Raviart-Thomas 混合補間を用いた 三次元有限要素モデルと基本性能*

櫻井英行**・郷家光男***・白石知成**・
菱谷智幸****・山浦昌之****・鹿島浩幸

Three-dimensional finite elements by Raviart-Thomas mixed interpolation and their fundamental performance

Hideyuki SAKURAI**, Mitsuo GOHKE***, Tomonari SHIRAISHI**,
Tomoyuki HISHIYA****, Masayuki YAMAURA**** and Hiroyuki KASHIMA

Abstract

This paper reports the fundamental performance in three-dimensional (3D) seepage problems of finite element methods (FEM) using the Raviart-Thomas mixed interpolant (RT), which is capable of independent interpolation of hydraulic head and velocity. In the conventional FEM that uses only hydraulic head as an unknown variable, velocity is independently calculated for each element. There are cases, therefore, where a continuous velocity field cannot be computed with high accuracy. In the RT, fluxes can be made continuous along inter-element boundaries because velocity shape functions employ the fluxes at the element faces as degrees of freedom. Although almost all of the previous studies have shown validity in 2D problems, this paper identifies the fundamental performance, including drawbacks, of the 3D elements with RT. The validity and significant notice of the FEM with RT in the engineering simulation is presented by getting its characteristic in order.

Key Words: Raviart-Thomas, finite element method (FEM), mixed model, hybrid model, seepage flow

要 旨

全水頭と流速を同時に近似する Raviart-Thomas 混合補間 (RT) を用いた有限要素の三次元浸透流

-
- * 日本地下水学会2012年春季講演会にて一部発表
日本計算工学会第17回計算工学講演会(2012年)にて一部発表
土木学会第67回年次学術講演会(2012年)にて一部発表
日本地下水学会2012年秋季講演会にて一部発表
土木学会論文集 A2-Vol.69-No.1, 2013年に一部登載
- ** 清水建設(株)技術研究所(〒135-8530 東京都江東区越中島3-4-17)
Institute of Technology, Shimizu Corporation
- *** 清水建設(株)土木技術本部
Civil Engineering Technology Division, Shimizu Corporation
- **** (株)ダイヤコンサルタント ジオエンジニアリング事業本部
Headquarter of Geo-engineering Business Affairs, Dia Consultants Co., Ltd.

問題における基本性能について報告する。全水頭のみを未知数とする従来の有限要素法では、流速を要素ごとに計算するため、連続な流速場が精度良く得られない場合がある。一方、RTでは、要素面上の流量を自由度として流速を近似するため、要素間境界で流量を連続にでき、解析領域全体で連続的な流速場を得ることができる。既往の研究の多くは、二次元問題での有用性を示すものであるが、本報告では、RTの数理と三次元要素の数値実験の結果を紹介し、RTの特徴を整理して、実用化に際しての適性や注意点について述べる。

キーワード：Raviart-Thomas, 有限要素法 (FEM), 混合モデル, ハイブリッドモデル, 浸透流

1. はじめに

地下水浸透流のシミュレーションは、岩盤エネルギー貯蔵や放射性廃棄物処分などの施設計画・設計・操業の検討において必須の技術である。中でも有限要素法 (FEM) は、解析領域の幾何形状を精度良くモデル化できるため、我が国の地質構造のように複雑形状の三次元複合領域に対して大変強力な解析手法となる。FEMは、世界的にも実績は多く、実用的で信頼性の高い方法と言える。

他方、1990年代初頭から FEM 浸透流解析の問題点の指摘とその改善のための研究が欧米を中心に進められた (例えば, Cordes and Kinzelbach, 1992; Matringe et al., 2006; Younes et al., 2010)。水頭のみを未知数とする従来の FEM では、連続なダルシー流速場が精度良く得られないという指摘である。並行して進められてきた改善のための研究開発には二つあり、一つは Cordes and Kinzelbach (1992) のような FEM の結果から連続なダルシー流速場を求める工夫、もう一つは、速度ポテンシャルとダルシー流速を同時に近似する混合補間法を用いる方法であり、Matringe et al. (2006) の混合モデルと Younes et al. (2010) のハイブリッド・モデルによる定式化がある。ダルシー流速近似に隣接要素間の流量を連続できる Raviart-Thomas (RT) 混合補間 (Raviart and Thomas, 1977) を用いることが特徴である。しかし、上述の研究報告は、二次元問題における有用性を論じているのがほとんどである。

