連載講座 原子炉物理

第10回 非均質格子の取扱い

平川直弘, 岩崎智彦

第 X 章 非均質格子の取扱い

ここまでの議論は、燃料と減速材が均質に混合した炉心を対象としてきた。しかし実際の原子炉は、例えば第 X-1 図(BWRの例)のように、燃料ピンの外側に被覆材があり、さらにそれを減速材が取り囲んでいる構造、すなわち非均質な構造をしている。このような構造は格子(セル)と呼ばれている。

このような非均質な構造は、中性子の振舞いに大きな影響を及ぼす。非均質の度合いが小さい場合には(すなわち、セルの大きさに対して中性子の平均自由行程が十分大きい場合)、セルの非均質な構造は中性子の振舞いにほとんど影響をもたらさない。すなわち、それらの物質を混合してできる均質な物質からなる領域として扱うことができる。しかし、非均質の度合いが大きい場合(すなわち、中性子の平均自由行程がセルの大きさに対して小さい場合)、燃料中と減速材中で中性子の振舞いに大きな差が生じ、結果として中性子束分布が燃料中と減速材中では大きく異なることとなる。その様子を第 X-2 図に示す。この例は、大きな共鳴を持つ燃料物質の場合であって、ウラン燃料(大きな共鳴を持つ ^{238}U を含む)の軽水炉において典型的なものである。燃料中と減速材中では中性子束分布に大きな違いが生じ、さらにその違いは中性子エネルギーによって大きく異なる。本章では、このような非均質セルの取扱い・計算法について解説する。非均質セルの取扱いの問題は、通常「非均質セルの均質化」と呼ばれている。

平川直弘 (Naohiro HIRAKAWA)

東北大学名誉教授

青森職業能力開発短期大学校 校長

岩崎智彦 (Tomohiko IWASAKI)

東北大学大学院工学研究科量子エネルギー工学科助手

E-mail: tomohiko.iwasaki@qse.tohoku.ac.jp

[本講座の内容に関する質問を、著者の E-mail にて受け付けています。よい質問は、回答とともに誌上で紹介します。]

非均質セルの均質化は、(1)セル内の中性子束、そして反応率を正確に計算する部分と、(2)セル内の反応率を再現する平均断面積を求める部分の、2段階に分けて考えると理解しやすい。結果として得られる平均断面積によって、非均質セルは、平均断面積を持つ「均質な」一つの物質からなる領域として扱うことができようになる(反応率が保存される)。以下このセルの均質化を、まず熱中性子領域、次に共鳴中性子領域について説明する。高速領域では、中性子の平均自由行程が大きいため、セルの均質化の取扱いは通常必要ない。

なお、第 X-3 図のように、非均質な燃料セルから燃料集合体が構成され、その燃料集合体から原子炉が構成されている場合には、燃料セルの均質化、燃料集合体の均質化、さらに必要に応じて炉心の均

第 X-1 図 代表的な非均質な格子

BWR 燃料集合体の例。BWR 燃料集合体は、燃料セルと燃料集合体の 2 段階の非均質格子である。

第 X-2 図 格子内の中性子束分布

図上部に燃料部のエネルギー依存断面積を示し、図下部に各エネルギー点の中性子束の空間分布を示す。

質化の 2～3 段階の非均質セルの均質化が必要となる。

1. 熱中性子に対する非均質効果

セルの均質化を行うためには、まず単位セル、すなわち 1 つの燃料要素とそれに隣接した冷却材チャンネルを 1 つの単位とし、これを燃料を中心として面積を保存する同心円状の形状(等価セル)に置きかえる方法が取られる(第 X-4 図)。これにより正方格子を円筒形状に簡単化でき、詳細な中性子束計算を行うことが可能となる。この近似法は Wigner-Seitz の方法と呼ばれている。

本節では、この Wigner-Seitz の方法により近似されたセルを仮定して、熱中性子領域における均質化を行う方法について説明する。

(1) 中性子束分布の計算

はじめに、セル中の熱中性子束の空間依存性を評価する方法を解説する。原子炉開発の当初には、これに 1 群拡散理論が用いられた。しかし、燃料中の

第 X-3 図 燃料, 燃料集合体, 炉心の均質化

第 X-4 図 Wigner-Seitz の方法

中性子束は減速材から燃料の方に向かっているの
で、拡散理論は適切でない(特に濃縮度の高い燃料
の場合には)。そこで輸送理論に基礎をおき、衝突
確率法, 拡散理論を組み合わせた ABH 法(Amo-
uyal, Benoist, Horowitz の方法)が開発された*1。
しかし、今日では普通、エネルギー依存中性子輸送

*1 Amouyal, A. A., Benoist, P., Horowitz, J. : *J. Nucl. Energy*, 6, 79 (1967)。

方程式を、等価セルに対して衝突確率法によって直接解いて熱中性子束分布を求め、セル内について空間(体積)平均する THERMOS の方法^{*2}が用いられる。以下、この THERMOS の方法を説明する。

エネルギー依存輸送方程式は、中性子源と散乱を等方的と仮定すると次の通りである。

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \phi(r, E, \Omega) + \Sigma_t(r, E) \phi(r, E, \Omega) \\ = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \int_0^{E_c} \Sigma_s(r, E' \rightarrow E) \phi(r, E', \Omega') dE' d\Omega' \\ + \frac{1}{4\pi} s(r, E) \quad (0 \leq E \leq E_c) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで E_c は、熱中性子の上限エネルギーで ~ 1 eV 前後である。また、中性子源の項 s は、高エネルギーから E_c 以下に減速される中性子で

$$s(r, E) = \int_{E_c}^{\infty} \Sigma_s(r, E' \rightarrow E) \phi(r, E') dE' \quad (2)$$

