quad (64)$$

とする((60)式と同一)。ただし $\Sigma_s(r)$ は、

$$\Sigma_s(r) = \frac{1}{\phi(r, t)} \int_0^\infty \Sigma_s(r, E' \rightarrow E) \phi(r, E', t) dE' \quad (65)$$

と書ける。さらに、同じく(59)式に Ω を掛けてから角度について積分する。すなわち、

$$\begin{aligned} & \int_{4\pi} \Omega \frac{1}{v} \frac{\partial \phi(r, \Omega, t)}{\partial t} d\Omega \\ & + \int_{4\pi} \Omega \Omega \cdot \nabla \phi(r, \Omega, t) d\Omega + \int_{4\pi} \Omega \Sigma_t(r) \phi(r, \Omega, t) d\Omega \\ & = \int_{4\pi} \Omega \int_{4\pi} \Sigma_s(r, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(r, \Omega', t) d\Omega' d\Omega \\ & + \int_{4\pi} \Omega s(r, \Omega, t) d\Omega \end{aligned} \quad (66)$$

である。そして、第1, 2, 3項は、

$$\begin{aligned} & \int_{4\pi} \Omega \frac{1}{v} \frac{\partial \phi(r, \Omega, t)}{\partial t} d\Omega \\ & = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \int_{4\pi} \Omega \phi(r, \Omega, t) d\Omega = \frac{1}{v} \frac{\partial J(r, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (67)$$

$$\int_{4\pi} \Omega \Omega \cdot \nabla \phi(r, \Omega, t) d\Omega = \nabla \int_{4\pi} (\Omega \cdot \Omega) \phi(r, \Omega, t) d\Omega \quad (68)$$

$$\begin{aligned} & \int_{4\pi} \Omega \Sigma_t(r) \phi(r, \Omega, t) d\Omega = \Sigma_t \int_{4\pi} \Omega \phi(r, \Omega, t) d\Omega \\ & = \Sigma_t J(r, t) \end{aligned} \quad (69)$$

とできる。また第5項は、

$$\int_{4\pi} \Omega s(r, \Omega, t) d\Omega = \int_{4\pi} \Omega s(r, \Omega, t) d\Omega \equiv s_1(r, t) \quad (70)$$

と置く。以上を(66)式に代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \frac{\partial J(r, t)}{\partial t} + \nabla \int_{4\pi} (\Omega \cdot \Omega) \phi(r, \Omega, t) d\Omega + \Sigma_t J(r, t) \\ & = \int_{4\pi} \Omega \int_{4\pi} \Sigma_s(r, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(r, \Omega', t) d\Omega' d\Omega \\ & + s_1(r, t) \end{aligned} \quad (71)$$

となる。

最後に、残る右辺第1項について考える。この項の中の散乱断面積 $\Sigma_s(r, \Omega' \rightarrow \Omega)$ は、散乱角の余弦 $\Omega' \cdot \Omega$ にのみ依存すること、および Ω が積分変数であることから、

$$\int_{4\pi} \Omega \Sigma_s(r, \Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega = \int_{4\pi} \Omega \Sigma_s(r, \Omega' \cdot \Omega) d\Omega = A \Omega' \quad (72)$$

とおくことができる*。そして(72)式の両辺において、それぞれ Ω' との内積を取ると、右辺は

$$(\text{右辺}) \quad \Omega' \cdot A \Omega' = A(\Omega' \cdot \Omega') = A \quad (73)$$

であり、左辺は

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) \quad & \Omega' \cdot \left(\int_{4\pi} \Omega \Sigma_s(r, \Omega' \cdot \Omega) d\Omega \right) \\ & = \int_{4\pi} (\Omega' \cdot \Omega) \Sigma_s(r, \Omega' \cdot \Omega) d\Omega \equiv \Sigma_{s1}(r) \end{aligned} \quad (74)$$