著者らは、上述の二つの方法の三次元問題における有用性を確認するため、プログラム開発を行い、基本性能の検討を実施してきた (例えば、白石ほか, 2011; 櫻井ほか, 2012; 櫻井ほか, 2013)。本報告では後者の混合補間法を用いる方

法のうち、ハイブリッド・モデルにおける三次元要素 (RT-HM) の基本性能を確認した結果を紹介し、RT-HM の長所短所を整理して、実用化に際しての適性や注意点について述べる。

なお、前者についても、一定の知見を得ており、本特集号に掲載している。

2. 基礎方程式と有限要素モデル

2.1 基礎方程式

基本性能の確認を容易にするため、次式に示す単純な均質媒体内の定常浸透流問題を対象とした。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -k\nabla\phi(\mathbf{x}) \quad \text{in } V \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } V \quad (2)$$

式 (1) はダルシーの法則、式 (2) は非圧縮性流体の連続式であり、 $\mathbf{u}$ はダルシー流速、 k は透水係数、 ∇ は一階のベクトル微分演算子、 ϕ は全水頭、 V は解析領域である。

ただし、本報告では地下水の実流速には触れず、ダルシー流速のみを扱うため、以降ダルシー流速 $\mathbf{u}$ を単に流速と呼ぶこととする。

式 (1) を式 (2) に代入すると次の浸透流方程式を得る。

$$k\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } V \quad (3)$$

境界条件は、

$$\phi(\mathbf{x}) = \hat{\phi} \quad \text{on } \partial V_{\phi} \quad (4)$$

$$-k \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \hat{q} \quad \text{on } \partial V_n \quad (5)$$

ここに、添え字 $\wedge$ は既知量を表し、 $\mathbf{n}$ は領域境界における外向き単位法線ベクトルである。 ∂V_ϕ と ∂V_n は、各境界条件が与えられる領域 V の境界 ∂V の部分であり、

$$\partial V_n = \partial V_\phi + \partial V_n \quad (6)$$

2.2 有限要素モデル

2.2.1 適合モデル

この問題に対する一般的な適合モデルでは、式 (3) を対象とし、 ϕ のみを未知変数とする。エネルギー原理に基づく定式化においては、次の汎関数を用いる。

$$\Pi(\phi^h) = \sum_E \left[\int_{V_E} \frac{1}{2} k \nabla \phi^h \cdot \nabla \phi^h dV - \int_{(\partial V_E)_n} \phi^h \hat{q} dS \right] \quad (7)$$

ここに、 ϕ^h は ϕ の近似関数であり、添え字 E は要素のインデックスである。汎関数 (7) の停留条件からは式 (3) と式 (5) が得られ、式 (4) は ϕ^h に対する拘束条件となる。また、式 (7) に含まれる ϕ^h の最高階微分は一階なので、解析領域に関する積分を要素領域の積分の総和として置き換えるためには、図1に示すような隣接要素共有境界 ∂V_{ab} に沿って次式が成立しなければならない。

$$\phi_a^h = \phi_b^h \quad \text{on } \partial V_{ab} \quad (8)$$

適合モデルでは、流速は、求解後に形状関数 ϕ^h を式 (1) に代入して、要素ごと算出されるため、図1の要素境界面 ∂V_{ab} において、式 (9) が成立せず、不連続となる。

$$\mathbf{u}_a^h \cdot \mathbf{n}_{ab} + \mathbf{u}_b^h \cdot \mathbf{n}_{ba} = 0 \quad \text{on } \partial V_{ab} \quad (9)$$

また、式 (5) の境界条件についても、後述の Raviart-Thomas 混合補間を用いる要素が式 (5) の与条件を正確に満足するのに対し、適合モデルでは式 (5) を正確に満足するような流速が得ら

図1 隣接要素

Fig. 1 Adjacent elements.