である。方程式(1)を、空間と角度について積分することによって「積分型」中性子輸送方程式

$$\begin{aligned} \phi(r, E) = \int_V \left[\int_0^{E_c} \Sigma_s(r', E' \rightarrow E) \phi(r', E') dE' \right. \\ \left. + s(r', E) \right] T(r, r', E) dV \end{aligned} \quad (3)$$

が得られる。ここで、

$$T(r, r', E) = \frac{\exp\left\{-\int_0^{|r-r'|} \Sigma_t(r-s) \frac{r-r'}{|r-r'|} \cdot E ds\right\}}{4\pi|r-r'|^2} \quad (4)$$

である^{*3}。この $T(r, r', E)$ は点 r' (位置ベクトル) でエネルギー E を持つ発生した中性子が点 r まで衝突しないで到達する確率であり、 $\phi(r, E)$ が点 r' にある単位中性子源によって点 r に作られる非衝突中性子束となる。これを輸送核(transport kernel)または、第1飛行核(first flight kernel)という。積分型輸送方程式(3)を、多群形式で表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_g(r) = \int_V T(r, r', E_g) \left[\sum_{g'=1}^G \Sigma_{sg'g}(r') \phi_{g'}(r') \right. \\ \left. + s_g(r') \right] dV \quad (1 \leq g \leq G) \end{aligned} \quad (5)$$

さらに、空間変数を差分化するため、セル内を N 個の小区画(同心円)に分割し、 $\phi_g(r')$ がそれぞれの小区画で空間的に一定とする。すると、

$$\phi_{ng} = \sum_{m=1}^N T_{m,n}^g \left[\sum_{g'=1}^G \Sigma_{sg'g}^m \phi_{mg'} + s_{mg} \right] \quad (6)$$

ただし

$$T_{mn}^g = \frac{\int_{V_n} \int_{V_m} T(r, r', E_g) dV' dV}{V_n} \quad (7)$$

である。この T_{mn}^g は中性子輸送の輸送係数と呼ばれる。

多群で、空間的に差分化された輸送方程式は、減速材中にのみ中性子源が一様に存在するとし、セル境界を通過する正味中性子流がゼロであると仮定すると(反射境界条件)、数値的に解くことができる。実際、THERMOS コードでははじめに(7)式を数値積分によって解き、対象とするセルの輸送係数 T_{mn}^g を計算し、次に多群($N \times G$ 群)で空間離散化方程式を反復法によって解いて中性子束(ϕ_{ng})を求めている。

(2) 平均断面積の計算

次に、求められた中性子束から、平均断面積を求める方法について説明する。なお、以下では、一般的な表記(エネルギー依存、空間依存)の形を用いて説明する。一般的に、セル内で平均した群断面積は、次のように書ける。((8)式欠番)

$$\langle \Sigma_g \rangle_{\text{cell}} = \frac{\int_{E_g}^{E_{g+1}} \int_{V_{\text{cell}}} \Sigma(r, E) \phi(r, E) dV dE}{\int_{E_g}^{E_{g+1}} \int_{V_{\text{cell}}} \phi(r, E) dV dE} \quad (9)$$

この平均断面積は通常、セル平均断面積(cell-averaged group constants)と呼ばれる。また、このセル平均断面積は、しばしば自己遮蔽群定数と呼ばれる。これは自己遮蔽による中性子束の歪みを考慮にいれて、その空間分布について平均しているからである。

被覆材を無視して、セルが燃料と減速材の2領域からなるとし(添字の M が減速材、 F が燃料を表す)、各領域で断面積がそれぞれ一定であり(すなわち、減速材および燃料の断面積がそれぞれ $\Sigma^M(E)$, $\Sigma^F(E)$ と置け)、さらに、2つの領域の中性子束がエネルギー的に同じ関数形で変数分離可能であるとする($\phi_M(r, E) = \phi_M(r) \varphi(E)$, $\phi_F(r, E) = \phi_F(r) \varphi(E)$ とできる)とすると、セル平均断面積(9)式は、

^{*2} Honeck, H. C. : THERMOS, BNL-5826, (1961).

^{*3} ベクトル $r' - r$ が中性子の飛行ベクトルを表し、積分因子 ds はそのベクトルに沿った距離を表す。

$$\begin{aligned}
\langle \Sigma_g \rangle_{\text{cell}} &= \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \int_{V_M} \Sigma^M(E) \phi_M(r) \varphi(E) dV dE + \int_{E_g}^{E_{g-1}} \int_{V_F} \Sigma^F(E) \phi_F(r) \varphi(E) dV dE}{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \int_{V_M} \phi_M(r) \varphi(E) dV dE + \int_{E_g}^{E_{g-1}} \int_{V_F} \phi_F(r) \varphi(E) dV dE} \\
&= \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma^M(E) \varphi(E) \left[\int_{V_M} \phi_M(r) dV \right] dE + \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma^F(E) \varphi(E) \left[\int_{V_F} \phi_F(r) dV \right] dE}{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \varphi(E) \left[\int_{V_M} \phi_M(r) dV \right] dE + \int_{E_g}^{E_{g-1}} \varphi(E) \left[\int_{V_F} \phi_F(r) dV \right] dE} \\
&= \frac{\int_{V_M} \phi_M(r) dV \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma^M(E) \varphi(E) dE + \int_{V_F} \phi_F(r) dV \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma^F(E) \varphi(E) dE}{\int_{V_M} \phi_M(r) dV \int_{E_g}^{E_{g-1}} \varphi(E) dE + \int_{V_F} \phi_F(r) dV \int_{E_g}^{E_{g-1}} \varphi(E) dE}
\end{aligned} \tag{10}$$

