自己相似型不均一地盤モデルを用いた 巨視的分散長の定量的評価に関する研究*

齋藤雅彦**・西村由紀子***・中川 啓****

Numerical study on quantitative evaluation of macroscopic dispersivity by using stochastic fractal model*

Masahiko SAITO**, Yukiko NISHIMURA*** and Kei NAKAGAWA****

Abstract

Macroscopic dispersivity is most important factor to analyze advection dispersion equation (ADE) at the field scale. Any appropriate method for determining this parameter has not been established yet. In this study, artificial heterogeneous hydraulic conductivity fields were generated with the stochastic fractal model ($f^{-\zeta}$ model) that was proposed by Saito and Kawatani (2000). Macroscopic dispersivities were evaluated for generated two-dimensional and three-dimensional fields from ADE simulations. Results showed that macroscopic dispersivity depends on two scales, the contaminant source length and the travel distances, and field characteristics such as variability of hydraulic conductivity for one-dimensional flow. Finally, we proposed useful diagrams to estimate macroscopic dispersivity quantitatively based on 2-dimensional and 3-dimensional numerical experiments.

Key Words: macroscopic dispersivity, hydraulic conductivity, heterogeneity, fractal, solute transport

要 旨

フィールドスケールにおける移流分散解析を行う際に重要となるのが巨視的分散長であるが、この値を適切に設定する方法は十分確立されていない。本研究では、齋藤・川谷(2000)によって提案されている自己相似型不均一地盤モデル($f^{-\zeta}$ 型モデル)を用いて疑似的な不均一場を発生させ、無次元化された2次元場および3次元場における移流分散解析を行い、そこから同定される平均的な巨視的分散長を用いて、その性質に関する考察を行った。その結果、1次元的な流れ場においては、巨視的分散長は汚染源の大きさと流下距離の2つのスケール、および透水係数のばらつきという地盤の性質に依存することを明らかにし、これらの関係を用いて、簡潔なモデルで巨視的分散長を定量的に評価することが可能であることを示した。

キーワード: 巨視的分散長、透水係数、不均一性、自己相似性、物質輸送

* 土木学会第65回年次学術講演会(2010年9月)にて一部発表

** 神戸大学 自然科学系先端融合研究環(〒657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台町1-1)

Organization of Advanced Science and Technology, Kobe University

*** 神戸大学大学院 工学研究科市民工学専攻

Graduate School of Engineering, Kobe University

**** 長崎大学大学院 水産・環境科学総合研究科

Graduate School of Fisheries Science and Environmental Studies, Nagasaki University

1. 序論

地下水汚染問題等の地盤内における水溶性物質の輸送について解析する場合、通常は浸透流の基礎式と移流分散方程式が用いられる。とくに比較的単純な1次元あるいは2次元問題であれば理論解も得られるため、実流速や分散係数を与えれば物質輸送挙動について容易に解析することも可能である。一方、ここで必要となる分散係数は、実流速と分散長を用いて表現され、間隙内の流路の不規則性によって生じる微視的分散と、浸透場の不均一性に由来する流速分布の不規則性によって生じる巨視的分散に区別されるが、フィールドスケールを対象とする場合に必要となる巨視的分散長は、汚染の拡大範囲（観測スケール）に依存することが明らかにされており、透水係数や空隙率のような室内試験等により決定できる性質の物性値ではない。Gelhar *et al.* (1992) は、多孔質媒体および亀裂性岩盤から得られた巨視的分散長と観測スケールの関係について整理するとともに、同じスケールでも2オーダー程度の非常に大きなばらつきがあることも示している。

このような巨視的分散係数のスケール依存性やばらつきについては、これまでも様々なアプローチでそのメカニズムの解明や推定法の提案が試みられている。たとえば、Neuman (1990) は、地盤の性質とは無関係にスケールのみに依存する経験式を提案している。Mercado (1967) は、1次元的な流れ場に対し、成層地盤モデルを用いた考察により、各層の透水係数のばらつきをパラメータとして、巨視的な縦分散長が流下距離に比例する形の推定式を導いている。中川ほか(1998) は、同じく1次元的な流れ場に対して、自己回帰型の不均一地盤モデルを用いた考察を行い、一定の流下距離を経れば巨視的分散長は一定値に収束すると見なせること、および巨視的分散長は透水係数分布の積分特性距離（自己相関距離）に概ね比例することを示している。ただし、Mercadoの式では、流下に伴って巨視的分散長の増加が鈍るような挙動は表現できない。また中川らの検討で用いられている自己回帰型の空間分布モデルは、定常確率場モデルの一種であり、ある一定のスケールを超えると透水係数の分散が一定値に収

束し、また一定の積分特性距離を持つ、という前提に立っている。しかし、実際のフィールド上でこのような前提条件が常に成り立っている保証はなく、たとえば、積分特性距離については、巨視的分散長と同様にスケールに対する依存性を持つことが報告されている (Gelher, 1993; Di Federico and Neuman, 1997)。