れるのは特別な場合に限られる。

2.2.2 混合モデル

流線算出に適した流速場を得る方法として、全水頭 ϕ と流速 $\mathbf{u}$ を独立に近似する混合モデルによる FEM がある (Matringe et al., 2006)。それは、次の汎関数による定式化に対応する。

$$\Pi_M(\phi^h, \mathbf{u}^h) = \sum_E \left[\int_{V_E} \left(-\phi^h \nabla \cdot \mathbf{u}^h + \frac{1}{2k} \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{u}^h \right) dV + \int_{(\partial V_E)_\phi} (\mathbf{u}^h \cdot \mathbf{n} \hat{\phi}) dS \right] \quad (10)$$

この汎関数の停留条件からは、式 (1)、式 (2)、式 (4) が得られ、式 (5) が $\mathbf{u}^h$ に対する拘束条件となり、式 (5) を厳密に満足するように $\mathbf{u}^h$ を設計する必要がある。また、式 (10) には $\mathbf{u}^h$ の一階微分が含まれるので、 $\mathbf{u}^h$ は要素内で連続、かつ、図1の ∂V_{ab} において、式 (9) を満足する必要がある。

一方、 ϕ^h に対しては、汎関数 (10) には微分は含まれないので、可積分性の観点からは式 (8) を満足する必要なく、境界条件式 (4) も汎関数 (10) に含まれるので、拘束条件はない。このモデルは、未知変数が増加するため、適合モデルに比べて、解くべき連立方程式の規模が大きくなる。また、係数行列は正定値ではないので、大規模問題では求解が数値的に不安定になる。

2.2.3 ハイブリッド・モデル

上述の混合モデルにおける係数行列の問題を解決するため、ハイブリッド法が用いられた (Younes et al., 2010)。ハイブリッド法は、ラグランジュ未定条数法により、近似関数に対する拘束条件を緩和し、要素ごとに異なる関数を用いると

いった柔軟な近似を可能にする方法である。

本研究では次のハイブリッド型汎関数を用いた。導出については櫻井ほか (2013) に詳しい記載がある。

$$\begin{aligned} \Pi_H(\phi^h, \mathbf{u}^h, \lambda) &= \sum_E \left[\int_{V_E} \left(-\phi^h \nabla \cdot \mathbf{u}^h + \frac{1}{2k} \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{u}^h \right) dV \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial V_E} \lambda (\mathbf{u}^h \cdot \mathbf{n}) dS - \int_{(\partial V_E)_n} \lambda \hat{q} dS \right] \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 λ は全要素間境界に沿うラグランジュ乗数である。 $(\partial V_E)_I$ は図1の隣接要素 a, b の共有境界 ∂V_{ab} に代わる任意の要素間共有境界の表記である。式 (11) の停留条件からは式 (1), (2), (5), (9) に加えて、式 (12) が得られる。

$$\lambda(\mathbf{x}) = \phi^h(\mathbf{x}) \quad \text{on} \quad (\partial V_E)_I \quad \text{and} \quad \partial V_n \quad (12)$$

ラグランジュ乗数 λ の停留解における物理的意味が全水頭 ϕ に対応することが分かる。

拘束条件は式 (4) の境界条件に対応する式 (13) のみとなる。

$$\lambda(\mathbf{x}) = \hat{\phi} \quad \text{on} \quad \partial V_\phi \quad (13)$$

ϕ^h と $\mathbf{u}^h$ には拘束条件は存在しないため、要素行列を作りこむ過程でこれらを消去でき、ラグランジュ乗数のみを未知数とする全体行列を組み上げることが可能になる。全体行列は正定値であり、大規模問題への順応性も高い。前述の混合モデルの欠点が解消されることになる。

3. Raviart-Thomas 混合補間

Matringe et al. (2006) は混合モデルに対して、Younes et al. (2010) はハイブリッド・モデルに対して、Raviart-Thomas による混合補間（以降、RT）を適用し、二次元問題の流線、あるいは、流跡線算出における有用性を報告している。