となるので、 $A = \Sigma_{s1}(r)$ であって、これは散乱角の1次モーメントであることがわかる。これを用いると、右辺第1項は、

$$\begin{aligned} & \int_{4\pi} \Omega \int_{4\pi} \Sigma_s(r, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(r, \Omega', t) d\Omega' d\Omega \\ & = \int_{4\pi} \left[\int_{4\pi} \Omega \Sigma_s(r, \Omega' \cdot \Omega) d\Omega \right] \phi(r, \Omega', t) d\Omega' \\ & = \int_{4\pi} A \Omega' \phi(r, \Omega', t) d\Omega' = \int_{4\pi} \Sigma_{s1}(r) \Omega' \phi(r, \Omega', t) d\Omega' \\ & = \Sigma_{s1}(r) \int_{4\pi} \Omega' \phi(r, \Omega', t) d\Omega' = \Sigma_{s1}(r) J(r, t) \end{aligned} \quad (75)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \frac{\partial J(r, t)}{\partial t} + \nabla \int_{4\pi} (\Omega \cdot \Omega) \phi(r, \Omega, t) d\Omega + \Sigma_t J(r, t) \\ & = \Sigma_{s1}(r) J(r, t) + s_1(r, t) \end{aligned} \quad (76)$$

となる(ここで、中性子束を含む項が残っていることに注意)。 Σ_{s1} は、(74)式の通り、すなわち、散乱断面積 Σ_s に Ω を乗じて角度について積分して求められ、

$$\begin{aligned} \Sigma_{s1}(r) &= \int_{4\pi} (\Omega' \cdot \Omega) \Sigma_s(r, \Omega' \cdot \Omega) d\Omega(r) \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 (\Omega' \cdot \Omega) \Sigma_s(r, \Omega' \cdot \Omega) d\mu_0 = \bar{\mu}_0 \Sigma_s(r) \end{aligned} \quad (77)$$

である。ただし、この式の中の $\bar{\mu}_0$ は散乱角の平均余弦で、

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_0 &\equiv \langle \Omega' \cdot \Omega \rangle = \frac{1}{4\pi \Sigma_s} \int_{4\pi} \int_{4\pi} (\Omega' \cdot \Omega) \Sigma_s(\Omega' \cdot \Omega) d\Omega' d\Omega \\ &= \frac{2\pi}{\Sigma_s} \int_{-1}^1 \Sigma_s(\mu) d\mu_0 \end{aligned} \quad (78)$$

で与えられる。

* 1次の展開項のみを取り、高次の項を無視することにより、近似的にこのように置くことができる。

$$\frac{1}{3} \nabla \phi(r, t) + \Sigma_{tr} J(r, t) = 0, \text{ すなわち}$$

$$J(r, t) = -\frac{1}{3\Sigma_{tr}} \nabla \phi(r, t) \quad (94)$$

となり、中性子流と中性子束の勾配が比例するという式、すなわちフィックの法則が導かれる。

なお、上で求めた2つの式(88)と(89)を P_1 方程式という場合がある。これは、1次元の平板体系において、角中性子束をルジャンドル(Legendre)関数に展開して、その0次の項(P_0 項)と1次の項(P_1 項)を残した近似、すなわち

$$\phi(x, \mu, t) = \phi(x, t) \frac{1}{2} P_0(\mu) + J(x, t) \frac{3}{2} P_1(\mu) \quad (95)$$

としたものに等価だからである。

(5) 拡散近似の限界

単速拡散方程式の導出の際に導入された近似を整理すると、

(1) 散乱によりエネルギーが変化しない(単速近似)、

ならびに、

(2) 角中性子束が角度について1次式で表される(P_1 近似)、

(3) 中性子源が等方的である、

(4) 中性子流の時間変化率が反応率より遙かに小さい、

の4つとなる。このうち、(2)~(4)を総じて通常、拡散近似と呼ぶ。

以下、これらの拡散近似が成り立つ条件について考えることにより、拡散方程式の限界を明らかにする。ただし、原子炉を想定してこれらの近似を考えると、(2)以外はほぼ成立するので、以下で(2)についてのみ考える。