と変形でき、各領域の平均中性子束を、

$$\bar{\phi}_M = \frac{1}{V_M} \int_{V_M} \phi_M(r) dV \tag{11}$$

$$\bar{\phi}_F = \frac{1}{V_F} \int_{V_F} \phi_F(r) dV \tag{12}$$

と書くと、(10)式は、

$$\begin{aligned}
\langle \Sigma_g \rangle_{\text{cell}} &= \frac{V_M \bar{\phi}_M \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma^M(E) \varphi(E) dE + V_F \bar{\phi}_F \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma^F(E) \varphi(E) dE}{V_M \bar{\phi}_M \int_{E_g}^{E_{g-1}} \varphi(E) dE + V_F \bar{\phi}_F \int_{E_g}^{E_{g-1}} \varphi(E) dE} \\
&= \frac{V_M \bar{\phi}_M \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma^M(E) \varphi(E) dE + V_F \bar{\phi}_F \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma^F(E) \varphi(E) dE}{(V_M \bar{\phi}_M + V_F \bar{\phi}_F) \int_{E_g}^{E_{g-1}} \varphi(E) dE}
\end{aligned} \tag{13}$$

となる。さらに、群断面積を

$$\Sigma_g^M = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma^M(E) \varphi(E) dE / \int_{E_g}^{E_{g-1}} \varphi(E) dE \tag{14}$$

$$\Sigma_g^F = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma^F(E) \varphi(E) dE / \int_{E_g}^{E_{g-1}} \varphi(E) dE \tag{15}$$

と書くと、

$$\langle \Sigma_g \rangle_{\text{cell}} = \frac{V_M \bar{\phi}_M \Sigma_g^M + V_F \bar{\phi}_F \Sigma_g^F}{V_M \bar{\phi}_M + V_F \bar{\phi}_F} \tag{16}$$

となる。ここで、セル不利係数(disadvantage factor)と呼ばれる量を、次のように定義してと書くと、

$$\zeta = \frac{\bar{\phi}_M}{\bar{\phi}_F} \tag{17}$$

(16)式は、

$$\langle \Sigma_g \rangle_{\text{cell}} = \left(\Sigma_g^F + \frac{V_M}{V_F} \Sigma_g^M \zeta \right) / \left(1 + \frac{V_M}{V_F} \zeta \right) \tag{18}$$

と書ける。ここで、不利係数という言葉は、減速材中の中性子束に比べて燃料中の熱中性子束が小さいため、熱中性子利用率が均質の場合より小さくなることを意味している。この不利係数は、軽水炉の燃料セルの核的な特徴を表す量で、設計時に注目される量の一つである。

2. 共鳴中性子に対する非均質効果

共鳴効果に対する非均質効果は、原子炉解析・設計において極めて重要である。共鳴断面積の大きな物質を含む燃料を塊状(例えば棒状)にして用いると、共鳴エネルギーの中性子は、共鳴断面積が大きいため、ほとんどが塊のごく表面(燃料棒の外側表面)のみで吸収され、塊の内部(燃料棒中心部)にまで進入することができず、その結果、塊内部の原子核は中性子を吸収できなくなる。すなわち、塊状の内部の原子核は、空間的に遮蔽され、中性子との反応に寄与しない。このような挙動を空間的な自己遮蔽効果という。

この効果の大きさを示す例として、天然ウラン燃料、黒鉛減速の原子炉を考える。天然ウランと黒鉛からなる原子炉の場合、 $\eta=1.34$ 程度であり、 $\varepsilon \sim 1.02$ である。はじめに両者を均質に混合したとする。このときの p と f の積は最大でも0.63程度であり、結果として、 k_∞ の最大値は0.85程度となり、決して臨界にはならない。これに対して、天然ウランを塊状にして非均質に配置すると、塊内部の天然ウランが空間的に遮蔽されるため、天然ウランの中性

子吸収量が減少する。この結果、 $pf \sim 0.79$ 程度に高められ(ϵ も ~ 1.03 に高くなる)、 k_∞ が最大値は 1.09 程度となり、原子炉を作ることが可能となる。この例から、共鳴物質を含む燃料の非均質効果は実効増倍率に極めて大きな影響を持つことがわかる。

(1) 2領域セルの減速方程式

第IV章の中性子減速の章で、減速方程式は

$$\Sigma_t(E)\phi(E) = \int_E^{E/\alpha} \frac{\Sigma_s(E')\phi(E')}{(1-\alpha)E'} dE' + s(E) \quad (19')$$

で表されることを示した。ここで、 $\alpha = [(A-1)/(A+1)]^2$ (A は質量数)である。これから類推して、燃料(F)と減速材(M)からなる無限の「均質」媒質に対する減速方程式は次のようになる。なお、簡単のため、ここから中性子源項は無視する。

$$\begin{aligned} \Sigma_t(E)\phi(E) = & \int_E^{E/\alpha_F} \frac{\Sigma_s^F(E')\phi(E')}{(1-\alpha_F)E'} dE' \\ & + \int_E^{E/\alpha_M} \frac{\Sigma_s^M(E')\phi(E')}{(1-\alpha_M)E'} dE' \end{aligned} \quad (19)$$

この式を元に、2領域の「非均質」セルの減速方程式を考える。このため、各領域について第1飛行脱出確率(first flight escape probability)を、次のように定義する(エネルギー E に依存)。なお、ここでは、慣例に従って、本講座で用いていた言葉である「反応」という言葉でなく、「衝突」という言葉を用いる。