RT による流速近似の形状関数は、図2に示すように要素の各面の流量を自由度として構築する。局所座標系 ξ における近似関数 $\bar{\mathbf{u}}^h$ を多項式で表すと、

$$\bar{\mathbf{u}}^h(\xi) = [\bar{\mathbf{P}}(\xi)]^T \{\alpha\} \quad (14)$$

ここに、 $\{\alpha\}$ は未定係数であり、多項式 $[\bar{\mathbf{P}}]$ は、六面体、五面体、四面体の順に式 (15) ～ (17) を用いる。

$$[\bar{\mathbf{P}}(\xi)]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[\bar{\mathbf{P}}(\xi)]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[\bar{\mathbf{P}}(\xi)]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 1 & 0 & \psi \\ 0 & 0 & 1 & \zeta \end{bmatrix} \quad (17)$$

ここで、要素の各境界面 F における流量を $\{q_F\}$ とすると、式 (14) は次の形に書き換えられる。

$$\bar{\mathbf{u}}^h(\xi) = [\bar{\mathbf{N}}(\xi)]^T \{q_F\} \quad (18)$$

ここに、 $[\bar{\mathbf{N}}]$ は局所座標系における流速の形状関数であり、陽な形で求めることができる。櫻井ほか (2013) には形状関数の導出過程を含めた記載がある。

図2 Raviart-Thomas 混合補間

Fig. 2 Raviart-Thomas mixed interpolation.

要素の物理座標系への写像は、アイソパラメトリック要素と同様に節点座標を用いた線形補間により行う。また、流速場の写像には、次の Piola 変換を適用する。

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^h(\mathbf{x}(\xi)) &= [\mathbf{N}(\mathbf{x}(\xi))]^T \{q_F\} \\ &= [J(\xi)]^{-1} [J(\xi)] \bar{\mathbf{u}}^h(\xi)\end{aligned}\quad (19)$$

ここに、 $[J]$ と $|J|$ は、写像関数から作られる Jacobian 行列とその行列式、 $[\mathbf{N}]$ は物理座標系での形状関数である。

上述の混合モデルでは、隣接要素境界面で自由度を共有するため、この形状関数により、式 (10) は厳密に満足される。一方、ハイブリッド・モデルでは、式 (10) は停留解において近似的に満足されることになる。また、そもそも式 (10) を満足しない関数も許される。

ϕ^h は要素内で一定値とする。すなわち、

$$\phi^h(\mathbf{x}) = \phi_E \quad (20)$$

ハイブリッド・モデルのラグランジュ乗数は要素の境界面に沿う関数であるが、要素面上で一定値とする。

$$\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_F \quad (21)$$

4. 有限要素方程式

ここでは研究対象としたハイブリッド・モデルについて有限要素方程式の導出を記載する。

近似関数、式 (19) ~ (21) を汎関数 (11) に代入すると、各変数に関する停留条件から次の三つの式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_H}{\partial \phi_E} &= - \int_{V_E} \{\nabla \cdot \mathbf{N}\}^T \{q_F\} dV \\ &= - \int_{\partial V_E} \{\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}\}^T \{q_F\} dS = \{1\}^T \{q_F\} = 0\end{aligned}\quad (22)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_H}{\partial \{q_F\}^T} &= \int_{V_E} \left[\frac{1}{k} [\mathbf{N}][\mathbf{N}]^T \{q_F\} - \{\mathbf{N} \cdot \nabla\} \phi_E \right] dV \\ &\quad + \int_{\partial V_E} \{\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}\} \lambda_F dS \\ &= [B] \{q_F\} - \{1\} \phi_E + \{\lambda_F\} = 0\end{aligned}\quad (23)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_H}{\partial \{\lambda_F\}^T} &= \sum_E \left[\int_{\partial V_E} \{\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{N}\}^T \{q_F\} dS - \int_{(\partial V_E)_n} \hat{q} dS \right] \\ &= \sum_E \left[\{q_F\} - \int_{(\partial V_E)_n} \hat{q} dS \right] = 0\end{aligned}\quad (24)$$