これに対して、齋藤・川谷 (2000, 2001) は、透水係数分布に関する理論的考察に基づいて、非定常確率場モデルの一種である自己相似型の空間モデル（以下 $f^{-\zeta}$ 型モデルと記す）を提案するとともに、本モデルが積分特性距離のスケール依存性も含めて、実地盤における透水係数の空間分布特性を容易に模擬し得ることを確認している (Saito and Kawatani, 2002)。

本研究では、中川らと同様に1次元的な流れ場に対し、 $f^{-\zeta}$ 型モデルを用いて一定の統計的性質を持つ疑似的な等方性不均一場を多数発生させ、有限要素法による数値シミュレーションで2次元および3次元の移流分散解析を行い、そこから算出される平均的な巨視的分散長を用いてその性質に関する考察を行う。その際、透水係数分布の自己相似性を利用して無次元場における解析を行い、より普遍的な性質の解明を試みる。また、この結果に基づいて巨視的分散長を簡易に推定する方法を提案する。

2. 基礎方程式と透水係数の空間分布モデル

2.1 基礎方程式

本研究で取り扱う浸透場は、定常飽和浸透場とし、湧き出し・吸込みはないものとする。基礎方程式は以下ようになる。

$$\nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla h) = 0 \quad (1)$$

ここに、 h はピエゾ水頭、 $\mathbf{k}$ は飽和透水係数テンソル、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ 、 x, y, z は空間座標である。

境界条件は、水頭値 h が与えられる境界 Γ_1 上で、

$$h = h_1 \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (2)$$

流束 q が与えられる境界 Γ_2 上で、

$$q=q_2=-\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \nabla h \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (3)$$

ここに、 $\mathbf{n}$ は境界面上の単位外向法線ベクトルである。

また、物質輸送の基礎方程式は、以下の移流分散方程式である。

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{d} \nabla c) - \frac{\mathbf{u}}{\phi} \cdot \nabla c \quad (4)$$

ここに、 c は濃度、 ϕ は空隙率、 $\mathbf{d}$ は分散係数テンソル、 $\mathbf{u}$ はダルシー流速ベクトルである。また、式 (4) における $\mathbf{d}$ の成分 d_{ij} は、次式で与えられる (Bear, 1972)。

$$d_{ij} = \alpha_T \frac{|\mathbf{u}|}{\phi} \delta_{ij} + (\alpha_L - \alpha_T) \frac{u_i \cdot u_j}{\phi |\mathbf{u}|} + d_m \delta_{ij} \quad (5)$$

ここで、 α_L は流れ方向の分散長、 α_T は流れに垂直な方向の分散長、 u_i はダルシー流速ベクトル $\mathbf{u}$ の i 方向成分、 d_m は分子拡散係数、 δ_{ij} はクロネッカーデルタテンソルの成分である。

境界条件は、濃度が与えられる境界 Γ_A 上で、

$$c=c_A \quad \text{on } \Gamma_A \quad (6)$$

濃度勾配が与えられる境界 Γ_B 上で、

$$\mathbf{g}=\mathbf{g}_B=-\mathbf{n} \cdot (\mathbf{d} \nabla c) \quad \text{on } \Gamma_B \quad (7)$$

流束が与えられる境界 Γ_C 上で、

$$\mathbf{g}=\mathbf{g}_C=\mathbf{n} \cdot \left(\frac{\mathbf{u}}{\phi} c - \mathbf{d} \nabla c \right) \quad \text{on } \Gamma_C \quad (8)$$

2.2 基礎方程式の無次元化

まず、代表長さ l_0 および飽和透水係数の代表値 k_0 を用いて、式 (1) の諸量について、以下のように無次元量を定義する。

$$X=\frac{x}{l_0}, \quad Y=\frac{y}{l_0}, \quad Z=\frac{z}{l_0}, \quad H=\frac{h}{l_0}, \quad \mathbf{K}=\frac{1}{k_0} \mathbf{k} \quad (9)$$

このとき、式 (1) は以下ようになる。

$$l_0 k_0 \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla H) = 0 \quad (10)$$

また、浸透場が等方性 ($k_{11}/k_0 = k_{22}/k_0 = k_{33}/k_0 = K$) の場合、

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{l_0} \frac{\partial}{\partial X}, \frac{1}{l_0} \frac{\partial}{\partial Y}, \frac{1}{l_0} \frac{\partial}{\partial Z} \right)$$

より、式 (1) は以下のように無次元化される。

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(K \frac{\partial H}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(K \frac{\partial H}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(K \frac{\partial H}{\partial Z} \right) = 0 \quad (11)$$