近似(2)は、角中性子束を中性子束と中性子流を用いて(79)式の通り、

$$\begin{aligned} \phi(r, \Omega, t) &= \frac{1}{4\pi} (\phi(r, t) + 3\Omega \cdot J(r, t)) \\ &= \frac{1}{4\pi} (\phi(r, t) + 3(J_x(r, t)\Omega_x + J_y(r, t)\Omega_y \\ &\quad + J_z(r, t)\Omega_z)) \end{aligned} \quad (96)$$

のように展開したことに等価である。ここで、 e_x, e_y, e_z をそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルとすると、 $\Omega_x = \Omega \cdot e_x, \Omega_y = \Omega \cdot e_y, \Omega_z = \Omega \cdot e_z$ である。

一般の原子炉の内部において、この近似はよく成立する。 $J_x = J_y = J_z = 0$ の場合、角中性子束は極座標で表すと第II-6図(a)のようになり、すべての方向を向く中性子束がみな等しい大きさを持つ。このよ

第II-6図 中性子束の極座標表示

うなことを等方的であると表現する。

しかし、原子炉の中に、中性子束が等方的から大きく外れる条件や場所がある。いま、(96)式の近似式において、 $J_y = J_z = 0$ とし、 $\phi(r, t)$ と $J_x(r, t)$ のみが値(正の値)を持つ場合を考える。このときには、角中性子束は x 方向に歪んだ形となり、 x の正の方向へ向う成分のみが大きく、負の方向へ向う成分が小さくなる。すなわち、極座標で書くと第II-6図(b)のようになる。そこで J_x が大きくなって $3J_x$ が ϕ より大きくなったとすると、 x 軸の負の方向へ向う角中性子束が負の値となることとなり、これは物理的にあり得ない。すなわち、 $3J_x$ は ϕ より小さくなければならない(J_y, J_z についても同様である)。したがって、上式のように角中性子束を1次式で展開する近似は、ある特定の方向へ向う中性子束が他の方向へ向う中性子束に比べて著しく大きい場合(例えばビーム状の中性子束)には破綻を来す。すなわち、フィックの法則は中性子束の角分布がある方向に対して大きい場合には成り立たない。

このようなことは、

- ① 中性子源が局在しているとき、その中性子源近傍で、
- ② 2つの境界の左右で散乱断面積または吸収断面積が著しく異なる場合、その境界近傍で起こる。

②について考える。第II-7図のように、ある境界の左側(A)では散乱断面積が吸収断面積よりはるかに大きい($\Sigma_{sA} \gg \Sigma_{aA}$)、境界の右側(B)では逆に吸収断面積が散乱断面積よりはるかに大きい($\Sigma_{sB} \ll \Sigma_{aB}$)とする。すると、Aでの散乱によりAからBにはたくさんの中性子が入ってくるのに対し、Bではほとんどの中性子が吸収されてしまうために、BからAに向う中性子はほとんどない。そのため、B中では大部分の中性子が左から右に向って運動することとなり、Bの内部で角中性子束は1方向に傾いた

第 II-7 図 吸収の小さい領域と大きい領域の境界付近での中性子束の極座標表示

ものとなる。また、Bの中では吸収が大きいため中性子束が急激に減衰し、内部で中性子束の非等方性が回復することはない。これらのことから、AとBの境界周辺ならびにBの内部では、中性子束が非常に大きく歪み、フィックの法則が成り立たなくなる。原子炉では、制御棒などの強い吸収体付近とその内部でこのような状況が起こる。