ただし、 $\{1\}$ は成分がすべて 1 のベクトルであり、また、

$$[B] = \int_{V_E} \frac{1}{k} [\mathbf{N}][\mathbf{N}]^T dV \quad (25)$$

ϕ^h と $\mathbf{u}^h$ には拘束条件はなく、式 (22)、式 (23) は、要素ごとに成立するため、これらの式から次式を得る。

$$\{q_F\} = [K] \{\lambda_F\} = [B]^{-1} [C] \{\lambda_F\} \quad (26)$$

$[K]$ が要素係数行列となる。行列 $[B]^{-1}$ と $[C]$ の成分をそれぞれ B_{ij}^{-1} と C_{ij} と表すと、

$$C_{ij} = \left(\sum_k^{N_E} B_{kj}^{-1} / \sum_l \sum_k^{N_E} B_{kl}^{-1} \right) - \delta_{ij} \quad (27)$$

ここに、 N_E は要素の面の数、 δ_{ij} はクロネッカのデルタである。

式 (26) を式 (24) に代入することにより、解くべき全体系の $\{\lambda_F\}$ に関する代数方程式を組み合わせることができる。

5. 数値実験

RT 補間を用いたハイブリッド・モデル (RT-HM) の基本性能を確認するために実施した数値実験の結果を報告する。

5. 1 流速の近似特性

図 3 に示すような L 字型の均質媒体内の浸透流問題を利用して、RT-HM の流速近似の特性を

図3 L字型流れ問題と四面体要素分割

Fig. 3 Flow problem of figure L and its mesh discretization by tetrahedrons.

示す。二次元問題であるが、三次元要素を用いて解析した。図3のメッシュは四面体要素での分割例である。同じ節点配置で六面体要素と2パターンの五面体要素で分割した場合の計4ケースに加え、参照解として、要素サイズが0.04の細かい六面体で分割した解析も行った。また、比較のため、一般的な水頭のみを線形補間する適合モデルによる解析（以降、L-CM）も実施した。図4は参照解であり、赤がRT-HMの結果、黒はL-CMによる結果である。流速ベクトルは、後に他の結果と比較するため選択的に描いている。屈曲部Eの特異点近傍を除けば二つの結果は良く一致しており、矢線は重なり区別できない。図5は六面体、図6と7は五面体、図8は四面体要素による結果である。図5～7において、流速ベクトルは要素の中心と節点位置で要素ごとにプロットしている。節点流速は隣接要素での重なりを避けるため要素の中心方向に少し移動した位置を始点とした。赤はRT-HM、黒はL-CM、緑は参照解の矢線である。ただし、参照解については、図が煩雑になるので、要素の中心位置でのみ図示し、四面体では図示を省略した。RT-HMの流速は、式(22)を満足するように求められるので、紙面の横、縦、奥行き方向を (ξ, ψ, ζ) とすれば、式(14)の係数 $\{\alpha\}$ が次のようになる解が得られることになる。 ζ 方向の変化はないので、

図4 細かいメッシュによる参照解

Fig. 4 Reference results by fine mesh.

図5 六面体メッシュの解

Fig. 5 Results by hexahedron mesh.

- ・六面体： $\alpha_4 + \alpha_5 = 0$, with $\alpha_6 = 0$
- ・五面体： $\alpha_4 = 0$, with $\alpha_5 = 0$
- ・四面体： $\alpha_4 = 0$

したがって、この場合、五面体と四面体は要素内で一定となるような流速が求まる。六面体の場合は、式(15)より ξ 方向の成分は ξ の関数、 ψ 方向成分は ψ の関数となる。一方、六面体L-CMでは、大きく異なり、流速は全水頭の形状関数の

図6 五面体要素パターンⅠの解
Fig. 6 Results by pentahedron mesh of pattern I.

図7 五面体要素パターンⅡの解
Fig. 7 Results by pentahedron mesh of pattern II.

図8 四面体要素の解
Fig. 8 Results by tetrahedron mesh

微分から計算するため、 ξ 方向成分は ψ の関数、 ψ 方向成分は ξ の関数となる。RT-HM の流速近似特性をまとめると、

- 細かい分割であれば、RT-HM と L-CM に差はない
- 参照解は、RT-HM と L-CM の中間的な値となる
- 要素に不透水条件となる面がある場合、RT-HM は不透水条件を精度良く近似できる
- 一つを除く残りのすべての面が不透水となる要素では、RT-HM の流速はゼロとなる