$P_{F0}(E)$: 中性子が燃料内で衝突を行うことなく燃料から脱出する確率

すなわち、燃料内で発生したエネルギー E の中性子が、減速材内で次の衝突を行う確率。

$P_{M0}(E)$: 中性子が減速材内で衝突を行うことなく減速材から脱出する確率。

すなわち、減速材内で発生したエネルギー E の中性子が燃料内で次の衝突を行う確率。

以下、第1飛行脱出確率を用いて、(19)式の減速方程式を一般化する。

まず、 $\phi_F(E)$ と $\phi_M(E)$ をそれぞれ燃料内、減速材内で体積平均した中性子束(エネルギー E における)とし、減速材の体積を V_M とする。このときエネルギー E より上のエネルギーの中性子の平均減速密度、すなわちエネルギー E 以上の中性子が減速材中で散乱され、エネルギー E となる数は、次の通りとなる。

$$V_M \int_E^{E/\alpha_M} \frac{\Sigma_s^M(E')\phi_M(E')}{(1-\alpha_M)E'} dE' \quad (20)$$

エネルギー E となった中性子は、やがてセル内のどこかで衝突することになるが(反射境界条件の場合)、(20)式の量に $P_{M0}(E)$ を掛けたもの、すなわち

$$P_{M0}(E) V_M \int_E^{E/\alpha_M} \frac{\Sigma_s^M(E')\phi_M(E')}{(1-\alpha_M)E'} dE' \quad (21)$$

は減速材中で生まれたエネルギー E の中性子が減速材を脱出して燃料内で衝突する数となる。すなわち、減速材から燃料に移動する移動率(transfer rate)となる。燃料についても、同様に考える。燃料内でエネルギー E まで減速した中性子数は、

$$V_F \int_E^{E/\alpha_F} \frac{\Sigma_s^F(E')\phi_F(E')}{(1-\alpha_F)E'} dE' \quad (22)$$

であり、この中性子のうち、次の衝突を燃料内で起こす数は、その割合が $(1-P_{F0})$ であることから

$$(1-P_{F0}(E)) V_F \int_E^{E/\alpha_F} \frac{\Sigma_s^F(E')\phi_F(E')}{(1-\alpha_F)E'} dE' \quad (23)$$

となる。燃料内での全衝突率は上の2つの和になるので、燃料での減速方程式は(19)式との類推から次のようになる。

$$\begin{aligned} V_F \Sigma_t^F(E) \phi_F(E) = & (1-P_{F0}(E)) V_F \int_E^{E/\alpha_F} \frac{\Sigma_s^F(E')\phi_F(E')}{(1-\alpha_F)E'} dE' \\ & + P_{M0}(E) V_M \int_E^{E/\alpha_M} \frac{\Sigma_s^M(E')\phi_M(E')}{(1-\alpha_M)E'} dE' \end{aligned} \quad (24)$$

同様にして減速材に対する減速方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} V_M \Sigma_t^M(E) \phi_M(E) = & (1-P_{M0}(E)) V_M \int_E^{E/\alpha_M} \frac{\Sigma_s^M(E')\phi_M(E')}{(1-\alpha_M)E'} dE' \\ & + P_{F0}(E) V_F \int_E^{E/\alpha_F} \frac{\Sigma_s^F(E')\phi_F(E')}{(1-\alpha_F)E'} dE' \end{aligned} \quad (25)$$

これらの式は、非均質な2領域セルに対して、正確な連立積分方程式である。しかし脱出確率 $P_{F0}(E)$ 、 $P_{M0}(E)$ が与えられなければ形式的なものに過ぎない。

脱出確率は、おのおのの領域において中性子源が一樣かつ等方的であると仮定し⁴⁴、セル内の中性子の減速に対して空間とエネルギーの変数を分離すると、近似的に求めることができる。いったん脱出確率が求まれば、これをエネルギー変数のみの減速方程式((24)や(25)式)に代入して積分方程式を解くこ

⁴⁴ これを、平坦中性子束近似(flat flux approximation)という。

とができ、燃料・減速材に対する中性子束を得ることができる。

(2) 燃料領域の減速方程式の簡単化

燃料領域の減速方程式において、減速材に対してNR近似を用いると、減速方程式を簡単化できる。軽水炉のように、水(H₂O)などの減速材の場合、減速能が大きい(αが大きく、1回の散乱で失うエネルギーΔEが大きい)ため、NR近似がよく成り立つので、この方法は有効である。実際には、NR近似の下、減速材の平均中性子束を漸近形(φ_M~1/E)に置き換える*5。これを(24)式の第2項に用い、さらに減速材の散乱断面積がエネルギーについて一定である*6とすると、

$$\begin{aligned} R_{M0}(E)V_M \int_E^{E/\alpha_M} \frac{\Sigma_s^M(E')\phi_M(E')}{(1-\alpha_M)E'} dE' \\ = R_{M0}(E)V_M \int_E^{E/\alpha_M} \frac{\Sigma_s^M(E') \frac{1}{E'}}{(1-\alpha_M)E'} dE' \\ \approx R_{M0}(E)V_M \frac{\Sigma_s^M}{(1-\alpha_M)} \int_E^{E/\alpha_M} \frac{1}{E'^2} dE' \\ = R_{M0}(E)V_M \frac{\Sigma_s^M}{(1-\alpha_M)} \left[-\frac{1}{E'} \right]_E^{E/\alpha_M} \\ = R_{M0}(E)V_M \frac{\Sigma_s^M}{E} \end{aligned} \quad (27)$$