また、先の図において、Bが空気のようにほとんど断面積がゼロであるような場合を考える。このような場合にも、B→Aという中性子が実際存在しないため、同様に中性子束に極端な大きな歪みが生じる。このような状況は原子炉の外側の境界近傍で起こる。このような境界を真空境界と呼ぶ。真空境界においては、真空側(B側)の内部では1方向に向う角中性子束分布となることから、左側(A側)においても真空境界の近傍ではA→Bの中性子がB→Aの中性子よりも遙かに多くなるため、フィックの法則が成立しなくなる。ただし、境界近傍を除けば(おおよそ境界から平均自由行程にしてAの中に2～3行程入ったところより奥で)、散乱反応により中性子が等方的に散乱されるため、フィックの法則が成立し中性子束は(63)式で十分正しく表される。

まとめると、拡散近似、すなわちフィックの法則は、強い吸収体の付近、吸収体の内部、真空境界の付近、局所的な中性子源の近くを除けば成り立つと考えてよい。このような場合を除いて、拡散方程式は正しい中性子束を与え、原子炉の特性を理解するのに充分有用である。

5. 中性子拡散理論の初期条件と境界条件

中性子拡散方程式は時間と空間の両方についての微分を含むので、初期条件と境界条件とが必要である。拡散方程式は輸送方程式から導かれたものであ

るから、先に述べた輸送理論の初期条件、境界条件から、拡散方程式の初期条件・境界条件を導くこととする。

(1) 初期条件

先に述べた輸送方程式に対する初期条件は(単速の場合には)

$$\phi(r, \Omega, t) = \phi_0(r, \Omega) \quad (\text{すべての } r, \Omega \text{ に対して}) \quad (97)$$

である。これを角度について積分することにより、拡散方程式の初期条件

$$\phi(r, 0) = \phi_0(r) \quad (\text{すべての } r \text{ に対して}) \quad (98)$$

が与えられる。

(2) 境界条件

ついで境界条件について考える。これには問題の物理的条件に応じていくつかのものが考えられる。

(a) 境界面における境界条件

異なる断面積を持つ2つの領域(AとB)が接している場合を考える。このとき正しい輸送理論の境界条件は、角中性子束が連続することから、

$$\phi_A(r_s, \Omega, t) = \phi_B(r_s, \Omega, t) \quad (99)$$

である。ただし、 ϕ_A は領域Aにおける角中性子束、 ϕ_B は領域Bにおける角中性子束とし、 r_s を両者の境界面を表す位置ベクトルとする。この式は、境界において角中性子束が連続である、すなわちすべての方向に対する角中性子束が連続であることを意味している。

ところが、拡散近似では角度の概念を取り去っているため、この境界条件を正確に表現できない。できることは角中性子束の角度に対するモーメント、すなわちスカラー中性子束と中性子流を連続させることである。拡散方程式の境界面での境界条件は、(99)式ならびに(99)式に Ω を掛けた式を角度について積分することにより与えられる。すなわち、

$$\int_{4\pi} \phi_A(r_s, \Omega, t) d\Omega = \int_{4\pi} \phi_B(r_s, \Omega, t) d\Omega \quad (100)$$

より

$$\phi_A(r_s, t) = \phi_B(r_s, t) \quad (101)$$

が、また

$$\int_{4\pi} \Omega \phi_A(r, \Omega, t) d\Omega = \int_{4\pi} \Omega \phi_B(r, \Omega, t) d\Omega \quad (102)$$

より

$$J_A(r_s, t) = J_B(r_s, t) \quad \text{あるいは} \\ -D_A \nabla \phi_A(r_s, t) = -D_B \nabla \phi_B(r_s, t) \quad (103)$$

が与えられる。

なお、原子炉物理学でときどき現れる問題として、2つの境界の間に無限に薄い面中性子源 $s(t)$ が存在する問題がある。この時の境界条件は、(102) および(103)式を若干修正することにより得られる。すなわち、

$$\phi_A(r_s, t) = \phi_B(r_s, t) \quad (104)$$

および

$$e_s \cdot J_A(r_s, t) - e_s \cdot J_B(r_s, t) = s(t) \quad \text{あるいは} \\ e_s \cdot (-D_A \nabla \phi_A(r_s, t)) - e_s \cdot (-D_B \nabla \phi_B(r_s, t)) = s(t) \quad (105)$$