境界条件は、水頭値 h が与えられる境界 Γ_1 上で、

$$H=H_1=h_1/l_0 \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (12)$$

流束 q が与えられる境界 Γ_2 上で、

$$Q=Q_2=\frac{q_2}{k_0} \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (13)$$

同様に、 l_0 、 k_0 、および濃度の代表値 c_0 を用いて、式 (4)、式 (5) の諸量について、以下のように無次元量を定義する。

$$T=\frac{k_0}{l_0} t, \quad C=\frac{c}{c_0}, \quad \mathbf{D}=\frac{1}{l_0 k_0} \mathbf{d}, \quad \mathbf{U}'=\frac{1}{k_0} \frac{\mathbf{u}}{\phi}, \quad (14)$$

$$A_L=\frac{\alpha_L}{l_0}, \quad A_T=\frac{\alpha_T}{l_0}, \quad D_m=\frac{d_m}{l_0 k_0}$$

これらを用いて、式 (4) および式 (5) を書き換えると、

$$\frac{c_0 k_0}{l_0} \frac{\partial C}{\partial T} = c_0 k_0 \left(l_0 \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla C) - \mathbf{U}' \cdot \nabla C \right) \quad (15)$$

$$D_{ij} = A_T |\mathbf{U}'| \delta_{ij} + (A_L - A_T) \frac{U'_i \cdot U'_j}{|\mathbf{U}'|} + D_m \delta_{ij} \quad (16)$$

これより、式 (4) は以下のように無次元化される。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C}{\partial T} + U'_X \frac{\partial C}{\partial X} + U'_Y \frac{\partial C}{\partial Y} + U'_Z \frac{\partial C}{\partial Z} \\ &= \frac{\partial}{\partial X} \left(D_{XX} \frac{\partial C}{\partial X} + D_{XY} \frac{\partial C}{\partial Y} + D_{XZ} \frac{\partial C}{\partial Z} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial Y} \left(D_{YX} \frac{\partial C}{\partial X} + D_{YY} \frac{\partial C}{\partial Y} + D_{YZ} \frac{\partial C}{\partial Z} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial Z} \left(D_{ZX} \frac{\partial C}{\partial X} + D_{ZY} \frac{\partial C}{\partial Y} + D_{ZZ} \frac{\partial C}{\partial Z} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

境界条件は、濃度が与えられる境界 Γ_A 上で、

$$C=C_A=c_A/c_0 \quad \text{on } \Gamma_A \quad (18)$$

濃度勾配が与えられる境界 Γ_B 上で、

$$G = G_B = \frac{g_B}{c_0 k_0} \quad \text{on } \Gamma_B \quad (19)$$

流束が与えられる境界 Γ_C 上で、

$$G = G_C = \frac{g_C}{c_0 k_0} \quad \text{on } \Gamma_C \quad (20)$$

2.3 透水係数の空間分布モデル

透水係数の不均一性を表す空間分布モデルとして $f^{-\zeta}$ 型モデル (齋藤・川谷, 2000, 2001) を使用する。これは、飽和透水係数の対数変換値 ($\kappa = \log_{10} k$) のパワースペクトル密度関数が、次のように $f^{-\zeta}$ 型となるものであり、実地盤における透水係数の空間分布特性を容易に模擬し得ることを確認している。

$$S(|f|) \propto |f|^{-\zeta} \quad (21)$$

ここに f は空間周波数ベクトル、 $S(|f|)$ はパワースペクトル密度、 ζ は空間的な相関性を表すパラメータである。

これによって生成される透水係数場は、2次元では $\zeta = 2$ 、3次元では $\zeta = 3$ とすると完全な自己相似性を有するため、どのような解析スケールでも解像度 n (=要素数) が同じであれば統計的に同様の分布性状を示す。このため、式 (11) で表されるような無次元場にもそのまま適用することができる。

また、一般に透水係数のばらつきの大きさを表すパラメータとしては分散 ($= \sigma^2$) が用いられることが多いが、同質の地盤に対する分散は、解像度に依存するため、普遍性を持たない。例えば、図1(a)は、 $n = 16384$ として本モデルにより生成された分布の一例、また図1(b)～(d)は平均化操作により解像度をそれぞれ $n = 4096$ 、1024、256に低下させたものである。このような操作により、それぞれの分散 σ^2 は0.248、0.209、0.176、0.144と変化する。一方、図2は、これらの解像度と分散の関係を示したものであるが、本モデルでは両者の関係は統計的に以下のような関係が成り立つ (齋藤・川谷, 2001)。

$$\sigma^2 = \lambda \log_{10} n \quad (22)$$

ここに、 λ は不均一性の強さを表す無次元パラメータであるが、この関係を用いることによって任意の解像度に対する分散の大きさを容易に決定することができる。また、実地盤の λ は、サンプリングによって標本分散から以下のように推定することができる。

$$\lambda = \frac{\sigma_{\kappa_s}^2}{\log_{10}(V_A/V_S)} \quad (23)$$

ここに、 $\sigma_{\kappa_s}^2$ は κ の標本分散、 V_A は解析領域またはサンプリング範囲のボリューム、 V_S はサンプルのボリュームである。