となる。これを(24)式に代入すると、

$$\begin{aligned} V_F \Sigma_t^F(E)\phi_F(E) \\ = (1-P_{F0}(E))V_F \int_E^{E/\alpha_F} \frac{\Sigma_s^F(E')\phi_F(E')}{(1-\alpha_F)E'} dE' \\ + R_{M0}(E)V_M \frac{\Sigma_s^M}{E} \end{aligned} \quad (28)$$

すなわち、燃料領域の減速方程式において減速材領域の中性子束が取り除かれ、自分自身の中性子束のみを変数とする方程式が得られた(減速材に関する係数が、P_{M0}などとして入っていることに注意)。

この燃料領域の減速方程式はさらに、次の第1飛行脱出確率の相反関係*7を利用することにより、簡単化される。

*5 ここでは、共鳴領域より上の中性子束φ(E)~1/ξΣ_sEでξΣ_sを除いて規格化した。非均質セルではξΣ_s=(ξ_FΣ_s^FV_F+ξ_MΣ_s^MV_M)/V_{cell}である。したがって、この領域でφ_M~1/E。

*6 水素など、散乱断面積がポテンシャル散乱断面積と等しい減速材に対してよい近似となる。

*7 燃料領域と減速材領域それぞれについて平坦中性子源を仮定すると、この相反関係は、輸送理論で扱うセルのグリーン関数の対称性から証明できる。

$$P_{F0}(E)\Sigma_t^F(E)V_F = P_{M0}(E)\Sigma_t^M(E)V_M \quad (29)$$

これを用いると、(28)式の第2項は

$$R_{M0}(E)V_M \frac{\Sigma_s^M}{E} = \frac{P_{F0}(E)\Sigma_t^F(E)V_F}{\Sigma_t^M(E)} \cdot \frac{\Sigma_s^M}{E} \quad (29')$$

となり、さらに減速材での吸収が無視でき、Σ_t^M=Σ_s^Mとする(これは一般に成り立つ)と、

$$P_{M0}(E)V_M \frac{\Sigma_s^M}{E} = P_{F0}(E)V_F \frac{\Sigma_t^F(E)}{E} \quad (30)$$

となり、(28)式は、

$$\begin{aligned} \Sigma_t^F(E)\phi_F(E) \\ = (1-P_{F0}(E)) \int_E^{E/\alpha_F} \frac{\Sigma_s^F(E')\phi_F(E')}{(1-\alpha_F)E'} dE' \\ + P_{F0}(E) \frac{\Sigma_t^F(E)}{E} \end{aligned} \quad (31)$$

となる。この燃料領域の減速方程式では、すべての係数が燃料領域に関する量(P_{F0}など)となっている。したがって、P_{F0}(E)が与えられれば、この方程式を解析的な近似法もしくは数値解析法により解くことにより、燃料中の中性子束φ_F(E)が得られる。

(3) NR近似とNRIM近似による共鳴積分

燃料領域の中性子束が求められると、次の式から共鳴積分Iが

$$I = \int \sigma_r^F(E)\phi_F(E)dE \quad (32)$$

により計算できる。以下、NR近似とNRIM近似のそれぞれについて、非均質体系における共鳴積分の公式を導く。

(a) NR近似

燃料領域でもNR近似が成立つと仮定すると(第X-2(2)項では減速材領域でNR近似を導入)、φ_F(E')~1/E'とできる。これを減速方程式(31)に用いると、(31)式の右辺第1項の積分項は

$$\begin{aligned} \int_E^{E/\alpha_F} \frac{\Sigma_s^F(E')\phi_F(E')}{(1-\alpha_F)E'} dE' \\ \sim \frac{\Sigma_p^F}{(1-\alpha_F)} \int_E^{E/\alpha_F} \frac{1}{E'^2} dE' \sim \frac{\Sigma_p^F}{E} \end{aligned} \quad (33)$$

となる。ここで、燃料の散乱断面積をエネルギーについて一定で、Σ_s^F(E')=Σ_p^Fと近似した。(33)式を(31)式に代入すると、

$$\Sigma_t^F(E)\phi_F(E) = (1-P_{F0}(E)) \frac{\Sigma_p^F}{E} + P_{F0}(E) \frac{\Sigma_t^F(E)}{E} \quad (34)$$

となる。したがって、これから、燃料中の中性子束に対する式が、次のように得られる。

$$\phi_F(E) = \frac{(1-P_{F0}(E))\Sigma_p^F + P_{F0}(E)\Sigma_t^F(E)}{\Sigma_t^F(E)E} \quad (35)$$

さらに、これを(32)式に代入することにより、NR近似に基づく共鳴積分が

$$I(\text{NR}) = \int \frac{\sigma_t^F(E)}{\sigma_t^F(E)} [\sigma_p^F + (\sigma_t^F(E) - \sigma_p^F) P_{F0}(E)] \frac{1}{E} dE \quad (36)$$

のように求まる。ここで、分子、分母で燃料の原子数密度 N_F を約分した。

(b) NRIM 近似

NRIM 近似は、NR 近似とは逆に、燃料中での中性子の衝突あたりのエネルギー損失が共鳴の実用幅 Γ_p に比べて小さいと仮定するもので、中性子は燃料原子との衝突によってエネルギーを失わないとする。しかし、非均質体系の場合には、中性子が燃料を逃れる前に1つの共鳴の中で多数回の衝突をする可能性があるため、取扱いが難しくなる。