の2式である。ここで、 e_s は境界表面に垂直な単位ベクトルである。

(b) 真空境界条件

先に述べた通り、輸送理論の真空境界条件(単速の場合に対して)は、

$$\phi(r_s, \Omega, t) = 0 \quad (\text{面} S \text{ 上ですべての点 } r_s \text{ に対して,} \\ \Omega \cdot e_s < 0 \text{ の場合}) \quad (106)$$

である。

拡散理論では、この条件も正しく表すことはできない。そこで、まず、これを積分の意味で満足させることを考える。すなわち、境界において内側へ向う部分中性子流がゼロであるとすると、

$$\int_{2\pi-} e_s \cdot \Omega \phi(r_s, \Omega, t) d\Omega = \int_{2\pi-} e_s \cdot J(r_s, \Omega, t) d\Omega \\ \equiv J_-(r_s, t) = 0 \quad (107)$$

ここで、 $\Omega \cdot dS < 0$ に対応する立体角の部分を $2\pi-$ で表した。

しかし拡散近似では、 J_+ および J_- に対する厳密な形を与えることができない。そこで、角中性子束に対して P_1 近似を用いる。境界条件導出においても、この近似をとることにより、部分中性子流 J_+ が

$$J_-(r_s, t) = \int_{2\pi+} e_s \cdot \Omega \phi(r_s, \Omega, t) d\Omega \\ = \int_{2\pi+} \frac{\cos \theta}{4\pi} (\phi(r_s, t) + 3\Omega \cdot J(r_s, t)) d\Omega$$

$$= \int_{2\pi+} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{4\pi} (\phi(r_s, t) + 3(J_x(r_s, t)\Omega_x \\ + J_y(r_s, t)\Omega_y + J_z(r_s, t)\Omega_z)) d\Omega \\ = \int_{2\pi+} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4\pi} (\phi(r_s, t) + 3(J_x(r_s, t)\sin \theta \cos \chi \\ + J_y(r_s, t)\sin \theta \sin \chi + J_z(r_s, t)\cos \theta)) \\ \times \sin \theta \cos \theta d\theta d\chi \\ = \frac{1}{2} \int_1^0 (-1)(\mu \phi(r_s, t) + 3\mu^2 J_z(r_s, t)) d\mu \\ = \frac{1}{4} \phi(r_s, t) + \frac{1}{2} J_z(r_s, t) \quad (108)$$

のように与えられる。同様にして

$$J_-(r_s, t) = \frac{1}{4} \phi(r_s, t) - \frac{1}{2} J_z(r_s, t) \quad (109)$$

すなわち

$$J_{\pm}(r_s, t) = \frac{1}{4} \phi(r_s, t) \mp \frac{D(r_s)}{2} e_s \cdot \nabla \phi(r_s, t) \quad (110)$$

である。これを用いて、拡散近似による境界条件 $J_-(r_s, t) = 0$ を定式化すると、拡散方程式の真空境界条件は

$$J_-(r_s, t) = \frac{1}{4} \phi(r_s, t) + \frac{D(r_s)}{2} e_s \cdot \nabla \phi(r_s, t) = 0 \quad (111)$$

となる。

この境界条件を $x = x_s$ に境界を持つ1次元問題に適用してみる。簡単のため変数 t を除くと、

$$J_-(x_s) = \frac{1}{4} \phi(x_s) + \frac{D(x_s)}{2} \frac{d\phi(x_s)}{dx} \Big|_{x=x_s} = 0 \quad (112)$$

あるいは

$$\frac{1}{\phi(x_s)} \frac{d\phi(x_s)}{dx} \Big|_{x=x_s} = -\frac{1}{2D(x_s)} \quad (113)$$