3. 2次元モデルによる検討

3.1 解析条件

解析領域は、図3に示すような X 方向に L 、 Y 方向に1の長方形領域とし、 Y 方向の長さを無次元化の際の代表長さ l_0 とした。ここで、流れ場の境界条件は、 $X = 0$ で $H_1 = L$ 、 $X = L$ で $H_1 = 0$ 、 $Y = 0$ および $Y = 1$ で $Q_2 = 0$ (=不透水性境界)、すなわち平均動水勾配が1となる1次元的な流れ場 (均一場なら完全な1次元流れ) とした。移流分散解析に関する境界条件は、 $X = 0$ で $C_A = 1$ 、 $X = L$ で $G_B = 0$ 、 $Y = 0$ および $Y = 1$ で $G_C = 0$ とする。つまり汚染源長さを代表長さ l_0 と一致させた。初期条件は、 $X = 0$ で $C_A = 1$ 、 $X > 0$ で $C_A = 0$ である。

また、式 (21) におけるパラメータ ζ については $\zeta = 2$ とし、透水係数の代表値 k_0 は、解析領域を均一と見なした場合の透水係数とした。すなわち、動水勾配が1のとき、無次元化後の X 方向の断面平均流速が常に1となるように設定した。

解像度は、一辺の長さが $1/2^N$ ($N \geq 1$) の正方形要素を用いて領域全体を分割した場合、 $n = L \times 4^N$ となる。すなわち、要素サイズ d_e は解像度に依存するが、均質化された要素内で生じる分散は要素サイズに依存すると考えられる。これより、無次元化された縦分散長 A_L については、要素内分散のみを考え、従来の知見 (Gelhar, (1986)) より要素サイズ d_e の0.1倍、また横分散長 A_T は縦分散長 A_L の0.1倍とし、分子拡散係数は0と

図1 $f^{-\zeta}$ 型モデルによる不均一場の生成と平均化
Fig. 1 Averaging heterogeneous fields generated by $f^{-\zeta}$ model.

図2 解像度と分散の関係
Fig. 2 The relationship between the resolution and the variance.

図3 解析領域と境界条件 (2次元モデル)
Fig. 3 Numerical domain and boundary conditions (2-dimensional model).

した。

数値解析では、 N 、 L 、および λ をパラメータとして様々なパターンの等方性不均一場を設定した。そして、各パターンについて異なる乱数系列を用いて統計的に同質な1000個の不均一場を $f^{-\zeta}$ 型モデルにより生成して、濃度の時空間変化を計算し、1000回分のアンサンブル平均を求めた。

移流分散方程式の数値解析法としては、特性曲線ガラキン法 (Zienkiewicz and Taylor, 2000) に基づく有限要素法を用いた。ここで離散化にともなう数値分散の影響について検討するため、不均一場を対象に以下に示す1次元移流分散方程式の理論解と、FEMによる数値解を比較した。

$$C = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{X - U_m T}{2\sqrt{DT}} \right) + \frac{1}{2} \exp \left(\frac{U_m X}{D} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{X + U_m T}{2\sqrt{DT}} \right) \quad (24)$$

ここに、 D は無次元の分散係数 ($= A_L \cdot U_m$)、 U_m は X 方向の無次元実流速である。

図4は、 $N = 3$ ($n = 256$)、 $L = 4$ として、 $A_L = 0.01d_e$ と $A_L = 0.1d_e$ の場合について比較したものである。これより、 A_L を要素サイズの0.01倍に設定した場合には、若干の数値分散と解の振動が見られるのに対し、 A_L を要素サイズの0.1倍に設定した場合には、理論解と数値解はほぼ一致していると見なして差し支えなく、離散化の影響は無視し得ると考える。

また、図5に、発生させた透水係数分布 ($\log_{10} K$) の一例、図6にこのときの水頭分布および流速分布、図7に濃度分布、図8に1000回分のアンサンブル平均の一例を示す。

3.2 巨視的分散長の同定

図9は、濃度分布のアンサンブル平均から得られたいくつかの断面における断面平均濃度の時間変化の一例である ($N = 5, L = 4, \lambda = 0.05$)。

本来、巨視的分散現象は地盤の不均一性によって生じる地盤内流速の不規則な分布に由来すると考えられるが、直接的にこれらを評価することは極めて困難であり、通常の移流分散解析では地盤は均一と仮定され、不均一性にともなう分散の大

(a) $A_L = 0.01 d_e$

(b) $A_L = 0.1 d_e$

図4 理論解と数値解の比較 ($N = 3, L = 4, \lambda = 0.0$)

Fig. 4 Comparison between analytical and numerical results ($N = 3, L = 4, \lambda = 0.0$)

図5 透水係数分布の一例 ($N = 5, L = 4, \lambda = 0.05$)

Fig. 5 Distribution of hydraulic conductivity ($N = 5, L = 4, \lambda = 0.05$).