ここでは簡単のため、衝突密度が燃料棒内の場所に関係であるとする(平坦中性子束近似)。この場合、全体としての衝突を逃れる確率 P_F は、次のように、燃料内で中性子の衝突が繰り返起こるとして計算できる。

まず、 N 個の中性子が燃料塊(lump)中で一様に発生するとする。これら N 個の中性子のうち、燃料脱出確率を掛けた NP_{F0} 個は、衝突せずに燃料塊から逃げ出すこととなり、残りの $N(1-P_{F0})$ 個の中性子は燃料内で衝突をする(1回目)。そして、衝突をした後、 (σ_s^F/σ_t^F) の割合が、散乱反応を起こし新たな中性子が生ずることとなる。その数は、 $N(1-P_{F0})(\sigma_s^F/\sigma_t^F)$ と書ける。さらに、 $N(1-P_{F0})(\sigma_s^F/\sigma_t^F)P_{F0}$ 個の中性子が1回目の衝突後に燃料塊から逃げ出し、 $N(1-P_{F0})^2(\sigma_s^F/\sigma_t^F)$ 個の中性子が2回目の衝突をし、 $N(1-P_{F0})^2(\sigma_s^F/\sigma_t^F)^2$ 個の中性子が3回目の衝突で生ずることとなる。これを繰り返すことにより、塊から逃げ出す中性子の総数は、はじめに逃げる NP_{F0} 個、1回目の散乱後に逃げる $N(1-P_{F0})(\sigma_s^F/\sigma_t^F)P_{F0}$ 個、…の和で求まり、

$$\begin{aligned} NP_{F0} + N(1-P_{F0})\left(\frac{\sigma_s^F}{\sigma_t^F}\right)P_{F0} + N(1-P_{F0})^2\left(\frac{\sigma_s^F}{\sigma_t^F}\right)^2P_{F0} + \dots \\ = N \frac{P_{F0}}{1 - (1-P_{F0})\left(\frac{\sigma_s^F}{\sigma_t^F}\right)} \end{aligned} \quad (37)$$

となる。したがって、NRIM 近似で中性子が燃料から脱出する確率 P_F は、(37)式を N で割って

$$P_F = \frac{P_{F0}}{1 - (1-P_{F0})\left(\frac{\sigma_s^F}{\sigma_t^F}\right)} \quad (38)$$

と求まる。

これを用いると、(36)式の P_{F0} を P_F に置き換えることにより、NRIM 近似の共鳴積分が得られる。ただし、(36)式の導出における σ_p^F は、より高いエネルギーでの衝突により共鳴エネルギーへ入ってくる中性子の寄与の項であり、このような中性子は NRIM 近似では考えなくてよい。したがって $\sigma_p^F = 0$ と置く必要がある。その結果、NRIM 近似の共鳴積分は、(38)式の P_F を用いて

$$\begin{aligned} I(\text{NRIM}) &= \int \sigma_t^F(E) P_F(E) \frac{1}{E} dE \\ &= \int \frac{P_{F0} \sigma_t^F(E)}{1 - (1-P_{F0})(\sigma_s^F/\sigma_t^F)} \frac{1}{E} dE \end{aligned} \quad (39)$$

と与えられる。

(4) ウィグナー近似

(36)、(39)式の積分を行うには脱出確率 P_{F0} を定めなくてはならない。しかし P_{F0} はどんな幾何学的形状に対しても非常に複雑な関数となり、一般的に共鳴積分を求めるのは容易ではない。ところが、ウィグナーの有理近似を用いると、 P_{F0} をきわめて簡単な関数で近似することができ、共鳴積分 I を簡単に得ることができる。

ウィグナーの有理近似では、燃料からの第1脱出確率 P_{F0} を、以下の式で表す。

$$P_{F0} = \frac{1}{1 + \ell \Sigma_t^F} \quad (40)$$

ここで、 Σ_t^F は燃料のマクロ全断面積、 ℓ は燃料塊中の平均弦長(mean chord length)、すなわち、中性子がランダムに燃料塊を通過する時に塊中を飛行する線の長さの平均値である。 ℓ は、塊の体積 V_F と表面積 S_F から次の式で与えられる。

$$\ell = 4 \frac{V_F}{S_F} \quad (41)$$

例えば塊が、

無限平板であれば $\ell = 2t$ (t : 板厚)

無限円柱であれば $\ell = 2R$ (R : 半径)

球であれば $\ell = 4R/3$ (R : 半径)

である。

(40)式のウィグナーの有理近似(Rational Approximation)は、ほとんどの格子に対して10%以内の誤差で近似する^{*8}。塊が大きく $\ell \Sigma_t^F \gg 1$ であれば $P_{F0} \rightarrow 1/\ell \Sigma_t^F \rightarrow 0$ となり、逆に塊が小さく $\ell \Sigma_t^F \ll 1$ であれば $P_{F0} \rightarrow 1$ となる。

^{*8} Wigner 近似を改良するものとして、Levine は $P_{F0} = a \Sigma_s / (a \Sigma_s + \Sigma_t^F)$ を提案している。ここで、 a は Levine 因子と呼ばれ、円柱に対して1.19~1.53の値を取る。

以下、ウイグナーの有理近似を用いた時の共鳴積分の式を求める。そのため

$$\Sigma_e = \frac{1}{\ell} \quad (42)$$

という仮想的なマクロ断面積を定義する。そしてこれに対応するミクロ断面積 σ_e を、

$$\sigma_e = \frac{\Sigma_e}{N_F} = \frac{1}{N_F \ell} \quad (43)$$

とする。ここで、 N_F は燃料塊の原子数密度である。この仮想的な断面積 σ_e は燃料の形状に依存するが、エネルギーには依存しないことに注意してほしい。 Σ_e あるいは σ_e を用いると、(40)式の燃料からの第1脱出確率は

$$P_{F0} = \frac{\Sigma_e}{\Sigma_e + \Sigma_i^F} = \frac{\sigma_e}{\sigma_e + \sigma_i^F} \quad (44)$$