- RT-HM では隣接要素間の流量の連続性は良好だが、流速ベクトルは不連続となりうる。特に、五面体と四面体で顕著となる

5. 2 一様流のパッチテスト

長さが10で、正方形の単位断面を有する均質媒体に対し、流速が1となるような全水頭を両端に規定して、RT-HM が一様流を正確に生成できるか否かのパッチテストを実施した。節点配置の異なる六面体、五面体、四面体で分割したメッシュをそれぞれ4種用意した。節点配置間隔を長手方向に2.0、断面方向に0.5とした構造格子を基本シリーズ0とし、それから節点位置を移動させて要素に歪みを与えた3シリーズの計4シリーズである。図9はメッシュ分割とテストの可否である。メッシュ図はモデルの端部のみを表示しており、内部の分割パターンが分かるように、赤い要素だけを抜き出した図も付加した。一番左の縦一列がシリーズ0で右方向にシリーズ1、2、3の順に配置されている。一番上の横一列は六面体、その下の横一列が五面体の分割パターン1、順に五面体の分割パターン2、3、一番下の横一列が四面体による要素分割である。各図の左上にはSに続くシリーズ番号と要素の種類（hex：六面体，pen#：五面体分割パターン番号，tet：四面体）と

テストの可否を付記した。図より、RT-HM による流速ベクトルは要素形状に依存し、一様流を生成できない場合があることが分かる。結果を整理すると、

- a. 六面体と五面体要素では、流れを横切る方向の節点配置に乱れがないシリーズ0とシリーズ1では一様流を生成できた。
- b. 六面体と五面体要素では、流れを横切る方向の節点配置に乱れを与えると一様流を生成できない場合がある。

c. S2-hex と S2-pen1は一様流を生成できたが、これらは、図9において、太く縁どりをした境界面における二次元メッシュ解析と等価である。

- d. 四面体要素は、すべての分割パターンで一様流を生成できた。

図10は、一様流を生成できずに流速が乱れたケースの要素中心と節点位置での流速ベクトルである。流速が乱れるケースでも要素中心位置の乱れは小さく見えるが、デジタル値から正確な値で

図9 一様流のパッチテスト

Fig. 9 Patch tests of uniform flow problem.

ないことを確認した。ただし、全水頭値については、要素中心位置で ϕ_E を、要素面の中心位置で ϕ_F のデジタル値をみると正確な値が得られていることが確認できた。

なお、すべてのメッシュに対し、同じテストをL-CMでも行ったが、流速ベクトル、全水頭値とも一様流を生成できないケースはなかった。

5.3 直方体領域の三次元流れ

流速ベクトルの解の精度を定量的に評価するため、次式で表される三次元矩形領域の問題を解析した。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad [0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c] \quad (28)$$

$$\hat{\phi} = \phi_1 \quad [x \rightarrow 0], \quad \hat{\phi} = \phi_2 \quad [x \rightarrow a]$$

$$\hat{\phi} = 0 \quad [y \rightarrow 0, b], \quad \hat{\phi} = 0 \quad [z \rightarrow 0, c] \quad (29)$$

この問題の厳密解 $\tilde{\phi}$ は式(30)の形で表される。

$$\tilde{\phi} = \frac{16}{\pi^2} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} f_1(x) f_2(y) f_3(z) \quad (30)$$

$$f_1(x) = \frac{\phi_1 \sinh\{l(a-x)\} + \phi_2 \sinh(lx)}{\sinh(la)} \quad (31)$$

$$f_2(y) = \frac{\sin\{(2s+1)\pi y/b\}}{2s+1} \quad (32)$$

$$f_3(z) = \frac{\sin\{(2t+1)\pi z/c\}}{2t+1} \quad (33)$$

$$\frac{l^2}{\pi^2} = \frac{(2s+1)^2}{b^2} + \frac{(2t+1)^2}{c^2} \quad (34)$$

ここでは、各パラメタを次の値に設定した。

$$a=b=c=1.0 \quad (35)$$

$$\phi_1=5.0, \quad \phi_2=-5.0 \quad (36)$$

この問題に対し、図11に示すような六面体、五面体、四面体で分割した六つのメッシュを用い、RT-HMとL-CMによる解析を実施した。メッシュは対称性を考慮して1/4の領域とした。