図7 汚染物質濃度分布 ($N = 5, L = 4, \lambda = 0.05, T = 3$)

Fig. 7 Distribution of contaminant concentration ($N = 5, L = 4, \lambda = 0.05, T = 3$).

図6 水頭および流速ベクトル分布 ($N = 5, L = 4, \lambda = 0.05$)

Fig. 6 Distribution of hydraulic head and velocity vector ($N = 5, L = 4, \lambda = 0.05$).

図8 濃度分布のアンサンブル平均 ($N = 5, L = 4, \lambda = 0.05, T = 3$)

Fig. 8 The ensemble averaged concentration distribution ($N = 5, L = 4, \lambda = 0.05, T = 3$).

きは巨視的分散長として評価される。つまり、巨視的分散長は不均一場を均一場として評価する際に必要となるパラメータである。

これより、先に示した均一場における1次元移流分散方程式の理論解(式(24))を用いて、得られた C の時間変化を再現する見かけの分散長(無次元巨視的分散長 $=A_L'$)を各断面について同定する。

3.3 巨視的分散長の流下距離に対する依存性

図10は、 $L=4$ 、 $\lambda=0.05$ として、流下距離 X と無次元巨視的分散長 A_L' の関係について、 N を2から6まで変化させて比較したものである。解像度が低い場合は污染源近傍でずれが大きいですが、どの解像度に関するプロットも片対数紙上で

図9 断面平均濃度の時間変化の一例 ($N=5$, $L=4$, $\lambda=0.05$)

Fig. 9 Temporal change of vertically averaged concentration ($N=5$, $L=4$, $\lambda=0.05$).

図10 巨視的分散長と流下距離の関係 ($L=4$, $\lambda=0.05$)

Fig. 10 The relationship between the macroscopic dispersivity and the travel distance ($L=4$, $\lambda=0.05$).

概ね直線上に収束していることがわかる。たとえば、 $N=4$ とすると $X>0.2$ 、 $N=5$ では $X>0.1$ の範囲で同一の直線と見なして差し支えないであろう。これより、 λ の値が同一であれば、解像度を変化させても同様の関係が得られること、また、解像度を高くすることによって汚染源により近い部分まで信頼性の高い解析結果が得られることがわかる。また、この直線は、フィッティングパラメータを γ_0 および δ として次式で表現できる。

$$A_L' = \gamma_0 \log_{10} \left(\frac{X}{\delta} \right) \quad (25)$$

図11は、 $N=4$ 、 $\lambda=0.05$ として $L=4$ 、16および32のケースについて比較したものであるが、解析領域を X 方向に延長しても片対数紙上で直線的に増加している。すなわち、 $L=4$ として得られた直線は、流下方向に外挿が可能であることがわかる。

3.4 透水係数の空間分布のばらつきと巨視的分散長の関係

図12は、 $N=5$ 、 $L=4$ として λ を変化させた場合の $X>0.1$ における X と A_L' の関係を示したものである。前述のとおり、 X と A_L' の関係は片対数紙上で概ね直線関係と見なすことができるが、その傾きおよび X 切片、すなわち、式(25)における γ_0 および δ は、透水係数のばらつきの大きさを表すパラメータ λ に依存していると考えられる。図13は、 λ と γ_0 との関係を表したもの

図11 巨視的分散長と流下距離の関係 ($N=4$, $\lambda=0.05$)

Fig. 11 The relationship between the macroscopic dispersivity and the travel distance ($N=4$, $\lambda=0.05$).

であるが、両対数軸上ではほぼ直線上にあり、両者の関係は以下のように求められた。

$$\gamma_0 = 1.74 \times \lambda^{1.16} \quad (26)$$

また図14は、 λ と δ の関係を表したものであるが、 δ は λ の変化にはあまり影響を受けず、 λ が極端に小さい場合と大きい場合を除けば、 $0.04 < \delta < 0.05$ を満たしている。ここで、式(25)より $X > \delta$ のとき $A_L' > 0$ となり、巨視的分散が生じることを意味する。これより、 $X = x/l_0$ なので巨視的分散現象が生じる流下距離は、汚染源の長さ($=l_0$)の0.04～0.05倍程度と推定される。

3.5 汚染源の大きさと巨視的分散長の関係

ここで同定された A_L' は、汚染源長さ l_0 によつ

図12 巨視的分散長と流下距離の関係 ($N=5, L=4$)

Fig. 12 The relationship between the macroscopic dispersivity and the travel distance ($N=5, L=4$).