となり、これを(36)、(39)式に代入すれば、

$$\sigma_p^F + \frac{\sigma_e(\sigma_i^F - \sigma_p^F)}{\sigma_e + \sigma_i^F} = \frac{\sigma_i^F(\sigma_p^F + \sigma_e)}{\sigma_i^F + \sigma_e} \text{ を利用して、}$$

$$I(\text{NR}) = \int \frac{\sigma_i^F(\sigma_p^F + \sigma_e)}{\sigma_i^F + \sigma_e} \cdot \frac{1}{E} dE \quad (45)$$

$$I(\text{NRIM}) = \int \frac{\sigma_i^F \sigma_e}{\sigma_i^F + \sigma_e} \cdot \frac{1}{E} dE \quad (46)$$

となる。ただし(46)式で $\sigma_i^F - \sigma_p^F = \sigma_i^F$ とした。両式により、NR、NRIM近似に対する共鳴積分が、燃料の性質のみに依存した形で与えられた。

(5) 等価定理

(a) 第1等価定理

(45)、(46)式において、非均質格子の効果は、燃料塊の形状により決まる σ_e という因子のみによって現れている。したがって、 σ_e が同じ値を持つ非均質格子は、それを取り囲む減速材の性質には関係なく、同じ共鳴積分を持つことがわかる。この性質は、共鳴積分、共鳴吸収を考える上で大事な性質で、共鳴吸収に対する第1の等価定理と呼ばれている。

(b) 第2等価定理

均質系に対する共鳴積分の式は、第V章の(63)、(66)式により、次のように与えられる。

$$I_{\text{homo}}(\text{NR}) = \int \sigma_i^F(E) \frac{(\Sigma_s^M + \Sigma_p^F)}{\Sigma_i(E)} \cdot \frac{1}{E} dE$$

$$= \int \sigma_i^F \frac{\sigma_p^F + \frac{\Sigma_s^M}{N_F}}{\sigma_p^F + \frac{\Sigma_s^M}{N_F}} \cdot \frac{1}{E} dE \quad (47)$$

$$I_{\text{homo}}(\text{NRIM}) = \int \sigma_i^F(E) \frac{\Sigma_s^M}{\Sigma_i(E) - \Sigma_s^F(E)} \cdot \frac{1}{E} dE$$

$$= \int \sigma_i^F \frac{\frac{\Sigma_s^M}{N_F}}{\sigma_i^F + \frac{\Sigma_s^M}{N_F}} \cdot \frac{1}{E} dE \quad (48)$$

非均質系と均質系の比較、すなわち(45)と(47)式、(46)と(48)式の比較を行うと、均質系の場合の $\sigma_p^F + \Sigma_s^M/N_F$ が、非均質系では $\sigma_p^F + \sigma_e$ に、すなわち、 Σ_s^M/N_F が、 σ_e に置き換えられていることがわかる*9。このことは非均質系の場合の $\sigma_p^F + \sigma_e$ が均質系の場合の σ_p と同じ値を持てば、共鳴積分の値が同じになることを意味する。これを共鳴を逃れる確率の第2の等価定理という。

(c) 共鳴積分の近似式

(36)式の $I(\text{NR})$ を次のように2つの項に書き直す。

$$I(\text{NR}) = \int \sigma_i^F \frac{\sigma_p^F}{\sigma_i^F} \cdot \frac{1}{E} dE$$

$$+ \int P_{F0} \sigma_i^F \frac{(\sigma_i^F(E) - \sigma_p^F)}{\sigma_i^F} \cdot \frac{1}{E} dE \quad (49)$$

ここで、第1項は燃料だけからなる無限媒質のNR近似であり、第2項は P_{F0} によって燃料の形状に依存する項である。ウイグナーの有理近似では、 $\ell \Sigma_i^F \gg 1$ の時、 $P_{F0} \sim \frac{S_F}{4V_F N_F \sigma_i^F} \propto \frac{S_F}{M_F}$ (M_F は燃料の質量)とできる。したがって、(49)式から、共鳴積分は次の形に書き直すことができる。

$$I = a + b \frac{S_F}{M_F} \quad (50)$$

共鳴積分に関しては数多くの実験が行われており、その実験結果の多くは、(50)式に当てはめられ、実験式が作られている。

なお、共鳴断面積がDoppler拡がりを持つ場合には、先の式からいくつかの近似を用いることにより、共鳴積分を与える式として次の式が導かれ、非常によく用いられている。

$$I = a' + b' \sqrt{\frac{S_F}{M_F}} \quad (51)$$

例えば20℃における UO_2 の全共鳴積分に対しては、次の2つの式がよく用いられる。

$$I_{28} = 11.6 + 22.8 \frac{S_F}{M_F} \quad (52)$$

*9 なお、非均質系の $I(\text{NRIM})$ で、 $\sigma_p^F = 0$ を補ってから比較することに注意すること。

$$I_{28} = 4.15 + 26.6 \sqrt{\frac{S_F}{M_F}} \quad (53)$$

さらに、共鳴積分の温度依存性を表す実験式も求められている。例えば20~600℃で

$$I = I_{28}(300\text{K}) [1 + \beta(\sqrt{T(\text{K})} - \sqrt{300(\text{K})})] \quad (54)$$