本報告では、流速ベクトルの解の精度に着目し、各要素の中心位置と節点位置における流速の絶対値と方向の解析精度を次のノルムで評価した結果を紹介する。

$$E_{|u|} = \sqrt{\sum_{i \in E'} (|\mathbf{u}_i^h| - |\tilde{\mathbf{u}}_i|)^2} / \sqrt{\sum_{i \in E'} |\tilde{\mathbf{u}}_i|^2} \quad (37)$$

$$E_{\theta} = \sqrt{\sum_{i \in E'} \left(\frac{\mathbf{u}_i^h \cdot \tilde{\mathbf{u}}_i}{|\mathbf{u}_i^h| |\tilde{\mathbf{u}}_i|} - 1 \right)^2} / \sqrt{\sum_{i \in E'} 1} \quad (38)$$

ここに、 $\tilde{\mathbf{u}}_i$ は式(30)を偏微分して得られる流速ベクトルの厳密解、 E' は、式(29)の境界条件に接する要素を除いた要素の集合である。図12と図13は式(37)の流速絶対値の誤差ノルムであり、図12は図11上段(a)(b)(c)の構造格子による結果、図13は図11下段(d)(e)(f)の非構造格

図10 乱れた流速ベクトルの例

Fig. 10 Examples of irregular velocity.

子による結果である。図14と図15は式 (38) の流向の誤差ノルムであり、図14が構造格子による結果、図15が非構造格子による結果である。各図において、白いバーが L-CM, 灰色バーが RT-HM の誤差ノルムに対応する。

図12と図13の流速絶対値の誤差ノルムから次のことが分かる。

- a. 要素中心では L-CM 六面体の精度が他と比べて良く、その他は精度に大差はない (図12)

- b. 要素中心では L-CM, RT-HM とともに要素のゆがみによる影響は小さい (図12)
- c. 節点位置では L-CM, RT-HM とともに要素中心より精度が劣る (図12, 13)
- d. 節点位置では RT-HM の六面体と五面体は要素のゆがみの影響が他よりも大きい (図13)

図14と図15の流向の誤差ノルムからは次のことが分かる。

- e. 要素中心では L-CM, RT-HM とともに六面体

図11 直方体領域の解析メッシュ

Fig. 11 Analysis meshes for rectangular region.

図12 要素中心の流速絶対値の誤差ノルム

Fig. 12 Error norms of absolute value of velocity at element centers.

図13 要素節点の流速絶対値の誤差ノルム

Fig. 13 Error norms of absolute value of velocity at nodes on elements.

の精度が良好である (図14)

- f. 要素中心では L-CM, RT-HM とともに六面体の要素のゆがみによる影響は大きい (図14)
- g. 要素中心では RT-HM の四面体は, L-CM より高精度である (図14)
- h. 節点位置では RT-HM の六面体と五面体は L-CM より要素のゆがみによる影響は大きい (図15)

要素の位相 (topology) ごとに L-CM, RT-HM を比較すると

- i. 六面体および五面体では, RT-HM の L-CM に対する優位性は認められない。
- j. 四面体では, RT-HM の L-CM に対する優位性が認められる。

図 14 要素中心の流速方向の誤差ノルム

Fig. 14 Error norms of direction of velocity at elements.

図 15 要素節点の流速方向の誤差ノルム

Fig. 15 Error norms of direction of velocity at nodes on elements.

6. おわりに

浸透流解析において, 全水頭のみを未知変数とする一般的な FEM (L-CM) では, 精度の良い連続な流速場が得られないという問題を背景に開発された RT-HM について, 数値実験により, その基本性能を評価した。最初の L 字型の媒体の浸透流問題では, 流速近似の特徴を示した。RT-HM の特筆すべき特性は, 隣接要素間の流量が連続である点と, 不透水境界条件を精度良く近似できる点であろう。これらは, 多くの既発表論文が開発動機の一つとしているように, 流跡線計算において高い優位性を示す特徴である。反対に L-CM では, これらの特性を備えていないことが大きな欠

(a) RT-HM

(b) L-CM

図 16 非構造格子での全水頭コンター表示 (上: RT-HM, 下: L-CM)

Fig. 16 Contour display of uniform flow field based on unstructured discretization.