図13 λ と γ_0 の関係 ($N=5, L=4$)

Fig. 13 The relationship between λ and γ_0 ($N=5, L=4$).

て無次元化されている。よって、実スケールにおける巨視的分散長 α_L' は、2次元場では以下のように表現できる。

$$\alpha_L' = l_0 \gamma_0 \log_{10} \left(\frac{x}{l_0 \delta} \right) \quad (27)$$

これは、不均一場における巨視的分散長は「汚染源の長さ」と「流下距離」の二つのスケール、および「透水係数のばらつき」という地盤の性質に依存することを示している。

4. 3次元モデルによる検討

4.1 解析条件

解析領域は、図15に示すように Y 方向の長さを無次元化の際の代表長さ l_0 とし、 X 方向に4、 Y 方向に1、 Z 方向に B ($=b/l_0$, b は実スケールにおける z 方向の長さ、また $0 < B \leq 1$)の直方体領域とした。ここで、流れ場の境界条件は、

図14 λ と δ の関係 ($N=5, L=4$)

Fig. 14 The relationship between λ and δ ($N=5, L=4$).

図15 解析領域と境界条件 (3次元モデル)

Fig. 15 Numerical domain and boundary conditions (3-dimensional model).

$X = 0$ で $H_1 = L$ 、 $X = L$ で $H_1 = 0$ 、また $Y = 0$ 、 $Y = 1$ 、 $Z = 0$ 、 $Z = B$ で $Q_2 = 0$ (=不透水性境界)、すなわち2次元モデルと同様に平均動水勾配が1となる1次元的な流れ場とした。

移流分散解析に関する境界条件は、 $X = 0$ で $C_A = 1$ 、 $X = L$ で $G_B = 0$ 、また $Y = 0$ 、 $Y = 1$ 、 $Z = 0$ 、 $Z = B$ で $G_C = 0$ とした。つまり代表長さ l_0 は汚染面の長辺長さである。初期条件は、 $X = 0$ で $C_A = 1$ 、 $X > 0$ で $C_A = 0$ とした。

また、式 (21) におけるパラメータ ζ については $\zeta = 3$ とし、透水係数の代表値 k_0 、縦分散長 A_L 、横分散長 A_T 、分子拡散係数は2次元モデルと同様とした。要素分割は、一辺の長さが $1/16$ の立方体要素を用いた。このとき、解像度は $n = 16 \times 64 \times 16 \times B$ となる。ここでは、 B および λ をパラメータとして様々なパターンの不均一場を設定した。そして、2次元モデルと同様に各パターンについて異なる乱数系列を用いて統計的に同質な不均一場を $f^{-\zeta}$ 型モデルにより生成して、

濃度の時空間変化を計算し、そのアンサンブル平均を求めた。ただし、発生数は計算機のパフォーマンス上の制約より、各パターンについて800個とした。図16は、発生させた透水係数分布 ($\log_{10}K$) の一例、図17はこのときの流速分布、図18は濃度分布、図19は800回分のアンサンブル平均の一例であり、図20は、断面平均濃度の時間変化の一例である。

図18 汚染物質濃度分布 ($B = 0.5$, $\lambda = 0.05$, $T = 3$)

Fig. 18 Distribution of contaminant concentration ($B = 0.5$, $\lambda = 0.05$, $T = 3$).

図16 透水係数分布の一例 ($B = 0.5$, $\lambda = 0.05$)

Fig. 16 Distribution of hydraulic conductivity ($B = 0.5$, $\lambda = 0.05$).

図19 濃度分布のアンサンブル平均 ($B = 0.5$, $\lambda = 0.05$, $T = 3$)

Fig. 19 The ensemble averaged concentration distribution ($B = 0.5$, $\lambda = 0.05$, $T = 3$).

図17 流速ベクトル分布 ($B = 0.5$, $\lambda = 0.05$)

Fig. 17 Distribution of velocity vector ($B = 0.5$, $\lambda = 0.05$).

図20 断面平均濃度の時間変化の一例 ($B = 0.5$, $\lambda = 0.05$)

Fig. 20 Temporal change of vertically averaged concentration ($B = 0.5$, $\lambda = 0.05$).