$$\beta = 0.006 \sim 0.008$$

がよく使われている。

(6) 燃料棒干渉効果とダンコフ補正

ここまでの議論は単位燃料セルが他のセルから孤立しているとして、燃料の共鳴吸収を扱ってきた。しかし実際には、格子中の燃料棒同士を隔てる減速材の層が、中性子の平均自由行程に比べてそれほど厚くないので、第 X-5 図に示すように、減速材へ出ていった中性子の一部は減速材中で衝突する前に別の燃料棒に入っていくことになる。したがって脱出確率 P_{F0} の代わりに修正された脱出確率 P_{F0}^* 、すなわち、燃料中で生じた1個の中性子が隣りに燃料棒があることを考慮に入れた上で、次の衝突を減速材中で行う確率を計算すべきである。これを正確に行うには数値計算を必要とするが、 P_{F0}^* は近似的に次の式に従うことが示されている。

$$P_{F0}^* = P_{F0} \frac{1-C}{1-C(1-\ell \Sigma_f^f P_{F0})} = P_{F0} \frac{1}{1 + \frac{C}{1-C} \ell \Sigma_f^f P_{F0}} \quad (55)$$

第 X-5 図 燃料棒の干渉効果

ここで、 C はダンコフ係数 (Dancoff-Ginsberg Factor) といわれる係数で、燃料の形状に依存するパラメータである。ダンコフ係数は、孤立した燃料の場合の $N_f \sigma_a = 1/\ell$ が、稠密格子では $(1-C)/\ell$ に小さくなったこと(逆に平均弦長が $1/(1-C)$ だけ増加したこと)、あるいは燃料要素の表面積 S_F が $(1-C)S_F$ まで小さくなったことに相当する。

以上により、原子炉物理で必要とされ、使用されている主な事項の説明を終った。

次回と次々回は、現在の典型的な原子炉である PWR, BWR, FBR の3つの炉の炉物理的な特徴を紹介する。

(次号へつづく)

あまり知られていない超ウラン元素の話(2)

前回に引き続いて、核的に大きな特徴を持ちながら、原子力関連の本、雑誌、記事の中には現れず、あまり知られていない超ウラン元素の原子核のいくつかを紹介する。前回、 ^{238}Np 、 ^{240}Pu を紹介した。今回は、 $^{242\text{m}}\text{Am}$ および ^{246}Cm について紹介する。

(1) $^{242\text{m}}\text{Am}$

$^{242\text{m}}\text{Am}$ は、 ^{241}Am が1個の中性子を吸収して生成される原子核である。 $^{242\text{m}}\text{Am}$ の“m”は、meta stable、すなわち準安定状態の意味で、励起単位の中で壊変半減期が比較的長い状態にある原子核であることを表している。 $^{242\text{m}}\text{Am}$ に対して、 $^{242\text{g}}\text{Am}$ も存在する。 $^{242\text{g}}\text{Am}$ の“g”は、ground state、すなわち基底状態の原子核を表す。 $^{242\text{m}}\text{Am}$ の半減期は約140 yr で、 $^{242\text{g}}\text{Am}$ の半減期は16 h である。 ^{242}Am は励起状態の方が、より安定な珍しい原子核である。

$^{242\text{m}}\text{Am}$ の特徴は、熱中性子核分裂断面積の大きさにある。 $2,200(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ の中性子に対する核分裂断面積は約6,600(b)である。 ^{235}U や ^{239}Pu の約10倍、前回紹介した ^{238}Np の約3倍である。 ^{238}Np の場合には、半減期が短

く、現在の原子炉の中性子束では実質的に核分裂を起こすのは無理であったが、 $^{242\text{m}}\text{Am}$ の場合には、半減期が140 yr と長いことから、核分裂割合 P_f^* は、

$$P_f = \frac{1}{1 + \frac{(1.4 \times 10^{-10} / 6.6 \times 10^{-21})}{\phi}} = \frac{1}{1 + \frac{2.1 \times 10^{10}}{\phi}}$$

となり、中性子束が $10^{11}(\text{cm}^{-2}\cdot\text{s}^{-1})$ 以上あれば、 $^{242\text{m}}\text{Am}$ の場合 P_f は90%を超える。現行の原子炉 ($2 \times 10^{13}(\text{cm}^{-2}\cdot\text{s}^{-1})$) では、ほぼ $^{242\text{m}}\text{Am}$ は壊変しないので、ほとんど核分裂を起こす。核燃料物質として、 $^{242\text{m}}\text{Am}$ は極めて魅力的であり、 $^{242\text{m}}\text{Am}$ を核燃料として利用した小型原子炉の研究も行われている。炉心がコンパクトにできる可能性があることから、月面での利用などを中心に考えられている^{*2}。

*1 前回に記した通り、核分裂断面積 $\sigma(\text{cm}^2)$ 、壊変定数 $\lambda(\text{s}^{-1})$ の原子核が N 個、中性子束 $\phi(\text{cm}^{-2}\cdot\text{s}^{-1})$ の原子炉内に置かれたとすると、核分裂する割合 P_f は、次の通りである。

$$P_f = \frac{N\sigma\phi}{N\sigma\phi + N\lambda} = \frac{\sigma\phi}{\sigma\phi + \lambda} = \frac{\phi}{\phi + (\lambda/\sigma)} = \frac{1}{1 + \frac{(\lambda/\sigma)}{\phi}}$$

*2 $^{242\text{m}}\text{Am}$ の最小臨界量は、 ^{239}Pu の1/3、 ^{235}U の1/4.5となるとの報告もある (Ronen, Y., et al.: Nucl. Sci. Eng., 99, 278 (1988)).