点と言える。

一様流のパッチテストでは、要素の面がねじれているような任意形状の六面体、五面体要素では RT-HM は正しい解を与えないことがあることが明らかとなった。これは、二次元要素では起こり得ない問題であるため、二次元問題を対象とした多くの既発表論文では指摘されていなかった。FEM の最大の特徴の一つは、複雑形状への順応性が高いことであり、特に地下水浸透流解析のように、地形や地層境界面といった複雑な曲面を有する領域を対象とする問題に対しては差分法や有限体積法と比べると FEM は高い優位性を有することになるが、RT-HM の三次元要素を用いる場合には注意が必要となる。

理論解の存在する三次元矩形領域の数値実験では、四面体要素の場合は、RT-HM の L-CM に対する優位性が認められたが、六面体および五面体要素では、RT-HM の L-CM に対する明確な優位性は認められなかった。

以上の知見は、限られた数値実験に基づくものであるが、これまでの多くの研究報告が対象としていた二次元要素では分かりえない RT-HM の欠点も含まれる。我が国のように複雑な地形・地質を対象とする場合には三次元解析は不可欠であり、RT-HM の実用に際しては十分な注意が必要である。

また、RT-HM では、全水頭の自由度が要素の面と要素の中心位置で定義されるため、実問題で重要となる地形の起伏の影響が、節点に自由度を持つ従来型の FEM に比べて過小評価される恐れがある。得られた全水頭の図画処理にも注意が必要である。図16は、紙面右から左へ流れる一様流を非構造格子で解析した全水頭コンターであるが、RT-HM は自由度位置では正確な値が得られているにも係わらず、コンター図は正しく表現できていない。一般的なコンター図のアルゴリズムは節点値をベースとしているためである。透水性の異なる内在構造等、コンターの乱れがメッシュ分割以外に起因する場合もあり得るため、RT-HM では、非構造格子での全水頭コンター図の評価にも注意が必要である。

以上のように、RT-HM は非常に優れた性能を備えている反面、L-CM では起こりえない欠点も

有する。現状では、構造格子に近い分割での流跡線計算には L-CM より適性が高い方法と言えるが、従来の FEM に代わる手法とは言い難い。両者の長所短所を十分把握した上で、それらを補完するような使い分けが重要であると考ええる。

参考文献

- 青木広臣・鈴木俊一・下村雅則・川上博人 (2011) : 混合化形式有限要素法による放射性廃棄物処分施設を対象とした地下水流動解析. 土木学会論文集 C, 67(4), 453-463.
- 櫻井英行・郷家光男・白石知成・菱谷智幸・山浦昌之・鹿島浩之 (2012) : 三次元浸透流問題における Raviart-Thomas 補間関数の精度検証. 日本地下水学会 2012年秋季講演会講演要旨, 178-183.
- 櫻井英行・郷家光男・白石知成・菱谷智幸・山浦昌之・鹿島浩之 (2013) : Raviart-Thomas 混合補間を用いた有限要素の三次元浸透流問題における基本性能. 土木学会論文集 A2, 69 (1), 30-40.
- 白石知成・櫻井英行・菱谷智幸・山浦昌之・谷藤眞一郎 (2011) : CK 法による FEM 地下水流動解析結果からの流量算出法の考察. 日本地下水学会 2011年春季講演会講演要旨, 10-15.
- 松本敏三 (1983) : 境界条件を満足する総合偏微分方程式 (第2版). 現代工学社, 361-363.
- Cordes, C. and W. Kinzelbach (1992): Continuous groundwater velocity field and path lines in linear, bilinear and trilinear finite elements. Water Resources Research, 28(11), 2903-2911.
- Raviart, P.A. and J.M. Thomas (1977): A mixed finite element method for second order elliptic problems. Lecture Notes in Mathematics, 606, 292-315.
- Matringe, F.S., R. Juanes and A.H. Tchelepi (2006): Robust streamline tracing for the simulation of porous media flow on general triangular and quadrilateral grids. Journal of Computational Physics, 219(2), 992-1012.
- Younes, A., P. Ackerer and F. Delay (2010): Mixed finite elements for solving 2-D diffusion-type equations. Reviews of Geophysics, 48, RG1004.

(受付：2013年10月26日，受理：2014年6月3日)