ある。巨視的分散長 A_L' は、2次元の場合と同様に、式(24)の理論解を用いて断面平均濃度の時間変化を再現する A_L' を同定した。

4.2 層厚と巨視的分散長の関係

図21は、 $\lambda = 0.05$ および $\lambda = 0.075$ における X と A_L' の関係について、 B を変化させて比較したものである。これより、 X と A_L' の関係は、3次元解析でも式(25)と同様に表せること、また、そのパラメータは λ および B に依存していることがわかる。すなわち、次式で表現できる。

$$A_L' = \gamma(\lambda, B) \log_{10} \left(\frac{X}{\delta(\lambda, B)} \right) \quad (28)$$

図22は、 B 、 γ および λ の関係を示したものであるが、これより、 γ は γ_0 (式(26)から得られる)を通る直線と見なせることがわかる。そこで、 γ と B の関係を以下のように仮定する。

$$\gamma = \gamma_0(1 + \beta B) \quad (29)$$

ここに、 β はフィッティングパラメータであり、それぞれの λ に対する β を求めると、1.36～1.38のほぼ一定値が得られた。図22における実線は、 $\beta = 1.4$ として B と γ の関係を近似したものであるが、十分良好に再現されているものと考ええる。

図23は、同様に B 、 δ および λ の関係を示したものである。まず、 $B = 0$ (2次元解析)と $B = 0.125$ に対する δ の値が、不連続的に変化しているように見える。これは、2次元解析と3次元解析の違いによって生じたものと考えられる。そこで、現実では常に $B > 0$ であることを考慮すると、 δ は B に対して概ね線形的に変化していると見なすことができるだろう。また、 λ に対する依存性は、 $\lambda \geq 0.05$ ではほとんど見られない。これより、 $\lambda < 0.05$ かつ $B < 0.5$ の場合にはや

(a) $\lambda = 0.05$

(b) $\lambda = 0.075$

図21 巨視的分散長と流下距離の関係

Fig. 21 The relationship between the macroscopic dispersivity and the travel distance.

図22 層厚 B と λ 、 γ の関係

Fig. 22 The relationship between the aquifer thickness B , λ and γ .

図23 層厚 B と λ 、 δ の関係

Fig. 23 The relationship between the aquifer thickness B , λ and δ .

や推定精度が悪くなるが、概ね以下のような簡単な関係が得られる。

$$\delta = 0.03(1+B) \quad (30)$$

以上の考察より式 (28) に式 (29) および式 (30) を代入し、 b および α_L' が無次元化されていることを考慮すると、実スケールにおける巨視的分散長 α_L' は、次式により推定することができる。

$$\alpha_L' = \gamma_0(l_0 + 1.4b) \log_{10} \left(\frac{x}{0.03(l_0 + b)} \right) \quad (31)$$

4.3 実スケールにおける巨視的分散長と流下距離の関係

図 24 は、実スケールにおける流下距離 x と、巨視的分散長 α_L' の関係について、いくつかの l_0 、 b 、および λ の組み合わせについて、式 (31) を用いて求めたものである。これは、Gelhar らが示した x と α_L' の関係と、概ね同様の傾向を示している。また、従来から $\alpha_L' = 0.1x$ という関係が

巨視的分散長を指定する際のひとつの目安とされているが (Gelhar, (1986))、図 24 から同様の傾向がうかがえる。しかし、式 (31) から明らかのように、 α_L' は汚染源長さ l_0 および層厚 b に比例するものであり、流下距離 x に関しては α_L' はその対数値に比例している。図 25 は、巨視的分散長の流下距離に対する比の対数値を $\mu (= \log_{10}(\alpha_L'/x))$ として、無次元流下距離 X およびパラメータ λ と μ の関係を表したものである (ただし、 $b = 0$ および $\delta = 0.045$ とした場合)。ここで $\mu = -1.0$ (すなわち $\alpha_L' = 0.1x$) のコンターに着目すると、この関係が成り立つのは、概ね流下距離が汚染源長さの数分の 1 から数倍程度の範囲に限定され、それ以上の流下距離でこの関係を用いると、過大評価の可能性がある。

また、図 26 は、2 次元解析から得られた式 (25) から X および λ と無次元巨視的分散長 A_L' の関係を求めたものである。ここでは $\delta = 0.045$ としている。一方、式 (30) を簡略化 (δ の B に対する依存性を無視) して 2 次元解析の場合と同様に

図 24 実スケールにおける巨視的分散長と流下距離の関係

Fig. 24 The relationship between the macroscopic dispersivity and the travel distance in the field scale.

図25 X , λ と巨視的分散長の流下距離に対する比 $\mu (= \log_{10}(\alpha_L'/x))$ の関係 (ただし $\delta = 0.045$)

Fig. 25 The relationship between X , λ and the ratio of the macroscopic dispersivity to the travel distance $\mu (= \log_{10}(\alpha_L'/x))$, ($\delta = 0.045$).