この式は、 $(1/2D)$ が境界での中性子束の勾配となることを意味しており、この勾配のまま、境界を越えて中性子束を外挿すると、

$$\bar{x}_s = x_s + 2D = x_s + \frac{2}{3} \lambda_{tr} \quad (114)$$

の点で、中性子束がゼロとなることを意味する。したがって、真空境界条件 $J_-(x_s) = 0$ を

$$\phi(\bar{x}_s) = 0 \quad (\text{ただし, } \bar{x}_s = x_s + z_0) \quad (115)$$

と置きかえることができる。ここで与えられる x_s を外挿境界といい、 z_0 を外挿(補外)距離という。 z_0 の正しい値は、輸送理論から得られ、平板体系に対しては

$$z_0 = 0.7104 \lambda_{tr} \quad (116)$$

で与えられている(円柱状の原子炉や球形原子炉のような曲面境界に対しても、より複雑な表現(曲面の曲率に依存する式)となるが、同様に導き出され

ている)。しかし、 P_1 近似による $0.6667\lambda_{tr}$ と正確な $0.7104\lambda_{tr}$ を用いたのときの外挿距離の差は大きくない。例えば、平均自由行程 λ_{tr} として熱中性子炉の炉内で典型的な値として1 cm を考えると、 $0.6667\lambda_{tr}$ と正確な $0.7104\lambda_{tr}$ の差は0.04 cm に過ぎない。また、同じく λ_{tr} を1 cm として、1 m の半径を持つ原子炉を考えると、補外距離を考慮した場合としない場合の原子炉半径の差は0.7 cm 程度に過ぎない。この値は、原子炉の物理的な半径に比べて小さい。したがって外挿距離 z_0 の値にあまり神経質になる必要はない。

なお、拡散理論は真空境界の付近では成立しないことことから、拡散方程式によって計算される中性子束は、真空境界付近では正しくない。拡散方程式による中性子束を正確な分布(輸送方程式による分布)と比較すると、第Ⅱ-8図のようになる。なお、この図からも、拡散方程式の値は、境界から2～3平均自由行程以上離れたところで正しいと考えてよいことがわかる。

(3) 中性子束に対する一般的な数学的条件

厳密には境界条件でないが、拡散方程式の解が物理的に実現可能なものとなること、すなわち $\phi(r, t)$ は実数であって負でなくかつ有限でなくてはならな

第Ⅱ-8図 真空境界近くの正確な値と拡散近似による値の比較

いことに注目することにより、方程式の解に対する数学的な条件を与えることができる。また、体系の幾何学的条件から対称性の条件を与えられる場合もある。なお、中性子源が特異点として存在するとき、その点で発散することは認めている。これらについては次章で具体的に示す。

以上で、拡散方程式および拡散理論の境界条件が与えられた。次の章では、拡散方程式を解析的に解くことにより、原子炉解析に必要な概念を具体的に学ぶこととする。(以下、次号へ続く)

学会情報メールサービスのご案内

本会では、学会関係の情報をいち早く会員の皆様方にお知らせすべく、E-mail による情報メールサービスを開始いたしました。2000 年 4 月現在、学会にメールアドレスを登録されている 4,500 名ほどの方にお送りしておりますが、下記の要領で随時配信希望の方を募っております。

また研究会の案内など、会員向けに配信を希望される情報がありましたら、事務局 atom@aesj.or.jp までご連絡下さい。内容により、無料で配信いたします。

記

○配信を希望される方は http://www1.todokete.net/atom/regist.cgi?member_regist

●配信停止を希望される方は http://www1.todokete.net/atom/regist.cgi?member_remove

アドレス変更の場合は、お手数ですが新アドレスの登録と旧アドレスの削除をお願いします。

※メールの不達が続くと自動的に配信停止になります。最近メールが届かない...などの際には、お手数ですがアドレスの再登録をお願いいたします。