δ = 一定値とすると、式 (31) は以下のように表すことができる。

$$\alpha_L' = \gamma_0(l_0 + 1.4b) \log_{10}\left(\frac{X}{\delta}\right) \quad (32)$$

このとき式 (32) の右辺は、式 (25) の右辺を $l_0 + 1.4b$ 倍したものと一致する。つまり、図26から読み取った A_L' の $l_0 + 1.4b$ 倍は、 α_L' の「粗い推定値」に相当する。ここで、汚染源から十分離れた地点 ($X > 100$ 、すなわち汚染源長さの100倍～300倍) における無次元巨視的分散長 A_L' に着目すると、図26では大半が0.1～0.5の範囲にある。また $0 < b \leq l_0$ なので $l_0 < l_0 + 1.4b \leq 2.4l_0$ である。これより、 α_L' の推定値としては、 λ と b に応じて、汚染源長さ l_0 の0.1倍から1.2倍程度が妥当な値と考えられる。

5. 結論

本研究では、1次元的な流れ場に対し、 $f^{-\zeta}$ 型モデルを用いて一定の統計的性質を持つ疑似的な不均一場を多数発生させ、有限要素法による数値

図26 X , λ と無次元巨視的分散長 A_L' の関係 (ただし $\delta = 0.045$)

Fig. 26 The relationship between X , λ and the non-dimensional macroscopic dispersivity A_L' ($\delta = 0.045$).

シミュレーションで2次元および3次元の無次元場における移流分散解析を行い、そこから算出される平均的な巨視的分散長を用いてその性質に関する考察を行った。これらによって得られた結果を以下にまとめる。

- 1) 不均一場における巨視的分散長は「汚染源の長さ」と「流下距離」の二つのスケール、および「透水係数のばらつき」という地盤の性質に依存することを示し、これらの関係から巨視的分散長を定量的に評価するための簡潔なモデルを提案した。
- 2) 本研究で提案したモデルによって得られた流下距離と巨視的分散長の関係は、これまでに報告されている実測結果と同様の傾向を示した。
- 3) 従来から巨視的分散長の推定の際に用いられている $\alpha_L' = 0.1x$ という概算値の妥当性について検討し、流下距離が汚染源長さの数倍以上の地点では、過大評価となる可能性を指摘した。
- 4) 流下距離および透水係数のばらつきと、巨視的分散長の関係を図化することによって、粗い推定値をきわめて容易に得る方法を提案した。

なお、本研究で得られた結論は、1次元的な流れ場（分散は縦方向分散のみ）および等方性不均一場を対象としたものであり、横方向分散が生じる場や、異方性不均一場にそのまま適用することはできない。今後はそのようなより現実的な場における巨視的分散長の定量的評価方法についても検討を続けていく予定である

謝 辞

本研究は、日本学術振興会科学研究費補助金（基盤研究C、研究課題名：「山腹斜面における廃棄物の不法投棄に伴う汚染物質の拡散挙動の解明」、課題番号：21510031、研究代表者：齋藤雅彦）の補助を受けました。また編集委員会の中屋眞司先生と匿名の査読者2名からは貴重かつ丁寧なご意見をいただき、本論文の内容向上に役立ちました。ここに記して謝意を表します。

参考文献

齋藤雅彦・川谷 健 (2000)：透水係数の空間分布に関する理論的考察. 土木学会論文集、645、III-50、103～114.
 齋藤雅彦・川谷 健 (2001)：透水係数の空間分布モデルの適用性に関する一考察. 土木学会論文集、694、III-57、245～258.
 中川 啓・神野健二・細川土佐男 (1998)：不均一浸透場におけるトレーサー輸送の微視的分散と巨視的分散に対する水理学的考察. 水工学論文集、42、385～390.

Bear, J. (1972): *Dynamics of Fluid in Porous Media*. Elsevier, New York, 764p.
 Di Federico, V. and S. P. Neuman(1997): Scaling of random fields by means of truncated power variograms and associated spectra. *Water Resources Research*, **33**, 5, 1075～1085.
 Gelhar, L.W. (1986): Stochastic Subsurface Hydrology From Theory to Applications. *Water Resources Research*, **22**, 9, 135S～145S.
 Gelhar, L.W., C. Welty and K.R.Rehfeldt(1992): A Critical review of data on field-scale dispersion in aquifers. *Water Resources Research*, **28**, 7, 1955～1974.
 Gelhar, L. W. (1993): *Stochastic Subsurface Hydrology*, Prentice-Hall, New Jersey, 390p.
 Mercado, A. (1967): The spreading pattern of injected water in a permeability saturated aquifer. *Artificial Recharge and Management of Aquifers*, IAHS Publ., **72**, 23～36.
 Neuman, S. P. (1990): Universal scaling of hydraulic conductivities and dispersivities in geological media. *Water Resources Research*, **26**, 1749～1758.
 Saito, M. and T. Kawatani (2002): Simple method for generation of 1-D and 2-D random permeability field by using stochastic fractal model, *Proc. 4th International conference on CALIBRATION AND RELIABILITY IN GROUNDWATER MODELING*, **1**, 176～179.
 Zienkiewicz, O. C. and R. L. Taylor(2000): *The Finite Element Method*, Vol.3, (5th ed.), Butterworth-Heinemann, 13～63.
 (受付：2011年1月12日、受理：2011年6月28日)